

Математический анализ, ИУ9, 2-й семестр

Вопросы для подготовки к экзамену/2009г

1. Теорема о разложении правильной рациональной дроби на простейшие и ее доказательство.
2. Интегрирование простейших дробей и рациональных функций.
3. Дать определение интеграла Римана. Доказать его свойства: линейность и интеграл от константы.
4. Необходимое условие интегрируемости и его доказательство.
5. Нижние и верхние интегральные суммы. Критерий интегрируемости, его доказательство.
6. Доказательство интегрируемости непрерывных функций и функций с конечным числом точек разрыва.
7. Сформулировать и доказать свойство аддитивности определенного интеграла.
8. Доказать свойства определенного интеграла: монотонность, теорему о сохранении интегралом знака подынтегральной функции, теорему об оценке модуля и теорему об оценке определенного интеграла.
9. Доказать две теоремы о среднем для определенного интеграла.
10. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Доказать теорему о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом.
11. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Доказать теорему о производной от интеграла по его верхнему пределу.
12. Вывести формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла.
13. Вычисление определенных интегралов. Вывести правила интегрирования по частям и подстановкой.
14. Интегрирование периодических функций, интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.
15. Вывести формулы для вычисления с помощью определенного интеграла площади плоской фигуры для случаев, когда граница задана в декартовых координатах или параметрически.
16. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади плоской фигуры, граница которой задана в полярных координатах.
17. Привести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела по площадям параллельных сечений в декартовой системе координат.
18. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объемов тел вращения вокруг осей OX и OY в декартовой системе координат.
19. Дать определения длины дуги кривой и спрямляемых кривых. Доказать достаточное условие спрямляемости кривых.
20. Определение длины дуги кривой. Вывести формулы для вычисления с помощью определенного интеграла длины дуги кривой, заданной параметрически, в декартовой или полярной системах координат.
21. Кривизна кривой и ее геометрический смысл. Вывести формулы для вычисления кривизны графика функции и кривизны плоской кривой, заданной параметрически.
22. Определение радиуса кривизны, круга кривизны и центра кривизны плоской кривой. Эволюта и эвольвента. Механический способ построения по заданной кривой одной из ее эвольвент. Доказать геометрический смысл круга кривизны. Вывести формулу для вычисления координат центра кривизны.
23. Дать определение несобственного интеграла от непрерывной функции на бесконечном промежутке. Доказать признаки сравнения для таких интегралов.
24. Дать определение несобственного интеграла от неограниченной функции на конечном отрезке интегрирования. Сведение несобственного интеграла от неограниченной функции к несобственному интегралу по бесконечному промежутку. Сформулировать признаки сходимости интегралов от неограниченной функции.
25. Сформулировать свойства несобственного интеграла от непрерывной функции на бесконеч-

- ном промежутке. Вывести формулу Ньютона — Лейбница, правила интегрирования по частям и подстановкой для таких интегралов.
26. Сформулировать свойства несобственного интеграла от непрерывной функции на бесконечном промежутке.
 27. Дать определение абсолютной и условной сходимости несобственного интеграла. Сформулировать теорему о их связи.
 28. Кривая в пространстве как график векторной функции. Предел и непрерывность векторной функции. Доказать теорему о покомпонентной сходимости векторной функции.
 29. Касательная к кривой и производная векторной функции. Достаточное условие существования касательной с доказательством и геометрический смысл производной векторной функции. Правила дифференцирования векторных функций. Доказать свойство производной векторной функции постоянной длины.
 30. Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что $\mathbb{R}^n$ является топологическим пространством.
 31. Определить структуру топологического пространства в $\mathbb{R}^n$. Доказать компактность n -мерного бруса.
 32. Доказать критерий компактности множеств в $\mathbb{R}^n$.
 33. Определение функции многих переменных (ФМП). Координатные функции. Предел ФМП по базе и его свойства. Доказать теорему о покомпонентной сходимости ФМП.
 34. Непрерывность функции многих переменных в точке. Сформулировать свойства функций, непрерывных в точке. Доказать теорему о непрерывности сложной функции.
 35. Непрерывность функций многих переменных на множествах. Теорема о непрерывных отображениях компактов и линейно связных множеств. Ее доказательство и вывод из нее свойств функций, непрерывных на компактах и на линейно связных множествах.
 36. Определение дифференцируемости и дифференциала функции многих переменных (ФМП). Доказать теорему о покомпонентной дифференцируемости ФМП и второе необходимое условие дифференцируемости.
 37. Понятие частной производной. Дифференцируемая функция многих переменных (ФМП) и матрица Якоби. Доказать первое необходимое условие дифференцируемости ФМП в точке. Геометрическая интерпретация частных производных
 38. Дать определение дифференцируемых функций многих переменных. Доказать достаточное условие дифференцируемости.
 39. Дифференцируемые функции многих переменных. Доказать теорему о дифференцировании сложной функции. Цепное правило. Доказать свойство инвариантности дифференциала функции многих переменных.
 40. Основные правила дифференцирования. Доказать линейность и правило Лейбница для дифференциала и частных производных функции многих переменных.
 41. Частные производные высших порядков. Матрица Гессе. Доказать теорему о смешанных производных.
 42. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Доказать теорему Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в форме Лагранжа.
 43. Сформулировать и доказать теорему о неявной функции в общем случае.
 44. Сформулировать и доказать теорему об обратной функции. Сведение теоремы о неявной функции к теореме об обратной функции.
 45. Производная по направлению дифференцируемой функции. Вывести формулу для производной по направлению дифференцируемой функции.
 46. Градиент функции многих переменных. Доказать свойства градиента дифференцируемой функции.
 47. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Доказать достаточные условия их существования и вывести уравнения. Дать геометрическую интерпретацию дифференциала функции двух переменных.

48. Понятие локального экстремума функции многих переменных. Сформулировать и доказать необходимое условие экстремума. Стационарные и критические точки. Схема исследования функций на экстремум.
49. Сформулировать и доказать достаточные условия экстремума функции многих переменных в общем случае и в двумерном случае.
50. Постановка задачи на условный экстремум. Функция Лагранжа. Сформулировать и доказать необходимые условия экстремума.
51. Сформулировать и доказать достаточные условия условного экстремума в общем случае.

Типовые задачи

Интегральное исчисление функций одного переменного.

ОЛ-1, задачи 7.3, 7.7, 9.2, 9.3, 9.10–9.15; задачи к/р и д/з.

Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

ОЛ-2, задачи 2.2–2.8, 3.1–3.8, 4.2–4.9, 5.2–5.11, 6.1–6.5, 7.1–7.4, 7.7–7.13; задачи к/р и д/з.

Литература

ОЛ-1: Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н. Интегральное исчисление функций одного переменного. - М.: Изд-во МГТУ, 1999. - 528с.

ОЛ-2: Канатников А.Н., Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. - М.: Изд-во МГТУ, 2000. - 456с.

ОЛ-3: Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. Изд. 2-е. М.: ФАЗИС, 1997. — 554 с.

ОЛ-4: Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу.: Учебник для университетов и пед. вузов. М.: Высш. шк. 1999. — 695 с.