

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.Э.Баумана

Кафедра «Высшая математика»

Блюмин А.Г., Федотов А.А., Храпов П.В.

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ**

Методические указания
к выполнению лабораторных работ
по курсу «Численные методы»

Москва 2008

Блюмин А.Г., Федотов А.А., Храпов П.В. Численные методы вычисления интегралов и решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Численные методы». — М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008. — 74 с.

В пособии рассмотрены численные методы вычисления однократных и двойных определенных интегралов и методы решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: методы решения задачи Коши для одного уравнения и системы уравнений, а также краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Изложено правило Рунге практической оценки погрешности, используемое при приближенном вычислении интегралов и интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены варианты индивидуальных заданий к лабораторным работам.

Для студентов 2-ого курса факультетов МТ и РК МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Оглавление

Предисловие	5
1. Численные методы вычисления определенного интеграла	6
1.1. Постановка задачи	6
1.2. Численные методы вычисления интеграла	6
1.2.1. Квадратурные формулы	6
1.2.2. Формула средних прямоугольников	8
1.2.3. Формула трапеций	10
1.2.4. Формула Симпсона	10
1.2.5. Составные квадратурные формулы	11
1.2.6. Квадратурные формулы Гаусса	14
1.2.7. Правило Рунге практической оценки погрешности . . .	18
1.3. Задание	21
2. Приближенное вычисление двойного интеграла	26
2.1. Постановка задачи	26
2.2. Численные методы вычисления двойного интеграла	26
2.2.1. Метод ячеек	27
2.2.2. Последовательное интегрирование с использованием формулы трапеций	34
2.2.3. Последовательное интегрирование с использованием квадратурных формул Гаусса	36
2.3. Задание	38
3. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных урав- нений	42

3.1. Постановка задачи	42
3.2. Численные методы решения задачи Коши	43
3.2.1. Явный метод Эйлера	43
3.2.2. Методы Рунге-Кутты	49
3.2.3. Многошаговые методы Адамса	50
3.2.4. Правило Рунге практической оценки погрешности	53
3.3. Интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка	54
3.4. Задание	57
4. Краевая задача для линейного обыкновенного дифференци- ального уравнения второго порядка	66
4.1. Постановка задачи	66
4.2. Численные методы решения краевой задачи	66
4.2.1. Разностная аппроксимация производных	66
4.2.2. Решение задачи методом прогонки	68
4.2.3. Решение задачи методом стрельбы	69
4.3. Задание	71
Литература	74

Предисловие

Пособие содержит описание лабораторных работ по разделам «Приближенные методы вычисления определенных интегралов» и «Численные методы решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений» дисциплины «Численные методы» общего курса высшей математики.

Глава 1 посвящена изучению широко используемых для приближенного вычисления определенных интегралов квадратурных формул средних прямоугольников, трапеций, формулы Симпсона и формул Гаусса. В гл. 2 рассмотрены численные методы вычисления двойных интегралов: метод ячеек и метод последовательного интегрирования. В гл. 3 излагаются приближенные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Изучается метод Эйлера, приводятся расчетные формулы методов Рунге-Кутты второго и четвертого порядков точности, дается изложение метода Адамса. Обсуждается распространение рассмотренных методов на случай задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В гл. 4 изучаются приближенные методы решения краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка: решение разностной задачи методом прогонки и методом стрельбы. Изложено правило Рунге практической оценки погрешности, используемое при приближенном вычислении интегралов и интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены варианты индивидуальных заданий к лабораторным работам.

Список литературы, рекомендуемой для более полного ознакомления с рассмотренными в работе вопросами, приводится в конце пособия.

Для студентов 2-го курса факультетов МТ и РК МГТУ им. Н.Э. Баумана. Пособие также может быть использовано студентами всех факультетов.

Глава 1

Численные методы вычисления определенного интеграла

Цель работы — изучение численных методов интегрирования и их практическое применение для приближенного вычисления однократных интегралов.

Продолжительность работы — 2–4 час.

1.1. Постановка задачи

Требуется вычислить приближенно интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

где $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция.

1.2. Численные методы вычисления интеграла

1.2.1. Квадратурные формулы

В качестве приближенного значения интеграла I рассматривается число

$$I_n = \sum_{i=0}^n q_i \cdot f(x_i), \quad (1.2.1)$$

где $f(x_i)$ — значения функции $f(x)$ в точках $x = x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, q_i — числовые коэффициенты. Формула (1.2.1) называется *квадратурной формулой*. Точки x_i называются *узловыми точками* или *узлами* квадратурной формулы, а числа q_i — *весовыми коэффициентами* или *весами* квадратурной

формулы. Разность

$$R_n = I - I_n = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^n q_i \cdot f(x_i)$$

называется *погрешностью* квадратурной формулы. Погрешность зависит как от расположения узлов, так и от выбора весовых коэффициентов.

Говорят, что квадратурная формула *точна* для многочленов степени s , если при замене $f(x)$ на произвольный алгебраический многочлен степени не выше s приближенное равенство $I \approx I_n$ становится точным.

Введем некоторые понятия, которые будут использоваться в дальнейших рассуждениях.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу $C^k[a, b]$, и писать $f \in C^k[a, b]$, если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и имеет на нем непрерывные производные до порядка k включительно.

Определение 2. Пусть $\varphi(h)$ — некоторая функция переменной h с конечной областью определения D_φ на полуоси $h > 0$, причем $h \in D_\varphi$ может принимать сколь угодно малые значения. Тогда, если существуют такие положительные числа h_0, c, k , что при всех $h \in D_\varphi$, удовлетворяющих условию $0 < h \leq h_0$, выполняется неравенство

$$|\varphi(h)| \leq c \cdot h^k,$$

то пишут

$$\varphi(h) = O(h^k)$$

и говорят, что $\varphi(h)$ есть O большое от h^k (при $h \rightarrow 0$).

Согласно данному определению, выполняются следующие очевидные свойства. Если $\varphi(h) = O(h^k)$, $\psi(h) = O(h^k)$, причем $D_\varphi = D_\psi$, то

$$\varphi(h) + \psi(h) = O(h^k),$$

т.е.

$$O(h^k) + O(h^k) = O(h^k).$$

Если $k > m > 0$, то $O(h^k)$ в то же время есть $O(h^m)$. Наконец, если $\varphi(h) = O(h^k)$, то $\alpha \cdot \varphi(h) = O(h^k)$, где α — постоянная, не зависящая от h .

Рассмотрим наиболее простые квадратурные формулы.

1.2.2. Формула средних прямоугольников

Допустим, что $f \in C^2[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$, $h > 0$. Положим приблизительно

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} f(x) dx \approx h \cdot f_0, \quad (1.2.2)$$

где $f_0 = f(0)$. Формула (1.2.2) означает, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, аппроксимируется площадью закрашенного прямоугольника (рис. 1.1, а), высота которого равна значению f_0 функции $f(x)$ в *средней* точке $x = 0$ отрезка $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$. Формула (1.2.2) называется формулой средних прямоугольников.

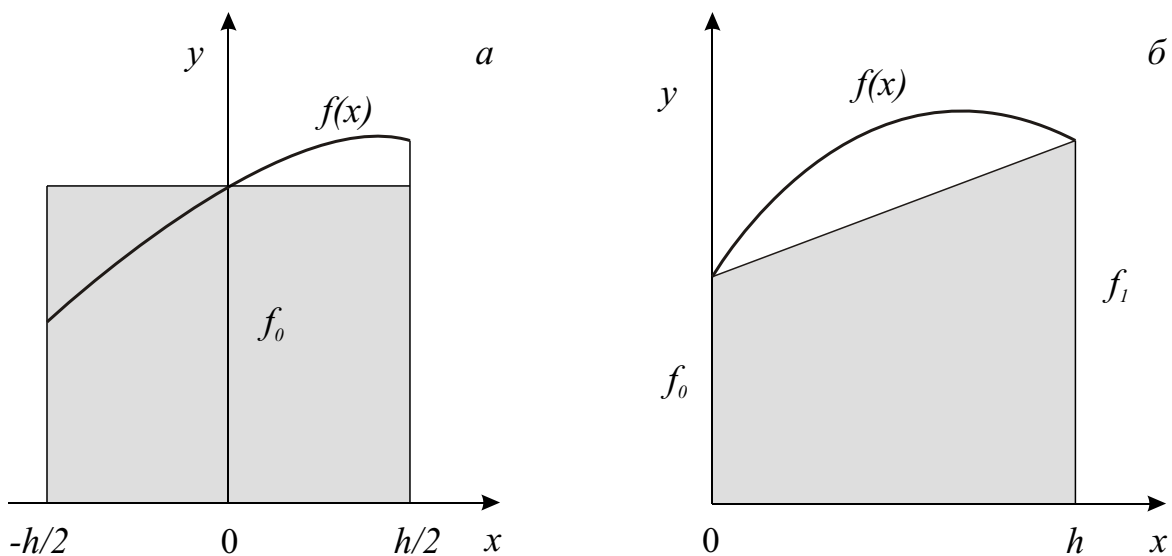


Рис. 1.1.

Получим формулу средних прямоугольников с остаточным членом. Пусть

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Так как $F(0) = 0$, $F'(0) = f_0$, $F''(0) = f'_0$, $F'''(x) = f''(x)$, то согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, имеем

$$F(\pm \frac{h}{2}) = F(0) \pm \frac{h}{2} F'(0) + \frac{h^2}{8} F''(0) \pm \frac{h^3}{48} F'''(\xi_{\pm})$$

или

$$F(\pm \frac{h}{2}) = \pm \frac{h}{2} f_0 + \frac{h^2}{8} f'_0 \pm \frac{h^3}{48} f''(\xi_{\pm}), \quad (1.2.3)$$

где ξ_-, ξ_+ — некоторые точки, причем $-\frac{h}{2} < \xi_- < 0 < \xi_+ < \frac{h}{2}$.

С учетом (1.2.3) получаем

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x) dx = F\left(\frac{h}{2}\right) - F\left(-\frac{h}{2}\right) = h \cdot f_0 + \frac{h^3}{24} \cdot \frac{f''(\xi_-) + f''(\xi_+)}{2}.$$

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть $f \in C^1[a, b]$, $\xi_i \in [a, b]$ — произвольные точки, $i = 1, 2, \dots, n$.

Тогда существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$[f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)]/n = f(\xi).$$

Эта лемма вытекает из очевидных неравенств

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) \leq [f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)]/n \leq \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

и теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции.

Используя лемму, получаем *формулу средних прямоугольников с остаточным членом*

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x) dx = h \cdot f_0 + \frac{h^3}{24} \cdot f''(\xi), \quad |\xi| \leq \frac{h}{2}.$$

1.2.3. Формула трапеций

Пусть $f \in C^2[0, h]$. Полагаем

$$I = \int_0^h f(x)dx \approx h \cdot \frac{f_0 + f_1}{2}, \quad (1.2.4)$$

где $f_0 = f(0)$, $f_1 = f(h)$. Из формулы (1.2.4) видно, что искомое значение интеграла приближенно заменяется величиной площади закрашенной на рис. (1.1,б) трапеции.

Аналогично тому, как это сделано в п. (1.2.2) можно получить *формулу трапеций с остаточным членом*

$$\int_0^h f(x)dx = h \cdot \frac{f_0 + f_1}{2} - \frac{h^3}{12} \cdot f''(\xi), \quad \xi \in [0, h].$$

1.2.4. Формула Симпсона

Предположим, что $f \in C^4[-h, h]$ и требуется вычислить интеграл

$$I = \int_{-h}^h f(x)dx.$$

Значение этого интеграла приближенно заменяем величиной площади закрашенной криволинейной трапеции (рис. 1.2), ограниченной сверху параболой $p(x)$, проходящей через точки $(-h, f_{-1})$, $(0, f_0)$, (h, f_1) , где $f_i = f(i \cdot h)$, $i = -1, 0, 1$. Эта парабола задается уравнением

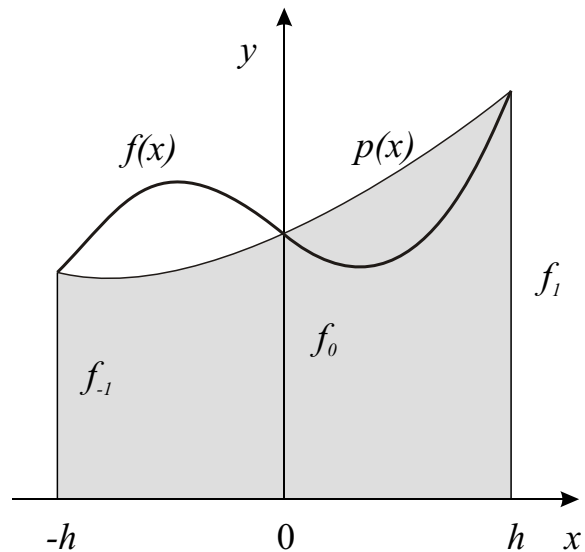


Рис. 1.2.

$$p(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \cdot x + \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{2h^2} \cdot x^2$$

и

$$\int_{-h}^h p(x) dx = \frac{h}{3} \cdot (f_{-1} + 4f_0 + f_1).$$

Следовательно

$$\int_{-h}^h f(x) dx \approx \frac{h}{3} \cdot (f_{-1} + 4f_0 + f_1). \quad (1.2.5)$$

Формула Симпсона с остаточным членом имеет вид

$$\int_{-h}^h f(x) dx = \frac{h}{3} \cdot (f_{-1} + 4f_0 + f_1) - \frac{h^5}{90} \cdot f^{(IV)}(\xi), \quad \xi \in [-h, h].$$

Рассмотренные квадратурные формулы средних прямоугольников (1.2.2), трапеций (1.2.4) и Симпсона (1.2.5) назовем *каноническими*.

1.2.5. Составные квадратурные формулы

На практике, если требуется вычислить приближенно интеграл, обычно делят заданный отрезок $[a, b]$ на n равных *частичных* отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, 1, \dots, n$; $x_0 = a$, $x_n = b$, $h = (b - a)/n$. На каждом частичном отрезке используют каноническую квадратурную формулу и суммируют полученные результаты. При применении формул средних прямоугольников и трапеций длину частичных отрезков удобно принять за h , а при использовании формулы Симпсона — за $2h$. В результате получаются следующие формулы, которые будем называть *составными*.

Составная квадратурная формула средних прямоугольников записывается в виде (рис. 1.3)

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot (f_{c1} + f_{c2} + \dots + f_{cn}), \quad (1.2.6)$$

где $h = (b-a)/n$, $f_{ci} = f(x_{ci})$; $x_{ci} = a + (i-1/2)h$, $i = 1, 2, \dots, n$ — координаты средних точек частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$.

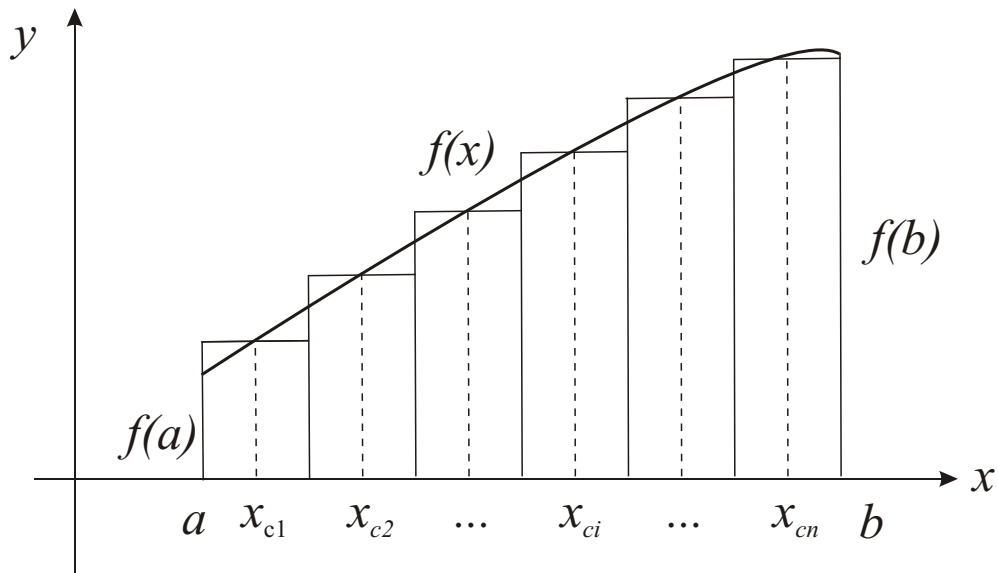


Рис. 1.3.

Погрешность R_n получается в результате суммирования погрешностей по частичным отрезкам

$$R_n = \frac{h^3}{24} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) = \frac{h^3}{24} n \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \right),$$

где $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. В соответствии со сформулированной выше [леммой](#) последнее выражение для R_n можно переписать в виде

$$R_n = \frac{h^3}{24} \cdot n \cdot f''(\xi) = h^2 \cdot \frac{(b-a)}{24} \cdot f''(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Пусть M — максимальное значение модуля второй производной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, т.е. $M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$; тогда из выражения для R_n получаем следующую оценку:

$$|R_n| \leq h^2 \cdot \frac{(b-a) \cdot M}{24},$$

это означает, что погрешность формулы средних прямоугольников на всем отрезке интегрирования $[a, b]$ есть величина $O(h^2)$ (см. определение 2).

В этом случае говорят, что квадратурная формула имеет *второй порядок точности*.

Замечание. Возможны формулы прямоугольников и при ином, чем в формуле средних прямоугольников, расположении узлов. Например,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n h \cdot f_{x_{i-1}}, \quad \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n h \cdot f_{x_i}.$$

Однако из-за нарушения симметрии погрешность таких формул является величиной $O(h)$, т.е. порядок точности таких формул на единицу ниже порядка точности формулы средних прямоугольников.

Составная квадратурная формула трапеций имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right), \quad (1.2.7)$$

где $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + i \cdot h$, $h = (b-a)/n$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Аналогично предыдущему случаю можно получить выражение для погрешности R_n составной формулы трапеций

$$R_n = -h^2 \cdot \frac{(b-a)}{12} \cdot f''(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Тогда имеет место оценка

$$|R_n| \leq h^2 \cdot \frac{(b-a) \cdot M}{12}, \quad M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Таким образом, формула трапеций (1.2.7) имеет, так же как и формула средних прямоугольников (1.2.6), второй порядок точности ($R_n = O(h^2)$); следует заметить, что ее погрешность оценивается величиной в два раза большей, чем погрешность формулы средних прямоугольников.

Составная квадратурная формула Симпсона записывается так

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot \left(f_0 + f_{2n} + 4 \cdot \sum_{i=1}^n f_{2i-1} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} \right), \quad (1.2.8)$$

где $f_j = f(x_j)$, $x_j = a + j \cdot h$, $h = (b - a)/(2n)$, $j = 0, 1, \dots, 2n$.

Погрешность составной формулы Симпсона имеет вид

$$R_n = -h^4 \cdot \frac{(b - a)}{180} \cdot f^{(IV)}(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Отсюда получаем оценку

$$| R_n | \leq h^4 \cdot \frac{(b - a) \cdot M}{180}, \quad M = \max_{x \in [a, b]} | f^{(IV)}(x) |,$$

т.е. составная формула Симпсона существенно точнее, чем формулы средних прямоугольников и трапеций. Она имеет на отрезке $[a, b]$ четвертый порядок точности ($R_n = O(h^4)$).

Из выражений погрешностей видно, что формулы средних прямоугольников и трапеций точны для многочленов первой степени, т.е. для линейных функций, а формула Симпсона точна для многочленов третьей степени (для них погрешность равна нулю).

1.2.6. Квадратурные формулы Гаусса

Будем считать, что интеграл предварительно приведен к стандартной форме, когда областью интегрирования является отрезок $[-1, 1]$. Итак, пусть

требуется вычислить интеграл

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Мы рассматривали до сих пор квадратурные формулы с заданными узлами и убедились, что формулы средних прямоугольников и трапеций точны для многочленов первой степени, а формула Симпсона — для многочленов третьей степени. Пусть мы имеем квадратурную формулу с n *узловыми точками*

$$I_n = \sum_{i=1}^n q_i \cdot f(x_i). \quad (1.2.9)$$

Если считать неизвестными не только весовые коэффициенты q_i , но и узлы x_i , то можно потребовать, чтобы квадратурная формула (1.2.9) была **точной** для полиномов наиболее высокой степени m . Такую формулу называют *квадратурной формулой Гаусса*. При этом оказывается, что $m = 2n - 1$.

Формула (1.2.9) должна быть точна для $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}$, т.е.

$$I_n = \sum_{i=1}^n q_i \cdot x_i^l = \int_{-1}^1 x^l dx = \frac{x^{l+1}}{l+1} \Big|_{-1}^1 = \frac{1 + (-1)^l}{l+1},$$

где $l = 0, 1, \dots, 2n - 1$. В результате для узлов x_i и коэффициентов q_i получим следующую систему $2n$ нелинейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 + q_2 + \dots + q_n = 2, \\ q_1 x_1 + q_2 x_2 + \dots + q_n x_n = 0, \\ q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \dots + q_n x_n^2 = \frac{2}{3}, \\ \vdots \\ q_1 x_1^{2n-1} + q_2 x_2^{2n-1} + \dots + q_n x_n^{2n-1} = \frac{1 + (-1)^{2n-1}}{2n}. \end{array} \right. \quad (1.2.10)$$

В простейшем случае $n = 1$ систему (1.2.10) можно решить и убедиться, в том, что полученная формула Гаусса совпадает с формулой средних прямоугольников: $I_n = 2 \cdot f(0)$, и что она верна для любой линейной функции $f(x) = c_0 + c_1x$. В общем случае при произвольном n можно показать (см., например, [4]), что узлами квадратурной формулы Гаусса являются корни полинома Лежандра $P_n(x)$, а весовые коэффициенты вычисляются по формуле

$$q_j = \int_{-1}^1 Q_{n-1,j}(x) dx, \quad j = 1, \dots, n; \quad (1.2.11)$$

где подынтегральная функция

$$Q_{n-1,j}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}.$$

Функция $Q_{n-1,j}(x)$ является полиномом степени $(n - 1)$. В числителе у него стоит произведение $(n - 1)$ -ого множителей $(x - x_i)$, $i = 1, \dots, n, i \neq j$; в знаменателе — значение числителя в узле $x = x_j$. Таким образом, полином $Q_{n-1,j}(x)$ в узлах x_i принимает следующие значения

$$Q_{n-1,j}(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Полиномы Лежандра. Они определяются формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.2.12)$$

Согласно (1.2.12) $P_0(x)=1$, $P_1(x) = x$. Для последующих значений n можно воспользоваться рекуррентным соотношением

$$nP_n(x) = (2n - 1) \cdot x \cdot P_{n-1}(x) - (n - 1)P_{n-2}(x).$$

Пользуясь этой формулой, выпишем полиномы Лежандра для $n = 2, 3, 4, 5$:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned}$$

Графики полиномов $P_n(x)$ до $n = 5$ представлены на рис. 1.4.

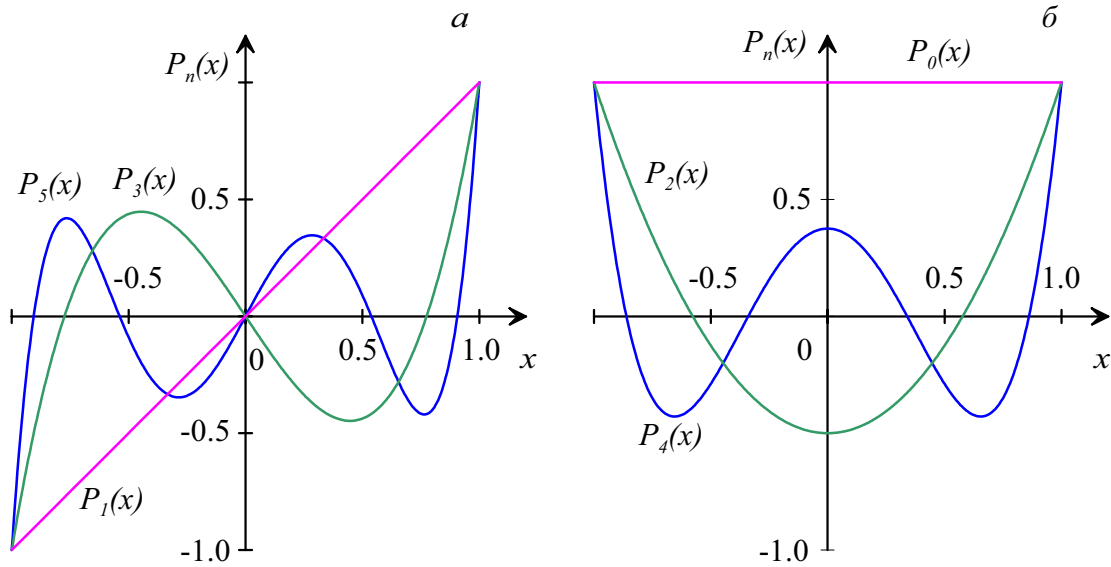


Рис. 1.4.

Полиномы Лежандра с четными номерами являются четными функциями, а с нечетными — нечетными. Полиномы Лежандра $P_n(x)$ в точках $x = \pm 1$ принимают следующие значения: $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$. На интервале $(-1, 1)$ многочлен $P_n(x)$ имеет n простых нулей. В силу четности или нечетности $P_n(x)$ нули полиномов Лежандра располагаются симметрично относительно точки $x = 0$.

Можно показать, что **весовые коэффициенты q_j (1.2.11)** квадратурной формулы Гаусса положительны (см., например, [3]). Кроме того, в симметричных относительно точки $x = 0$ корнях полинома Лежандра $x_j = -x_{n-(j-1)}$ весовые коэффициенты, соответствующие этим узлам, совпадают при любом n : $q_j = q_{n-(j-1)}$.

Приведем значения корней x_i и соответствующих им весов q_i квадратурных формул Гаусса для $n = 1, \dots, 5$:

$$n = 1 : \quad x_1 = 0, \quad q_1 = 2;$$

$$n = 2 : \quad -x_1 = x_2 = \sqrt{1/3}, \quad q_1 = q_2 = 1;$$

$$n = 3 : \quad -x_1 = x_3 = \sqrt{3/5}, \quad x_2 = 0, \quad q_1 = q_3 = 5/9, \quad q_2 = 8/9;$$

$$n = 4 : \quad -x_1 = x_4 = \sqrt{(15 + 2\sqrt{30})/35}, \quad -x_2 = x_3 = \sqrt{(15 - 2\sqrt{30})/35},$$

$$q_1 = q_4 = (18 - \sqrt{30})/36, \quad q_2 = q_3 = (18 + \sqrt{30})/36;$$

$$n = 5 : \quad -x_1 = x_5 = \sqrt{(35 + 2\sqrt{70})/63}, \quad -x_2 = x_4 = \sqrt{(35 - 2\sqrt{70})/63},$$

$$q_1 = q_5 = (322 - 13\sqrt{70})/900, \quad q_2 = q_4 = (322 + 13\sqrt{70})/900,$$

$$x_3 = 0, \quad q_3 = 128/225.$$

(1.2.13)

Численные значения узлов x_i и весов q_i (1.2.13) с десятью десятичными знаками после запятой приведены в табл. 1.1. На оценке погрешности квадратурных формул Гаусса останавливаться не будем (см., например, [5]).

1.2.7. Правило Рунге практической оценки погрешности

При выводе формулы средних прямоугольников предполагалось, что $f \in C^2[a, b]$. Погрешность этой формулы, выражающаяся через вторую производную $f''(x)$, есть величина $O(h^2)$. Если подынтегральная функция имеет производные более старших порядков, то можно получить более содержательную оценку погрешности.

Если $f \in C^4[a, b]$, то можно получить следующее выражение для

$$I = \int_a^b f(x)dx:$$

$$I = I_h^{np} + c \cdot h^2 + O(h^4), \quad (1.2.14)$$

где I_h^{np} — значение интеграла, вычисленное по составной формуле средних прямоугольников с шагом h ($h = (b - a)/n$); c — постоянная, не зависящая от h , $c = \frac{1}{24} \int_a^b f''(x)dx$.

Величина ch^2 в выражении (1.2.14) называется *главной частью погрешности* формулы средних прямоугольников. Может случиться, что $c = 0$. Тогда главная часть погрешности формулы средних прямоугольников является величиной порядка h^4 . Но обычно $c \neq 0$.

Если $f \in C^4[a, b]$, то можно получить также соотношение

$$I = I_h^{mp} + c_1 \cdot h^2 + O(h^4), \quad (1.2.15)$$

где I_h^{mp} — приближенное значение интеграла I , найденное по составной формуле трапеций с шагом h ; c_1 — постоянная, не зависящая от h , $c_1 = -\frac{1}{12} \int_a^b f''(x)dx$.

Если $f \in C^6[a, b]$, то аналогично выражениям (1.2.14) и (1.2.15) можно получить следующее соотношение

$$I = I_h^C + c \cdot h^4 + O(h^6), \quad (1.2.16)$$

где I_h^C — приближенное значение интеграла I , найденное по составной формуле Симпсона; c — некоторая не зависящая от h постоянная.

Правило Рунге. Пусть I_h — приближенное значение интеграла I , найденное по одной из трех рассмотренных составных формул (по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона). Объединим соотношения (1.2.14), (1.2.15) и (1.2.16) в одно:

$$I = I_h + c \cdot h^k + O(h^{k+2}), \quad (1.2.17)$$

где c не зависит от h , k — порядок точности квадратурной формулы ($k = 2$ для составных формул средних прямоугольников и трапеций, $k = 4$ для составной формулы Симпсона). Предполагается, что $f \in C^{k+2}[a, b]$.

На основании формулы (1.2.17) можем записать, что

$$I = I_{h/2} + c \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^k + O(h^{k+2}). \quad (1.2.18)$$

Вычитая равенство (1.2.18) из (1.2.17), находим

$$I_{h/2} - I_h = c \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^k (2^k - 1) + O(h^{k+2}).$$

Отсюда

$$c \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^k = \frac{I_{h/2} - I_h}{2^k - 1} + O(h^{k+2})$$

и, следовательно, согласно формуле (1.2.18), с точностью до $O(h^{k+2})$ имеем

$$I - I_{h/2} \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}. \quad (1.2.19)$$

Вычисление приближенной оценки погрешности по формуле (1.2.19) при выполнении условия (1.2.17), т.е. при возможности представления значения интеграла I в виде (1.2.17), называется *правилом Рунге*.

Вычитая из умноженного на 2^k равенства (1.2.18) равенство (1.2.17), получаем

$$I \cdot (2^k - 1) = 2^k \cdot I_{h/2} - I_h + O(h^{k+2}).$$

Отсюда $I = I_h^* + O(h^{k+2})$, где

$$I_h^* = \frac{2^k \cdot I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}.$$

Число I_h^* называется *уточненным по Ричардсону приближенным значением* интеграла I .

1.3. Задание

Для предложенного варианта лабораторной работы интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

вычислите:

- 1) аналитически,
- 2) численно с точностью до $\varepsilon = 0.0001$:
 - по формуле средних прямоугольников,
 - по формуле трапеций,
 - по формуле Симпсона.

Точность вычислений определяется с помощью правила Рунге. Точность ε , с которой необходимо найти приближенное значение интеграла, считается достигнутой, когда в процессе вычислений будет выполнено неравенство

$$\frac{|I_{h/2} - I_h|}{2^k - 1} < \varepsilon.$$

Алгоритм вычислений с использованием правила Рунге. Приближенное вычисление интеграла с заданной точностью ε проводим *методом итераций*. На l -той итерации вычисляем значение $I_l = I_h$ интеграла I по одной из трех требуемых составных формул приближенного вычисления интегралов с шагом h_l , затем находим значение $I_{l+1} = I_{h/2}$ по той же составной формуле, но с шагом $h_{l+1} = h_l/2$. Если для найденных значений I_l и I_{l+1} выполняется неравенство

$$\frac{|I_{l+1} - I_l|}{2^k - 1} < \varepsilon, \quad (1.3.1)$$

то точность считается достигнутой. В противном случае проводим следующую итерацию: I_l присваиваем значение I_{l+1} , увеличиваем в два раза число разбиений n , находим новое значение I_{l+1} и опять проверяем выполнение условия (1.3.1).

При вычислении начального приближения I_0 (для $l = 0$) в качестве шага h_0 можно взять значение $h_0 \approx \sqrt[k]{\varepsilon}$. Однако, при этом, соответствующее значению h_0 первоначальное число разбиений n_0 , если его определять по формуле $n_0 = (b - a)/h_0$, скорее всего окажется не целым числом. Число разбиений n по своему смыслу на каждой итерации l должно быть целым, поэтому вначале надо задавать число разбиений, а затем вычислять шаг, соответствующий данному числу разбиений. Это можно сделать следующим образом:

$$n_0 = \left[\frac{b - a}{\sqrt{\varepsilon}} \right] + 1, \quad h_0 = \frac{b - a}{n_0} \quad (1.3.2)$$

для формул средних прямоугольников и трапеции;

$$n_0 = \left[\frac{b - a}{2\sqrt[4]{\varepsilon}} \right] + 1, \quad h_0 = \frac{b - a}{2n_0} \quad (1.3.3)$$

для формулы Симпсона.

В этих формулах квадратные скобки $[]$ обозначают целую часть заключенного в них числа.

- 3) дайте оценку сверху погрешности вычислений, используя формулы, выражающие R_n через соответствующие производные подынтегральной функции;
- 4) оцените погрешность как разность между точным значением интеграла и значением, полученным численным методом;
- 5) сравните между собой погрешности, полученные в п.п. 3 и 4;

- 6) оформите отчет по лабораторной работе. Отчет должен содержать описание использованного метода, результаты и текст программы.

Варианты лабораторной работы и ответы представлены в таблице 1.2.

Таблица 1.1. Координаты узловых точек и весовые коэффициенты квадратурной формулы Гаусса

Число узлов n	Номер точки i	Координата точки x_i	Коэффициент q_i
1	1	0	2
2	1	$x_1 = -x_2$	1
	2	0.5773502692	1
3	1	$x_1 = -x_3$	$q_1 = q_3$
	2	0	0.8888888889
	3	0.7745966692	0.5555555556
4	1	$x_1 = -x_4$	$q_1 = q_4$
	2	$x_2 = -x_3$	$q_2 = q_3$
	3	0.3399810436	0.6521451549
	4	0.8611363116	0.3478548451
5	1	$x_1 = -x_5$	$q_1 = q_5$
	2	$x_2 = -x_4$	$q_2 = q_3$
	3	0	0.5688888889
	4	0.5384693101	0.4786286705
	5	0.9061798459	0.2369268851

Таблица 1.2. Варианты лабораторной работы

№ вар.	a	b	Функция $f(x)$	Ответ
1	2	3	4	5
1	0	1	$e^x + 1$	e
2	0	1	$2^x + 1/\ln 2$	$2/\ln 2$
3	0	1	$3^x + 1/\ln 3$	$3/\ln 3$
4	0.1	$0.1 \cdot e$	$\ln(10 \cdot x)$	0.1
5	0.2	$0.2 \cdot e$	$\ln(5 \cdot x)$	0.2
6	1	2	$e^x + 1/x$	$e(e - 1) + \ln 2$
7	0	1	$x \cdot e^x$	1
8	1	e	$x^2 + 16/x$	$(e^3 - 1)/3 + 16$
9	0	1	$2x - e^{-x}$	$1/e$
10	1	2	$2x + 1/x$	$3 + \ln 2$
11	1	2	$3x^2 + 1/x$	$7 + \ln 2$
12	0	1	$4x^3 - e^{-x}$	$1/e$
13	0	1	$2x + e^x$	e
14	0	1	$1/(1 + x^2)$	$\pi/4$
15	0	1	$1 - 2xe^{-x^2}$	$1/e$

Окончание таблицы 1.2.

1	2	3	4	5
16	0	1	$2xe^{x^2}$	$e - 1$
17	0	1	$1 - xe^{-x}$	$2/e$
18	1	e	$\ln^2 x/x$	$1/3$
19	0	1	$x/(1 + x^4)$	$\pi/8$
20	1	2	$e^{1/x}/x^2$	$e - \sqrt{e}$
21	$\ln 2$	$2 \ln 2$	$1/(e^x - 1)$	$\ln(3/2)$
22	0	$\pi/2$	$\cos^3 x \cdot \sin(2x)$	$2/5$
23	0	$\pi/2$	$(x + \sin x)/(1 + \cos x)$	$\pi/2$
24	1	2	$1/(x + x^2)$	$\ln(4/3)$
25	0	$\pi/2$	$e^x \cdot \cos x$	$(e^{\pi/2} - 1)/2$
26	0	1	e^{x+e^x}	$e^e - e$
27	0.5	$0.5 \cdot e$	$\ln(2x)$	$1/2$
28	0	1	4^x	$1/\ln 4$
29	0	1	$5^x + 1/\ln 5$	$5/\ln 5$
30	0	1	$10^x + 1/\ln 10$	$10/\ln 10$

Глава 2

Приближенное вычисление двойного интеграла

Цель работы — изучение и применение численных методов для приближенного вычисления двойного интеграла.

Продолжительность работы — 2–4 час.

2.1. Постановка задачи

Требуется вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (2.1.1)$$

где $f(x, y)$ — непрерывная в области D функция двух переменных x и y .

На практике редко удастся выразить интеграл через элементарные функции и найти его точное значение. Поэтому обычно для вычисления интегралов применяются методы численного интегрирования. Они основаны на замене подынтегральной функции $f(x, y)$ аппроксимирующими ее функциями, интегралы от которых легко вычисляются в элементарных функциях. В качестве аппроксимирующих функций, например, можно использовать многочлены.

2.2. Численные методы вычисления двойного интеграла

Рассмотрим два способа численного интегрирования: метод ячеек и последовательное интегрирование.

2.2.1. Метод ячеек

Пусть сначала область интегрирования является прямоугольником $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Среднее значение $\bar{f}(x, y)$ непрерывной в области D функции $f(x, y)$ по теореме о среднем представляется выражением

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dx dy, \quad S = (b - a) \cdot (d - c). \quad (2.2.1)$$

Считая, что среднее значение приближенно равняется значению функции в центре прямоугольника: $\bar{f}(x, y) \approx f(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{x} = (a + b)/2$, $\bar{y} = (c + d)/2$; из соотношения (2.1.1) получаем простейшую формулу для приближенного вычисления двойного интеграла

$$\iint_D f(x, y) dx dy \approx S \cdot f(\bar{x}, \bar{y}). \quad (2.2.2)$$

Найдем погрешность формулы (2.2.2). Функцию $f(x, y)$ будем считать достаточно гладкой, т.е. будем полагать, что она имеет все необходимые по ходу рассуждения непрерывные производные. Разложим функцию $f(x, y)$ по формуле Тейлора, выбирая центр прямоугольника (точку $(\bar{x}, \bar{y})$) за точку разложения

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(\bar{x}, \bar{y}) + (x - \bar{x}) \cdot f'_x(\bar{x}, \bar{y}) + (y - \bar{y}) \cdot f'_y(\bar{x}, \bar{y}) + \\ & + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^2 \cdot f''_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + (x - \bar{x})(y - \bar{y}) \cdot f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) + \\ & + \frac{1}{2}(y - \bar{y})^2 \cdot f''_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) + \dots \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Погрешность есть разность точного и приближенного значений интеграла.

Глава 2. Приближенное вычисление двойного интеграла

Подставляя в (2.2.2) формулу (2.2.3), получим главный член погрешности

$$\begin{aligned} R &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy - S \cdot f(\bar{x}, \bar{y}) \approx \\ &\approx \frac{1}{24} \cdot S \cdot [(b-a)^2 \cdot f''_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + (d-c)^2 \cdot f''_{yy}(\bar{x}, \bar{y})], \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

где члены, отброшенные при замене точного равенства приближенным, содержат производные старших порядков и более высокие степени длин сторон прямоугольника D . Заметим, что все члены разложения, являющиеся нечетными функциями относительно центра прямоугольника, не вносят вклад в погрешность, поскольку интегралы от этих членов оказываются равными нулю.

В общем случае длины сторон прямоугольника $(b-a)$ и $(d-c)$ не малы, поэтому главный член погрешности (2.2.4) может быть велик. Для повышения точности вычислений в области D (рис. 2.1) вводится сетка $x_i = a + ih_1$, $y_j = a + jh_2$, $i = 0, 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n$; $h_1 = (b-a)/m$, $h_2 = (d-c)/n$ с достаточно мелкими ячейками $\Delta D_{ij} = \{x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$.

Вычисляя интеграл по каждой ячейке по формуле (2.2.2) и суммируя найденные значения по всем ячейкам, получаем формулу *метода ячеек*

$$I \approx I_h = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n S_{ij} \cdot f(\bar{x}_i, \bar{y}_j), \quad (2.2.5)$$

где $S_{ij} = h_1 \cdot h_2$ — площадь ячейки, $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, $\bar{y}_j = (y_{j-1} + y_j)/2$ — координаты центра ячейки. Здесь и далее пусть I_h будет приближенным значением интеграла (2.1.1), вычисленное по формуле (2.2.5) с шагами h_1 и h_2 .

Справа в выражении (2.2.5) стоит интегральная сумма, поэтому для любой непрерывной функции $f(x, y)$ эта сумма сходится к значению интеграла,

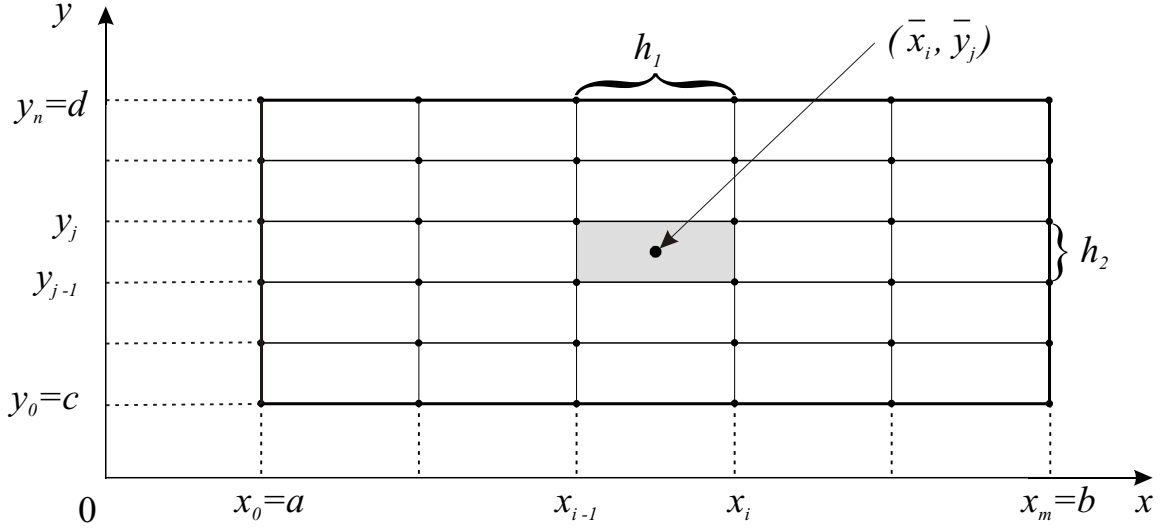


Рис. 2.1.

когда периметры всех ячеек стремятся к нулю.

Погрешность интегрирования (2.2.4) для одной ячейки ΔD_{ij} представляется в виде

$$R_{ij} \approx \frac{1}{24} S_{ij} [h_1^2 \cdot f''_{xx}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) + h_2^2 \cdot f''_{yy}(\bar{x}_i, \bar{y}_j)]. \quad (2.2.6)$$

Суммируя выражения (2.2.6) по всем ячейкам, получаем погрешность метода ячеек

$$R \approx c_1 \cdot h_1^2 + c_2 \cdot h_2^2, \quad (2.2.7)$$

где

$$c_1 = \frac{1}{24} \iint_D f''_{xx}(x, y) dx dy, \quad c_2 = \frac{1}{24} \iint_D f''_{yy}(x, y) dx dy$$

или

$$R = O(h_1^2 + h_2^2), \quad (2.2.8)$$

т.е. метод ячеек имеет второй порядок точности относительно шагов сетки h_1 и h_2 .

Глава 2. Приближенное вычисление двойного интеграла

Заметим, что поскольку в оценке (2.2.6) отброшены более высокие степени h_1 и h_2 , то соотношение для погрешности (2.2.7) является асимптотическим, т.е. выполняется при $h_1 \rightarrow 0$ и $h_2 \rightarrow 0$ с точностью до членов более высокого порядка малости по h_1 и h_2 .

Для вычисления интеграла (2.1.1) с заданной точностью можно воспользоваться, как это следует из (2.2.8), правилом Рунге практической оценки погрешности. С помощью разложения $f(x, y)$ в окрестности центра каждой ячейки по формуле Тейлора до членов с производными четвертого порядка можно получить оценку не только главного члена погрешности (2.2.8), но и оценить следующие по порядку малости h_1 и h_2 члены погрешности. Заметим, что члены в разложении $f(x, y)$ по формуле Тейлора, содержащие производные третьего порядка, в силу симметрии области интегрирования ΔD_{ij} относительно точки разложения не вносят вклад в погрешность интегрирования. Поэтому, для того чтобы учесть следующие после главного члена по порядку малости h_1 и h_2 члены погрешности, необходимо разлагать $f(x, y)$ до членов, содержащих производные четвертого порядка. В результате интеграл (2.1.1) можно представить в виде

$$I = I_h + c_1 \cdot h_1^2 + c_2 \cdot h_2^2 + O(h_1^4 + h_1^2 \cdot h_2^2 + h_2^4). \quad (2.2.9)$$

Выражения для c_1 и c_2 были приведены выше (см. формулу (2.2.7)). Здесь важно подчеркнуть, что c_1 и c_2 — не зависящие от h_1 и h_2 постоянные величины, причем они не должны одновременно обращаться в 0.

Таким образом, если известен главный член погрешности, то можно увеличить точность вычисления интеграла (2.1.1)

$$I \approx I_h + c_1 \cdot h_1^2 + c_2 \cdot h_2^2. \quad (2.2.10)$$

Однако постоянные c_1 и c_2 являются неизвестными величинами. Для то-

Глава 2. Приближенное вычисление двойного интеграла

го, чтобы вычислить интеграл (2.1.1) с учетом главного члена погрешности, можно поступить следующим образом. Сначала находим значение I_h , затем — значение $I_{h/2}$. Здесь $I_{h/2}$ — значение интеграла (2.1.1), вычисленное по формуле (2.2.5) с шагами $h_1/2$ и $h_2/2$. Теперь, наряду с выражением (2.2.10), можно написать соотношение

$$I \approx I_{h/2} + c_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + c_2 \cdot \left(\frac{h_2}{2}\right)^2. \quad (2.2.11)$$

Тот факт, что сетка по каждой переменной x и y сгущается в одинаковое число раз, позволяет в выражении (2.2.10) выделить главный член погрешности $[c_1 \cdot (h_1/2)^2 + c_2 \cdot (h_2/2)^2]$ формулы (2.2.11):

$$I \approx I_h + 4 \left[c_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + c_2 \cdot \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 \right]. \quad (2.2.12)$$

Из выражений (2.2.11) и (2.2.12) следует, что

$$I_h + 4 \left[c_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + c_2 \cdot \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 \right] \approx I_{h/2} + \left[c_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + c_2 \cdot \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 \right].$$

Из этого соотношения получаем выражение для главного члена погрешности формулы (2.2.11)

$$c_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + c_2 \cdot \left(\frac{h_2}{2}\right)^2 \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{3}. \quad (2.2.13)$$

Теперь, согласно формуле (2.2.11), имеем приближенную оценку погрешности по правилу Рунге

$$I - I_{h/2} \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{3}. \quad (2.2.14)$$

Наконец, подставляя выражение (2.2.13) в (2.2.11), получаем значение интеграла (2.1.1) с учетом главного члена погрешности, т.е.

$$I \approx I_h^* = \frac{4 \cdot I_{h/2} - I_h}{3},$$

Глава 2. Приближенное вычисление двойного интеграла

где I_h^* — уточненное по Ричардсону значение интеграла I .

Замечания. 1. Подчеркнем, что для практической оценки погрешности по правилу Рунге сетка по каждой переменной сгущается в одинаковое число раз, т.е. отношение m/n при сгущении сетки должно оставаться постоянным. В противном случае не удастся в результате двойного пересчета интеграла (2.1.1) по двум сеткам с разными размерами ячеек составить формулы типа (2.2.10) и (2.2.11), из которых можно найти главный член погрешности.

2. Понятно, что если одновременно $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$, то для оценки погрешности вычисления интеграла (2.1.1) правило Рунге в виде (2.2.14) неприменимо.

Мы получили формулу (2.2.5) для вычисления интеграла в простейшем случае — для прямоугольной области. Если область не прямоугольная, то в ряде случаев исходный интеграл по такой области соответствующей заменой переменных удобно преобразовать к двойному интегралу по прямоугольной области. Например, если область задана в виде криволинейного четырехугольника $D = \{a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ (рис. 2.2,а), то с помощью замены переменных $x = x(u) = (b - a)u + a$, $y = \varphi_1(x(u)) + v \cdot (\varphi_2(x(u)) - \varphi_1(x(u)))$ исходная область D преобразуется в квадратную область $D' = \{0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$ (рис. 2.2,б)

Напомним правило замены переменных в двойном интеграле. Если ограниченная замкнутая область D в плоскости Oxy взаимно однозначно отображается на область D' на плоскости Ouv с помощью непрерывно дифференцируемых функций $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, причем якобиан преобразования

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

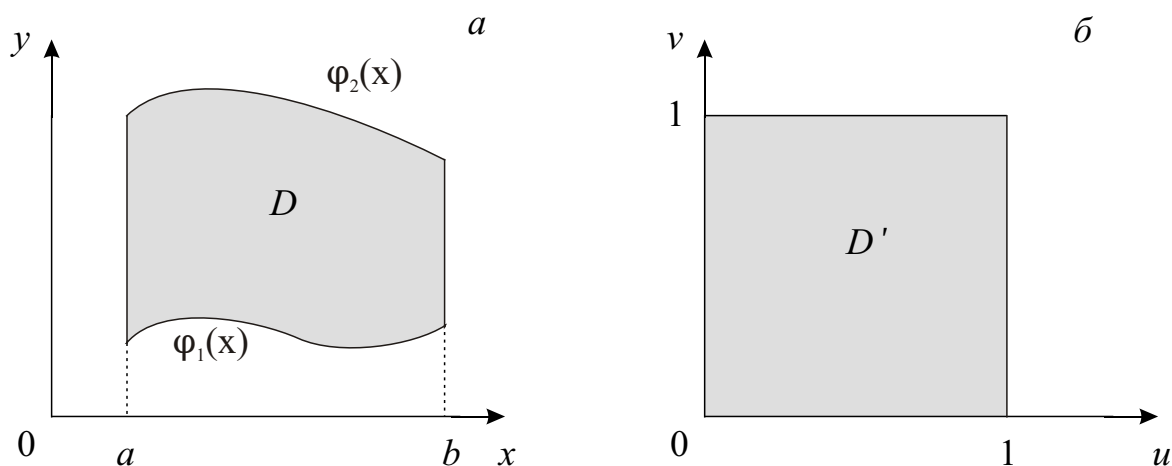


Рис. 2.2.

то справедлива формула

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv.$$

Методом ячеек можно вычислить интеграл и по области сложной формы, например, с криволинейной границей (рис. 2.3).

Интеграл в этом случае будем вычислять следующим образом. Наложим на область D прямоугольную сетку, и в интегральную сумму (2.2.5) будем включать только те ячейки, все точки которых принадлежат области D . В итоге на порядок понижается точность формулы (2.2.5), поэтому для вычисления интеграла с достаточной точностью требуется сетка с более мелкими ячейками.

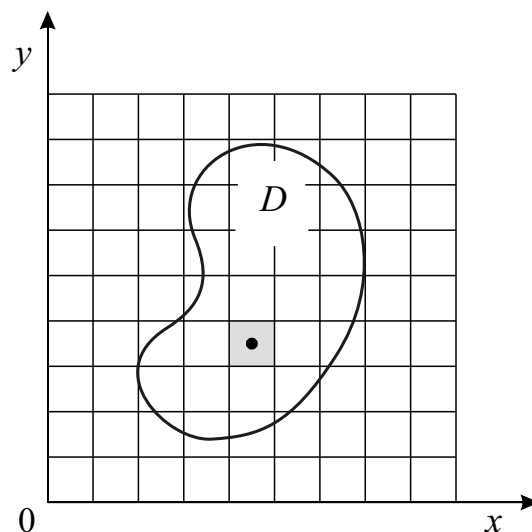


Рис. 2.3.

Следует отметить, что [метод ячеек \(2.2.5\)](#) легко переносится на большее число измерений (для вычисления тройных и большей кратности интегралов). В случае однократного интеграла аналогом метода ячеек является [метод средних прямоугольников \(1.2.6\)](#), рассмотренный в гл. 1.

2.2.2. Последовательное интегрирование с использованием формулы трапеций

Другой метод вычисления двойных интегралов — их сведение к последовательному вычислению однократных интегралов. Снова рассмотрим интеграл по прямоугольной области $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ (рис. 2.4). Интеграл (2.1.1) можно вычислить последовательным интегрированием

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (2.2.15)$$

Это выражение перепишем в виде

$$I = \int_c^d F(y) dy, \quad F(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (2.2.16)$$

Для вычисления этих интегралов могут быть использованы известные формулы из гл. 1. Например, пусть и по направлению x , и по направлению y для приближенного вычисления применяется [формула трапеций \(1.2.7\)](#). Тогда

$$F(y_j) \approx h_1 \cdot \sum_{i=0}^m q_{1,i} \cdot f(x_i, y_j), \quad (2.2.17)$$

где

$$q_{1,i} = \begin{cases} 1/2 & \text{при } i = 0 \text{ и } i = m, \\ 1 & \text{при } i = 1, 2, \dots, m-1. \end{cases}$$

и

$$I \approx h_2 \cdot \sum_{j=0}^n q_{2,j} \cdot F(y_j), \quad (2.2.18)$$

где

$$q_{2,j} = \begin{cases} 1/2 & \text{при } j = 0 \text{ и } j = n, \\ 1 & \text{при } j = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

Подставляя выражение (2.2.17) в (2.2.18), получаем формулу последовательного интегрирования

$$I \approx I_h = h_1 \cdot h_2 \cdot \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n q_{ij} \cdot f(x_i, y_j), \quad (2.2.19)$$

где

$$q_{ij} = q_{1,i} \cdot q_{2,j} = \begin{cases} 1/4 & \text{при } i = 0, m; \ j = 0, n; \\ 1/2 & \text{при } \begin{cases} i = 0 \text{ и } i = m, \ j = 1, \dots, n-1, \\ j = 0 \text{ и } j = n, \ i = 1, \dots, m-1; \end{cases} \\ 1 & \text{при } i = 1, \dots, m-1, \ j = 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

На рис. 2.4 приведена сетка, которая используется при приближенном вычислении интеграла (2.1.1) по формуле (2.2.19). Точками, кружочками и квадратиками показаны узловые точки, в которых коэффициенты $q_{ij} = 1, 1/2$ и $1/4$, соответственно.

Легко убедиться в том, что для дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x, y)$ формула (2.2.19) имеет второй порядок точности относительно шагов h_1 и h_2 и что можно применить правило Рунге практической оценки погрешности.

Замечание. Если в методе последовательного интегрирования воспользуемся формулой средних прямоугольников при интегрировании по каждому из направлений x и y , то в результате получим расчетную формулу метода ячеек (2.2.5).

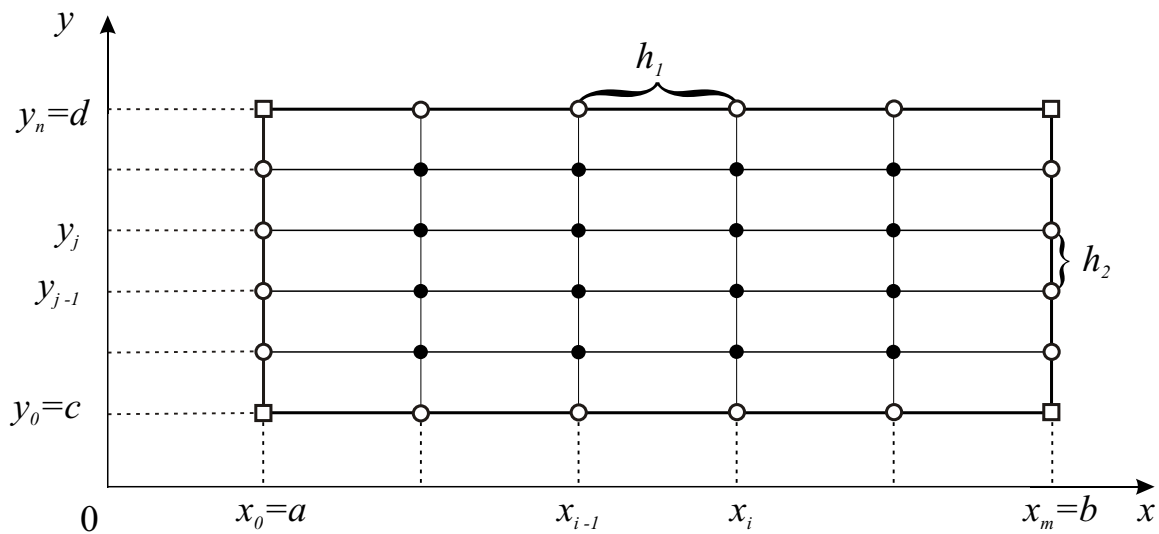


Рис. 2.4.

Случай сложной области. Метод последовательного интегрирования можно непосредственно применять и к области произвольной формы, например с криволинейной границей (см. рис. 2.3). Однако для получения простых расчетных формул на практике всегда стараются свести исходный интеграл к сумме интегралов по прямоугольным областям.

2.2.3. Последовательное интегрирование с использованием квадратурных формул Гаусса

Для получения квадратурной формулы более высокой точности, чем формулы (2.2.19) можно воспользоваться квадратурными формулами Гаусса. При этом предварительно заменой переменных $x(u) = (a+b)/2 + u \cdot (b-a)/2$, $y(v) = (c+d)/2 + v \cdot (d-c)/2$ прямоугольная область $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ преобразуется в квадратную область $D = \{-1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\}$. Поэтому будем считать, что с самого начала требуется вычислить интеграл по

области $D = \{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy. \quad (2.2.20)$$

Применяя для интегрирования (2.2.20) и по направлению x , и по направлению y квадратурную формулу Гаусса с *одинаковым* числом узлов, получаем следующую формулу последовательного интегрирования

$$I_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i \cdot q_j \cdot f(x_i, y_j). \quad (2.2.21)$$

Значения координат узловых точек и весовых коэффициентов по направлениям x и y берутся из табл. 1.1. Расположение узловых точек для $n = 3$ и $n = 4$ проиллюстрировано на рис. 2.5,а и рис. 2.5,б, соответственно:

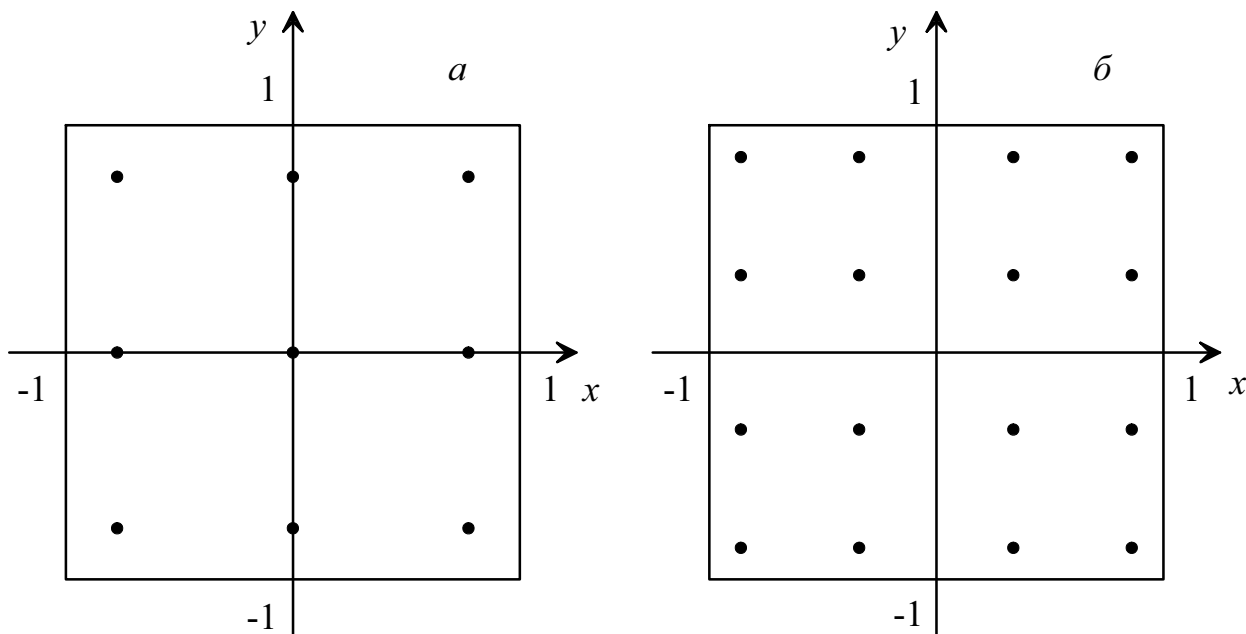


Рис. 2.5.

2.3. Задание

Для предложенного варианта лабораторной работы вычислите двойной интеграл по области D , где D — криволинейный четырехугольник $\{a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Интегралы вычислите:

- 1) аналитически,
- 2) численно с точностью до $\varepsilon = 0.0001$:
 - методом ячеек,
 - последовательным интегрированием с использованием формулы трапеций для интегрирования по направлениям x и y .

При численном решении область D предварительно отобразите в квадрат D' (см. [рис. 2.2](#)). Для оценки погрешности воспользуйтесь правилом Рунге.

Оформите отчет. Он должен содержать: постановку задачи и описание методов ее решения, текст программы, результаты расчетов.

Указание. Результаты расчетов вывести на печать с пятью значащими цифрами после запятой. На основе сравнения приближенных значений интеграла, вычисленных методом ячеек и последовательным интегрированием, с точным убедиться в том, что приближенные значения вычислены с заданной точностью. На печать вывести значения числа итераций l , шагов h_1 и h_2 , а также чисел разбиений m и n , позволившие достигнуть заданной точности вычисления: а) методом ячеек, б) последовательным интегрированием.

Варианты лабораторной работы и ответы представлены в табл. [2.1](#) и [2.2](#)

Таблица 2.1. Варианты лабораторной работы

№ вар.	Область D				Функция
	a	b	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$f(x)$
1	2	3	4	5	6
1	0	1	x^2	$1 + x$	$x \cdot y^2$
2	1	2	0	$1 + \ln x$	e^y
3	0	$\pi/3$	0	$\cos x$	$\sin x / (1 + y)$
4	1	e	$x - 2$	$\ln x$	y/x
5	1	2	0	x	$x^2 \cdot \sqrt{1 + x \cdot y}$
6	0	1	x^2	$1 + x$	$x^2 \cdot y$
7	1	2	$\ln x$	$1 + \ln x$	e^y
8	$\pi/6$	$\pi/2$	0	$\sin x$	$\cos x / (1 + y)$
9	1	2	x	$2x$	$x \cdot \ln(x \cdot y)$
10	1	e	$\ln x$	x	y/x
11	1	2	0	$3 - x$	$x + y^2$
12	1	2	$\ln x$	$1 + \ln x$	e^{x+y}
13	0	$\pi/3$	0	$1/\cos x$	$y \cdot \operatorname{tg} x$
14	1	2	0	x	$4x^2 \cdot \ln(1 + x \cdot y)$
15	1	2	0	$\sqrt{x}$	$2x^2 \cdot y \cdot \sqrt{1 + x \cdot y^2}$

Окончание таблицы 2.1.

1	2	3	4	5	6
16	0	1	0	$1 + x$	$-x + y^2$
17	0	1	$\ln(1 + x)$	$1 + 2 \ln(1 + x)$	$e^{x+y}/(1 + x)$
18	$\pi/6$	$\pi/2$	0	$1/\sin x$	$y \cdot \operatorname{ctg} x$
19	1	3	x	$2x$	$\ln(y/x)$
20	1	2	0	$1/x$	$x \cdot \sqrt{1 + x \cdot y}$
21	0	1	0	$1 + x$	$x + y^2$
22	$1/4$	1	0	$\sqrt{x}$	$x \cdot \sqrt{x} \cdot e^{xy}$
23	0	1	0	e^x	$(x + x^2)e^x \cos\left(\frac{\pi}{3e}xy\right)$
24	1	2	$1 - x$	x	$\ln(x + y)/x$
25	1	$\sqrt{3}$	0	x^2	$1/[(1 + x^2)(1 + y) \cdot \sqrt{y}]$
26	1	2	$x/2$	x	$x/(x^2 + y^2)$
27	1	2	x	$2x^2$	$2e^{y/x}$
28	$\pi/3$	$\pi/2$	0	x	$\cos(x + y)$
29	1	2	0	$\sqrt{x}$	$8x^2y \ln(1 + x \cdot y^2)$
30	1	3	0	x	$1/\sqrt{1 + e^{2y/x}}$

Таблица 2.2. Ответы лабораторной работы

№ вар.	Ответ	№ вар.	Ответ
1	$93/120$	16	$5/12$
2	$3e/2 - 1$	17	$e^2 - e + 1$
3	$2 \ln 2 - 1.5 \ln(1.5) - 0.5$	18	0.75
4	$(-3e^2 + 24e - 43)/12$	19	$4 \cdot (2 \ln 2 - 1)$
5	$\frac{10\sqrt{5}}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{15} - 1$	20	$[2 \cdot (2\sqrt{2} - 1)]/3$
6	$187/420$	21	$2\frac{1}{12}$
7	$1.5 \cdot (e - 1)$	22	$[2 \cdot (e - e^{1/8} - 7/8)]/3$
8	$2 \ln 2 - 1.5 \ln(1.5) - 0.5$	23	$(9 \cdot e^2)/(2 \cdot \pi^2)$
9	$10 \ln 2 - 3\frac{8}{9}$	24	$7 \ln 2 - 4$
10	$(3e^2 - 5)/12$	25	$(7\pi^2)/144$
11	$3\frac{5}{12}$	26	$\pi/4 - \operatorname{arctg}(1/2)$
12	$e^2(e - 1)$	27	$e \cdot (3e^3 - e - 6)/2$
13	0.75	28	-0.25
14	$25 \ln 5 - 4 \ln 2 - 25.5$	29	$25 \ln 5 - 4 \ln 2 - 25.5$
15	$\frac{10\sqrt{5}}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{15} - 1$	30	$4 \cdot \ln \left(\frac{(1 + \sqrt{2})e}{1 + \sqrt{1 + e^2}} \right)$

Глава 3

Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель работы — изучение численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений, а также практическое применение методов Рунге—Кутты для решения задачи Коши в случае одного уравнения и системы двух уравнений.

Продолжительность работы — 4 часа.

3.1. Постановка задачи

Требуется найти решение $u(x)$ задачи Коши

$$u' = f(x, u), \quad u(x_0) = u_0, \quad (3.1.1)$$

где $u' = du/dx$, x_0 и u_0 — заданные числа.

Из курса дифференциальных уравнений известно, что если функция $f(x, u)$ непрерывна в замкнутой прямоугольной области $G = \{|x - x_0| \leq A, |u - u_0| \leq B\}$ и удовлетворяет в этой области условию Липшица по аргументу u , то можно указать отрезок $|x - x_0| \leq \delta$, на котором задача Коши (3.1.1) имеет единственное решение. Если вдобавок функция $f(x, u)$ имеет непрерывные производные по обоим аргументам до k -ого порядка включительно, то решение $u(x)$ имеет непрерывные производные до $(k + 1)$ -ого порядка включительно. В ряде случаев задача Коши может быть решена аналитически, однако для большинства задач, представляющих практический интерес, такое решение найти невозможно. Поэтому, когда подобная задача встречается

на практике, получают приближенное решение с помощью численных методов, в частности конечно-разностных методов.

3.2. Численные методы решения задачи Коши

При изучении численных методов для задачи Коши будем считать, что она имеет единственное решение в замкнутой прямоугольной области $D = \{a \leq x \leq b, c \leq u \leq d\}$. Пусть требуется найти решение задачи (3.1.1) на отрезке $[a, b]$. Введем на отрезке $[a, b]$ сетку ω_{h_i} следующим образом:

$$\omega_{h_i} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\},$$

где точки $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ называются узловыми точками или узлами сетки, $h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, n$ — шагами сетки; n — натуральное число. Если $h_i = h = \text{const}$, то такую сетку будем обозначать ω_h и называть *равномерной*. Сетку ω_h можно задать так:

$$\omega_h = \{x_i = x_0 + i \cdot h, \quad x_0 = a, \quad h = (b - a)/n, \quad i = 0, 1, \dots, n\}. \quad (3.2.1)$$

В этой главе в дальнейшем будем пользоваться равномерной сеткой ω_h с шагом h .

Пусть $u_i = u(x_i)$ — значение точного решения (3.1.1) в точке x_i , а y_i — соответствующее приближенное значение, полученное с помощью рассматриваемого численного метода.

3.2.1. Явный метод Эйлера

Предположим, что функция $f(x, u)$ в рассматриваемой области D имеет непрерывные частные производные $\partial f / \partial x$ и $\partial f / \partial u$. В таком случае, как

Глава 3. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

отмечалось [выше](#), решение задачи Коши (3.1.1) имеет непрерывную вторую производную

$$u''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u)f(x, u). \quad (3.2.2)$$

Явный метод Эйлера определяется формулами

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.2.3)$$

где $y_0 = u_0$.

Соотношения (3.2.3) метода Эйлера получаются следующим образом.

Функцию $u(x)$ разлагаем по формуле Тейлора в окрестности точки x_i :

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i) + h \cdot u'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(\xi_i) = \\ &= u(x_i) + h \cdot f(x_i, u(x_i)) + \frac{h^2}{2}u''(\xi_i), \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

где точка $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Затем отбрасываем остаточный член и заменяем значения $u(x_i)$ на y_i .

На рис. 3.1 дана геометрическая интерпретация метода Эйлера. Изображены первые два шага метода, т.е. проиллюстрировано вычисление значений y_1 и y_2 при $x = x_1$ и $x = x_2$. Интегральные кривые a_0 , a_1 и a_2 описывают точные решения уравнения $u' = f(x, u)$ с начальными условиями $u(x_0) = u_0 = y_0$,

$u(x_1) = y_1$ и $u(x_2) = y_2$, соответственно. При этом кривая a_0 соответствует точному решению задачи Коши (3.1.1), так как она проходит через начальную

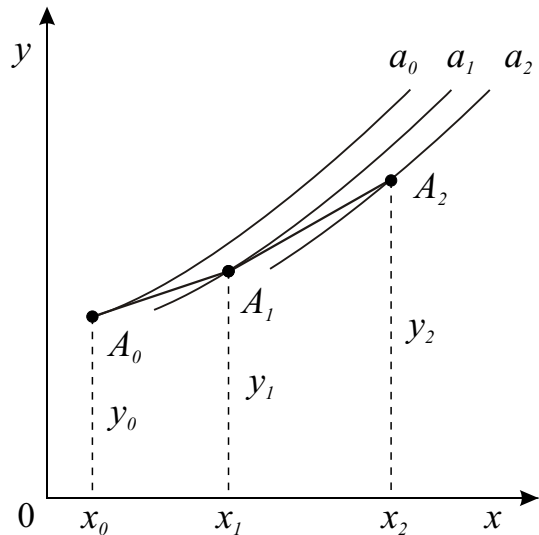


Рис. 3.1.

Глава 3. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

точку $A_0(x_0, u_0)$. Точки A_1 и A_2 получены в результате численного решения задачи Коши методом Эйлера. Их отклонение от кривой a_0 характеризует погрешность метода. Уже при выполнении первого шага мы фактически сразу попадаем на другую интегральную кривую. Отрезок A_0A_1 — отрезок касательной к кривой a_0 в точке A_0 . Тангенс угла наклона касательной A_0A_1 равен значению производной $u'_0 = f(x_0, u_0)$. Касательная A_1A_2 проводится уже к другой интегральной кривой a_1 . Таким образом, погрешность метода Эйлера приводит к тому, что на очередном шаге решение переходит на другую интегральную кривую.

Пример. Явным методом Эйлера решить задачу

$$u' = u - x, \quad u(0) = -1.$$

Решение. Используя формулу (3.2.3), получаем

$$y_0 = -1,$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot (y_0 - x_0) = -1 - h,$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot (y_1 - x_1) = -1 - h + h \cdot (-1 - h - h) = -1 - 2h - 2h^2,$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot (y_2 - x_2) = -1 - 3h - 6h^2 - 2h^3$$

и т.д. С другой стороны, точным решением является функция $u(x) = 1 + x - 2e^x$. Сравним точное решение с полученным приближенным:

$$\begin{aligned} u_1 = u(h) &= 1 + h - 2e^h = 1 + h - 2 \cdot \left(1 + h + \frac{h^2}{2}e^{\xi_1}\right) = \\ &= -1 - h - h^2 \cdot e^{\xi_1}, \quad 0 < \xi_1 < h; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 = u(2h) &= 1 + 2h - 2e^{2h} = 1 + 2h - 2 \cdot \left(1 + 2h + \frac{4h^2}{2}e^{\xi_2}\right) = \\ &= -1 - 2h - 4h^2 \cdot e^{\xi_2}, \quad 0 < \xi_2 < 2h. \end{aligned}$$

Аналогично

$$u_3 = u(3h) = -1 - 3h - 9h^2 \cdot e^{\xi_3}, \quad 0 < \xi_3 < 3h.$$

Глава 3. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Видно, что численное решение отличается от точного на величину, содержащую члены второго порядка h^2 и выше, с коэффициентами, растущими с номером i . Ниже покажем, что ошибка в методе Эйлера всегда не превышает значения $C \cdot h$, где C — постоянная, не зависящая от h .

Вообще главный вопрос для любого численного метода состоит в оценке точности приближенных значений y_i .

Определение 1. Локальной ошибкой вычислений при $x = x_i$ называется величина

$$\varepsilon_i = |u(x_i) - y_i|.$$

Эта ошибка зависит от приближенного метода, использованного при подсчете y_i , от функции $f(x, u)$ и точности вычислений. Поэтому говорят, что локальная ошибка зависит от методической ошибки $\varepsilon_i^{(m)}$ (т.е. от ошибки вычислений, связанной с методом нахождения приближенного решения) и ошибки округления (на практике все значения, полученные в результате вычислений, берутся с конечным числом знаков). Ошибку округления можно уменьшить, повышая точность арифметических вычислений, а методическая ошибка не зависит от точности вычислений, и поэтому за счет повышения точности вычислений ее устранить нельзя. Иными словами, методическая ошибка совпадает с локальной ошибкой для абсолютно точно найденных значений y_i .

Определение 2. Глобальной методической ошибкой на отрезке $[a, b]$ называется величина

$$\varepsilon^{(m)} = \max_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i^{(m)}.$$

Для использования на практике пригодны лишь те методы численного решения, для которых

$$\varepsilon^{(m)} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Глава 3. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Определение 3. Численный метод решения задачи (3.1.1) называется методом k -ого порядка точности, если

$$\varepsilon^{(m)} = O(h^k) \text{ при } h \rightarrow 0,$$

или иначе

$$\varepsilon^{(m)} \leq C \cdot h^k \text{ при } h \rightarrow 0, \quad (3.2.5)$$

где $C = \text{const} > 0$ зависит от $f(x, u)$, a , b и численного метода решения задачи (3.1.1), но не зависит от h .

Покажем, что метод Эйлера является методом первого порядка точности. Будем полагать, что арифметические вычисления проводятся точно и поэтому локальная и методическая ошибки совпадают. Докажем следующее утверждение.

Лемма. Пусть при любом $i = 0, 1, \dots, n - 1$ справедлива оценка

$$\varepsilon_{i+1} \leq (1 + c_1 \cdot h)\varepsilon_i + c_2 \cdot h^{k+1}, \quad (3.2.6)$$

где $h = (b - a)/n$; $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ — постоянные, не зависящие от h . Тогда соответствующий метод численного интегрирования задачи (3.1.1) является методом k -ого порядка точности.

Доказательство. В соответствии с определением надо доказать оценку (3.2.5). Заметим, что

$$\varepsilon_0 = |u(x_0) - y_0| = |u(x_0) - u_0| = 0.$$

Глава 3. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Из оценки (3.2.6) имеем

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{i+1} &\leq (1 + c_1 \cdot h)\varepsilon_i + c_2 \cdot h^{k+1} \leq \\
 &\leq (1 + c_1 \cdot h) \cdot [(1 + c_1 \cdot h)\varepsilon_{i-1} + c_2 \cdot h^{k+1}] + c_2 \cdot h^{k+1} = \\
 &= (1 + c_1 \cdot h)^2 \cdot \varepsilon_{i-1} + c_2 \cdot h^{k+1} \cdot [1 + (1 + c_1 \cdot h)] \leq \\
 &\leq \dots \leq \\
 &\leq (1 + c_1 \cdot h)^{i+1} \cdot \varepsilon_0 + c_2 \cdot h^{k+1} \cdot [1 + (1 + c_1 \cdot h) + \dots + (1 + c_1 \cdot h)^i] = \\
 &= c_2 \cdot h^{k+1} \cdot \frac{(1 + c_1 \cdot h)^{i+1} - 1}{(1 + c_1 \cdot h) - 1}.
 \end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned}
 (1 + c_1 \cdot h)^{i+1} &= \exp\{(i + 1) \cdot \ln(1 + c_1 \cdot h)\} \leq \exp\{(i + 1) \cdot c_1 \cdot h\} = \\
 &= \exp\left\{c_1 \cdot \frac{b - a}{n} \cdot (i + 1)\right\} \leq e^{c_1 \cdot (b - a)}.
 \end{aligned}$$

С помощью этого последнего неравенства из предыдущей цепочки неравенств следует оценка

$$\varepsilon_{i+1} \leq \frac{[c_2 \cdot (e^{c_1 \cdot (b - a)} - 1)]}{c_1} \cdot h^k,$$

выполняющаяся для всех $i = 0, 1, \dots, (n - 1)$. Сравнивая последнее неравенство с неравенством (3.2.5) и полагая $C = [c_2 \cdot (e^{c_1 \cdot (b - a)} - 1)]/c_1$, убеждаемся в справедливости леммы.

Теперь, в соответствии с леммой, чтобы доказать, что метод Эйлера является методом первого порядка точности, достаточно проверить неравенство

$$\varepsilon_{i+1} \leq (1 + c_1 \cdot h)\varepsilon_i + c_2 \cdot h^{k+1},$$

при всех $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Вычитая (3.2.3) из равенств (3.2.4), получаем

$$u_{i+1} - y_{i+1} = u_i - y_i + h \cdot [f(x_i, u(x_i)) - f(x_i, y_i)] + \frac{h^2}{2} u''(\xi_i). \quad (3.2.7)$$

Глава 3. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

По теореме Лагранжа о конечном приращении функции имеем

$$f(x_i, u(x_i)) - f(x_i, y_i) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_i, \eta_i) \cdot (u_i - y_i),$$

где точка η_i лежит между точками u_i и y_i .

С помощью последнего равенства из соотношения (3.2.7) находим оценку

$$\varepsilon_{i+1} \leq \varepsilon_i + h \cdot c_1 \cdot \varepsilon_i + c_2 \cdot h^2 = \varepsilon_i \cdot (1 + c_1 h) + c_2 \cdot h^2,$$

где $c_1 = \max_{(x,u) \in D} |f'_u(x, u)|$, $c_2 = 0.5 \cdot \max_{(x,u) \in D} (|f'_x(x, u)| + |f'_u(x, u)| \cdot |f(x, u)|)$ (см. формулу (3.2.2)).

Таким образом, доказано, что явный метод Эйлера имеет первый порядок точности.

3.2.2. Методы Рунге-Кутты

Рассмотрим теперь методы, погрешность которых при стремлении h к нулю убывает с более высокой скоростью.

Метод Рунге-Кутты второго порядка точности. Его расчетные формулы:

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_i, y_i), \\ k_2 &= h \cdot f(x_i + h, y_i + k_1), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2} \cdot (k_1 + k_2), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Вычисления с помощью этого метода проводятся по формулам:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h \cdot f(x_i, y_i), \\
 k_2 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \\
 k_3 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \\
 k_4 &= h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3), \\
 y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.
 \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Мы рассмотрели методы, для которых при вычислении y_{i+1} нужно знать лишь значение y_i , а значения приближенного решения в предшествующих точках не входят в расчетные формулы. Иными словами, одношаговые методы — это методы с «короткой памятью». Если «память метода» лучше, то его называют многошаговым. Более точно, метод численного интегрирования задачи называется l -шаговым, если при вычислении значения y_{i+1} используются l величин $y_{i-l+1}, y_{i-l+2}, \dots, y_i$.

3.2.3. Многошаговые методы Адамса

Из (3.1.1) следует, что

$$u(x_{i+1}) - u(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x)) dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx,$$

где $p(x)$ — полином, аппроксимирующий $f(x, u(x))$. Пусть $f_i = f(x_i, y_i)$, где y_i — приближенное решение задачи (3.1.1), и в качестве $p(x)$ возьмем интерполяционный полином, проходящий через l ранее найденных точек (x_j, f_j) ($j = (i-l+1), (i-l+2), (i-l+3), \dots, i$), включая текущую точку (x_i, f_i) .

Если $l = 1$, то имеем явный [метод Эйлера \(3.2.3\)](#). Если $l = 2$, то $p(x)$ — линейная функция (рис. 3.2,а), проходящая через две точки (x_{i-1}, f_{i-1}) и (x_i, f_i) :

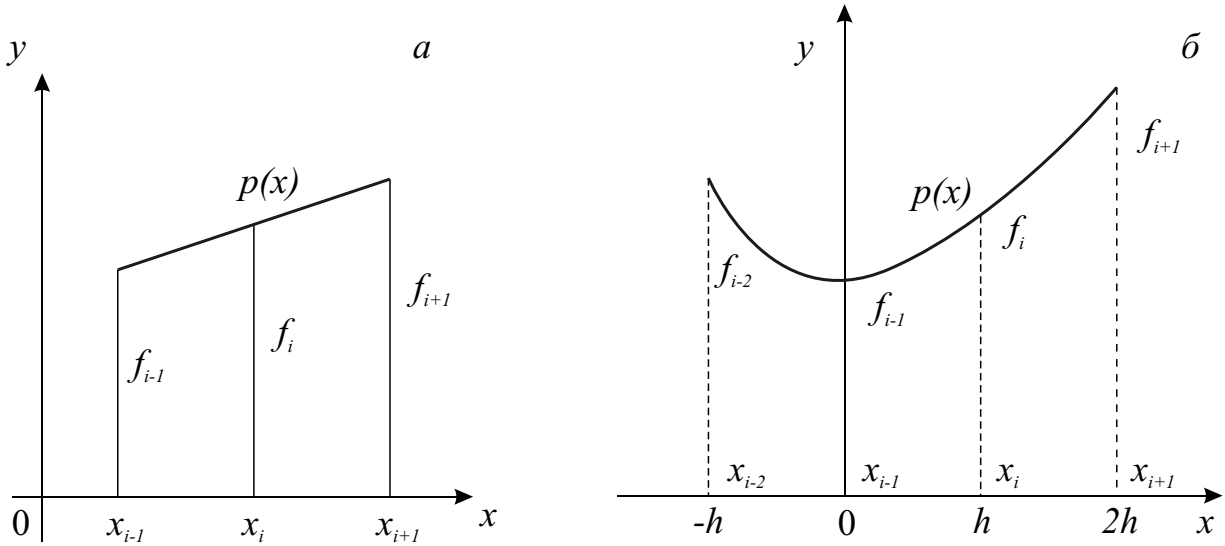


Рис. 3.2.

$$p(x) = \frac{(x_i - x)}{h} \cdot f_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})}{h} \cdot f_i, \quad p(x_{i-1}) = f_{i-1}, \quad p(x_i) = f_i.$$

Интегрируя полином от x_i до x_{i+1} , получаем двухшаговый метод Адамса второго порядка точности (он также называется методом Адамса-Башфорта):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (3f_i - f_{i-1}). \quad (3.2.10)$$

Если $l = 3$, то $p(x)$ — парабола, проходящая через точки (x_{i-2}, f_{i-2}) , (x_{i-1}, f_{i-1}) и (x_i, f_i) (рис. 3.2,б), а соответствующий трехшаговый метод Адамса третьего порядка точности имеет вид

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} \cdot (23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}). \quad (3.2.11)$$

Формулу (3.2.11) легко получить, если перейти к новой системе координат,

Глава 3. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

в которой координата x точки x_{i-1} равна нулю (см. рис. 3.2,б). Тогда

$$\begin{aligned}p(x) &= ax^2 + bx + c; \\p(-h) &= ah^2 - bh + c = f_{i-2}, \\p(0) &= c = f_{i-1}, \\p(h) &= ah^2 + bh + c = f_i.\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$p(x) = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{2h^2} \cdot x^2 + \frac{f_i - f_{i-2}}{2h} \cdot x + f_{i-1}. \quad (3.2.12)$$

Интегрируя выражение (3.2.12) на отрезке $[h, 2h]$, получим формулу (3.2.11).

Если $l = 4$ то интерполяционный многочлен является кубическим и мы получаем формулу Адамса четвертого порядка точности

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \cdot (55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}). \quad (3.2.13)$$

Многошаговые методы требуют в начале работы знания значений в первых l точках: $y_0, y_1, \dots, y_{l-1}$. Мы не можем использовать, например, формулу (3.2.13) при $i < 3$. Выход из положения состоит в применении какого-либо одношагового метода того же порядка точности, например метода Рунге-Кутты, до тех пор, пока не будет получено достаточное количество значений для проведения расчетов с помощью многошагового метода.

Замечание. Наряду с рассмотренными явными методами существуют и неявные методы интегрирования дифференциальных уравнений. Приведем два таких метода.

Неявный метод Эйлера. Это метод первого порядка точности. Его расчетная формула:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.2.14)$$

Чтобы найти y_{i+1} надо решить это уравнение (может быть нелинейное) относительно этой переменной.

Метод трапеций. Это метод второго порядка точности. Значения y_{i+1} находятся в результате решения уравнений

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.2.15)$$

3.2.4. Правило Рунге практической оценки погрешности

Это правило (см. гл. 1 и 2) применимо для практической оценки погрешности и при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $y_i^{(h)}$ — значение в точке x_i приближенного решения $y^{(h)}$ задачи Коши (3.1.1) на отрезке $[a, b]$, найденное с шагом h , где $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, 1, \dots, n$, n — число разбиений отрезка $[a, b]$, $h = (b - a)/n$. И пусть $y_i^{(h/2)}$ — значение в той же точке x_i , но приближенного решения $y^{(h/2)}$, найденное с шагом $h/2$, т.е. число разбиений в этом случае равно $2n$. Считается, что $y^{(h/2)}$ является решением задачи Коши (3.1.1) с погрешностью ε , если

$$\frac{|y_i^{(h/2)} - y_i^{(h)}|}{2^k - 1} < \varepsilon,$$

где $i = 1, 2, \dots, n$; k — порядок точности численного метода (например, $k = 1$ — для метода Эйлера (3.2.3), $k = 4$ — для метода Рунге-Кутты (3.2.9)).

Алгоритм вычислений. Допустим, что мы ищем численное решение задачи Коши (3.1.1) с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности ($k = 4$). Опишем алгоритм вычислений, основанный на применении правила Рунге практической оценки погрешности. Численное решение находят методом итераций. Пусть l — номер итерации, y^l — численное решение, найденное с шагом h_l , где h_l — расчетный шаг на l -ой итерации. Очередную итерацию осуществляют следующим образом. Рассчитывают y^{l+1} с шагом $h_{l+1} = h_l/2$.

После этого проверяют выполнение неравенства

$$\frac{|y_i^{l+1} - y_i^l|}{2^k - 1} < \varepsilon, \quad (3.2.16)$$

строго говоря, во всех общих точках x_i решений y^l и y^{l+1} .

Обычно выполнение неравенства (3.2.16) проверяют не во всех общих точках решений y^l и y^{l+1} , а только в выделенных *контрольных* точках. В качестве контрольных можно взять узловые точки $\{x_i^0\}$, соответствующие начальному числу разбиения n_0 с шагом h_0 : $x_i^0 = a + i \cdot h_0$, $i = 0, 1, \dots, n_0$, $h_0 = (b - a)/n_0$. Число n_0 (это целое число) определяется по формуле (см. (1.3.2) и (1.3.3))

$$n_0 = \left\lceil \frac{b - a}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \right\rceil + 1. \quad (3.2.17)$$

Здесь k — порядок точности метода, квадратные скобки $\lceil \cdot \rceil$, как и в (1.3.2) и (1.3.3), обозначают целую часть заключенного в них числа.

Замечание. Если $\frac{b-a}{\sqrt[k]{\varepsilon}} = \left\lceil \frac{b-a}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \right\rceil$, т.е. если дробная часть числа $\frac{b-a}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ равняется нулю, то 1 в формуле (3.2.17) можно не прибавлять. Пусть, например, $k = 4$, $[a, b]$ есть отрезок $[0, 1]$, а $\varepsilon = 0.0001$. Понятно, что в этом случае в качестве n_0 можно взять число 10, а не 11 (как это следует из формулы (3.2.17)), тогда $h_0 = 0.1$.

3.3. Интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы m обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0, \quad (3.3.1)$$

где $\mathbf{u}' = d\mathbf{u}/dx$,

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ \vdots \\ u_m'(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_m(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} f_1(x, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ f_m(x, u_1, \dots, u_m) \end{pmatrix},$$

$\mathbf{u}_0 = \{u_{1,0}, \dots, u_{m,0}\}; x_0, u_{i,0}, i = 1, \dots, m$ — заданные числа.

В случае задачи Коши (3.3.1) изложенные приближенные методы интегрирования Эйлера, Рунге-Кутта и Адамса формально остаются теми же, только функции u, f, y и коэффициенты k_i в формулах Рунге-Кутта (3.2.8) и (3.2.9) заменяются соответственно на вектор-функции $\mathbf{u}, \mathbf{f}$ и векторы $\mathbf{y}$ и $\mathbf{k}_i$. Правило Рунге применяется для каждой координаты вектора $\mathbf{u}$ в отдельности.

Пусть, например, требуется найти на отрезке $[a, b]$ решение задачи Коши (3.3.1) для $m = 2$, записанной в виде

$$\begin{cases} u_1' = f_1(x, u_1, u_2), \\ u_2' = f_2(x, u_1, u_2) \end{cases}, \quad \begin{cases} u_1(x_0) = u_{1,0}, \\ u_2(x_0) = u_{2,0} \end{cases}, \quad x_0 = a. \quad (3.3.2)$$

или в векторной форме

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0, \quad m = 2, \quad (3.3.3)$$

где

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} f_1(x, u_1, u_2) \\ f_2(x, u_1, u_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \end{pmatrix}.$$

Приведем для системы (3.3.3) расчетные формулы методов Рунге-Кутта 2-ого и 4-ого порядков точности (аналогичные формулам (3.2.8) и (3.2.9)) в векторной и координатной формах.

Глава 3. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Расчетные формулы метода Рунге-Кутты второго порядка точности для системы (3.3.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= h \cdot \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i), \\ \mathbf{k}_2 &= h \cdot \mathbf{f}(x_i + h, \mathbf{y}_i + \mathbf{k}_1), \\ \mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

В координатной форме формулы (3.3.4) запишутся так:

$$\begin{aligned} k_{1,1} &= h \cdot f_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), \\ k_{1,2} &= h \cdot f_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), \\ k_{2,1} &= h \cdot f_1(x_i + h, y_{1,i} + k_{1,1}, y_{2,i} + k_{1,2}), \\ k_{2,2} &= h \cdot f_2(x_i + h, y_{1,i} + k_{1,1}, y_{2,i} + k_{1,2}), \\ y_{1,i+1} &= y_{1,i} + \frac{1}{2} \cdot (k_{1,1} + k_{2,1}), \\ y_{2,i+1} &= y_{2,i} + \frac{1}{2} \cdot (k_{1,2} + k_{2,2}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Расчетные формулы метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности для системы (3.3.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= h \cdot \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i), \\ \mathbf{k}_2 &= h \cdot \mathbf{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{\mathbf{k}_1}{2}\right), \\ \mathbf{k}_3 &= h \cdot \mathbf{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{\mathbf{k}_2}{2}\right), \\ \mathbf{k}_4 &= h \cdot \mathbf{f}(x_i + h, \mathbf{y}_i + \mathbf{k}_3), \\ \mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + \frac{1}{6} \cdot (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Координатная форма формулы (3.3.6) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 k_{1,1} &= h \cdot f_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), \\
 k_{1,2} &= h \cdot f_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}), \\
 k_{2,1} &= h \cdot f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{1,2}}{2}\right), \\
 k_{2,2} &= h \cdot f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{1,2}}{2}\right), \\
 k_{3,1} &= h \cdot f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{2,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{2,2}}{2}\right), \\
 k_{3,2} &= h \cdot f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1,i} + \frac{k_{2,1}}{2}, y_{2,i} + \frac{k_{2,2}}{2}\right), \\
 k_{4,1} &= h \cdot f_1(x_i + h, y_{1,i} + k_{3,1}, y_{2,i} + k_{3,2}), \\
 k_{4,2} &= h \cdot f_2(x_i + h, y_{1,i} + k_{3,1}, y_{2,i} + k_{3,2}), \\
 y_{1,i+1} &= y_{1,i} + \frac{1}{6} \cdot (k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}), \\
 y_{2,i+1} &= y_{2,i} + \frac{1}{6} \cdot (k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.
 \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Понятно, что вид формул в векторной форме (3.3.4) и (3.3.6) не зависят от числа уравнений m в системе (3.3.1)

3.4. Задание

Для дифференциального уравнения (или системы уравнений) из предложенного варианта необходимо:

1) получить точное решение уравнения (системы уравнений) с заданными начальными условиями;

2) написать программу численного интегрирования дифференциального уравнения (системы уравнений) методом Рунге-Кутты второго или четвер-

Глава 3. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

того порядка точности. Для оценки точности вычислений воспользоваться правилом Рунге;

3) найти численное решение дифференциального уравнения (системы уравнений) с точностью $\varepsilon = 0.0001$ и оценить погрешность как максимум разности в узлах между точным решением и решением, полученным численным методом.

Оформите отчет по лабораторной работе. Он должен содержать описание использованного численного метода, результаты расчетов и текст программы.

Варианты задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и варианты задачи Коши для уравнений второго порядка и систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, а также ответы к ним представлены в табл. 3.1–3.6.

Задача Коши для уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} u'' + p(x)u' + q(x)u &= g(x), \\ u(x_0) &= A, \quad u'(x_0) = B; \\ x &\in [a, b], \quad x_0 = a \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

решается сведением к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть $u_1(x) = u(x)$, а $u_2(x) = u'(x)$. Тогда для $u_1(x)$ и $u_2(x)$ из (3.4.1) получаем следующую задачу Коши

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = g(x) - q(x) \cdot u_1 - p(x) \cdot u_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_1(x_0) = A, \\ u_2(x_0) = B. \end{cases} \tag{3.4.2}$$

Постановка задачи Коши и расчетные формулы для системы, состоящей из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, приведены выше (см.(3.3.2)— (3.3.7)).

Глава 3. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Таблица 3.1. Варианты задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

№ вар.	Функция $f(x, u)$	Отрезок $[a, b]$		Начальное условие u_0
		a	b	
1	2	3	4	5
1	$-x/u$	0	1	2
2	$2u/x$	1	3	1
3	$-\frac{x}{1+x} \cdot u$	0	2	1
4	e^{x+u}	0	0.5	0
5	$\frac{u}{x \cdot \ln x} + \frac{1}{x}$	e	e^2	1
6	$-2x \cdot u + x \cdot e^{-x^2}$	0	2	1
7	$\frac{3u}{x} - x$	1	3	2
8	$-\operatorname{tg} x \cdot u + \frac{1}{\cos x}$	0	$\pi/3$	1
9	$\frac{2x}{1+x^2} \cdot u + 1 + x^2$	1	3	2
10	$2u + e^x - x$	0	1	$1/4$
11	$-2u + e^{3x}$	0	1	$6/5$
12	$-u/x + 2 \ln x + 1$	1	3	1
13	$\frac{2u}{1+x} + e^x \cdot (1+x)^2$	0	2	1

Окончание таблицы 3.1.

1	2	3	4	5
14	$\frac{u}{x} + x \cdot \cos x$	1	3	$\sin 1$
15	$u + e^x/x$	1	2	0
16	$(u + 1)/x$	1	3	0
17	$e^{2x} - e^x \cdot u$	0	2	0
18	$(\sin x - u) \cdot \cos x$	0	π	0
19	$-1 + u/x$	1	3	0
20	$-(x + u)/x$	1	3	$1/2$
21	$-u + \cos x$	0	π	$1/2$
22	$2u - x^2$	0	3	$1/4$
23	$-u + 2x$	0	3	-1
24	u/x	1	4	1
25	$u/(2x)$	1	4	1
26	$-2u + 4x$	0	2	0
27	$-\frac{u}{x} \cdot \ln\left(\frac{u}{x}\right)$	1	2	e^2
28	$2u/x$	1	3	2
29	$-\frac{x}{1+x} \cdot u$	0	2	2
30	$-x/u$	0	1	1

Таблица 3.2. Ответы к вариантам задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

№ вар.	Решение $u(x)$	№ вар.	Решение $u(x)$
1	$\sqrt{4 - x^2}$	16	$x - 1$
2	x^2	17	$e^x - 1$
3	$(x + 1) \cdot e^{-x}$	18	$e^{-\sin x} + \sin x - 1$
4	$-\ln(2 - e^x)$	19	$x \cdot \ln(1/x)$
5	$(1 + \ln(\ln x)) \cdot \ln x$	20	$\frac{1}{x} - \frac{x}{2}$
6	$e^{-x^2} \cdot (1 + x^2/2)$	21	$(\sin x + \cos x)/2$
7	$x^2 + x^3$	22	$(2x^2 + 2x + 1)/4$
8	$\sin x + \cos x$	23	$e^{-x} + 2x - 2$
9	$x \cdot (1 + x^2)$	24	x
10	$e^{2x} - e^x + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$	25	$\sqrt{x}$
11	$e^{-2x} + \frac{e^{3x}}{5}$	26	$e^{-2x} + 2x - 1$
12	$x \cdot \ln x + 1/x$	27	$x \cdot e^{1+x}$
13	$(x + 1)^2 \cdot e^x$	28	$2x^2$
14	$x \cdot \sin x$	29	$2 \cdot (x + 1) \cdot e^{-x}$
15	$e^x \cdot \ln x$	30	$\sqrt{1 - x^2}$

Глава 3. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Таблица 3.3. Варианты задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

№ вар.	Функции			Отрезок $[a, b]$		Нач. условия	
	$p(x)$	$q(x)$	$g(x)$	a	b	A	B
1	-5	4	0	0	2	1	1
2	0	-1	e^x	0	1	3	$3/2$
3	-2	1	0	2	5	1	-2
4	0	1	$\cos x$	0	1	1	2
5	0	4	$4 \cdot [\sin(2x) + \cos(2x)]$	π	2π	2π	2π
6	-4	3	e^{5x}	0	1	3	9
7	-2	0	$2e^x$	1	3	-1	0
8	-8	7	14	0	1	1	0
9	0	1	$4e^x$	0	π	4	-3
10	-1	0	$2 \cdot (1 - x)$	0	1	1	1
11	6	0	8	0	1	2	6
12	-2	2	$4e^x \cdot \cos x$	π	2π	$\pi \cdot e^\pi$	e^π
13	-5	0	7	0	1	1	$3/5$
14	0	1	$5 \sin(2x)$	0	1	1	$2/3$
15	-2	1	$3e^x$	0	1	2	3

Таблица 3.4. Ответы к вариантам задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

№ вар.	Решение $u(x)$	№ вар.	Решение $u(x)$
1	e^x	8	$2 - \frac{7}{6}e^x + \frac{1}{6}e^{7x}$
2	$\left(2 + \frac{x}{2}\right)e^x + e^{-x}$	9	$-5\sin x + 2\cos x + 2e^x$
3	$(7 - 3x)e^{x-2}$	10	$x^2 + e^x$
4	$\left(2 + \frac{x}{2}\right)\sin x + \sin x$	11	$\frac{8}{3} + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}e^{-6x}$
5	$3\pi \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) +$ $+x \cdot [\sin(2x) - \cos(2x)]$	12	$e^x \cdot [(2x - \pi - 1) \cdot \sin x -$ $- \pi \cdot \cos x]$
6	$\frac{1}{8}e^x + \frac{11}{4}e^{3x} + \frac{1}{8}e^{5x}$	13	$\frac{3}{5} - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5}e^{5x}$
7	$e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$	14	$4\sin x + \cos x - \frac{5}{3}\sin(2x)$
15	$\left(2 + x + \frac{3}{2} \cdot x^2\right) \cdot e^x$		

Глава 3. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Таблица 3.5. Варианты задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

№ вар.	Функции		Отрезок $[a, b]$		Нач. условия	
	$f_1(x, u_1, u_2)$	$f_2(x, u_1, u_2)$	a	b	$u_{1,0}$	$u_{2,0}$
1	$-1/u_2$	$1/u_1$	0	2	1	2
2	$(u_2 - 1)/u_2$	$1/(u_1 - x)$	0	2	-1	1
3	$x/(u_1 \cdot u_2)$	x/u_1^2	0	2	1	1
4	$-u_2/x$	$-u_1/x$	1	3	2	0
5	$-2 \cdot \frac{u_1}{x}$	$u_2 + (2 + x) \cdot \frac{u_1}{x}$	1	3	1	$e - 1$
6	$u_1 + 3u_2$	$-u_1 + 5u_2$	0	3	3	1
7	$3u_1 - 2u_2 + x$	$3u_1 - 4u_2$	0	2	$2\frac{13}{18}$	$3\frac{11}{12}$
8	$u_2 - 5 \cos x$	$2u_1 + u_2$	0	π	1	4
9	$2u_1 + u_2 + 2 \cdot e^x$	$u_1 + 2u_2 - 3 \cdot e^{4x}$	0	2	0	-2
10	$3u_1 + 2u_2 + 3 \cdot e^{2x}$	$u_1 + 2u_2 + e^{2x}$	0	2	0	-2
11	$u_2 + \cos x$	$1 - u_1$	0	π	1	-0.5
12	$-5u_1 - u_2 + e^x$	$u_1 - 3u_2 + e^{2x}$	0	2	$\frac{119}{900}$	$\frac{211}{900}$
13	$-u_2 + \cos x$	$-u_1 + \sin x$	0	π	1	-1
14	$2u_1 - u_2$	$-u_1 + 2u_2 -$ $-5 \cdot e^x \cdot \sin x$	0	π	2	3
15	$2u_1 - 4u_2 + 4e^{-2x}$	$2u_1 - 2u_2$	-2	0	0	e^4

Таблица 3.6. Ответы к вариантам задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

№ вар.	$u_1(x)$	$u_2(x)$
1	$e^{-x/2}$	$2 \cdot e^{x/2}$
2	$x - e^x$	e^{-x}
3	$\left(\frac{3}{2} \cdot x^2 + 1\right)^{1/3}$	$\left(\frac{3}{2} \cdot x^2 + 1\right)^{1/3}$
4	$x + 1/x$	$-x + 1/x$
5	$1/x^2$	$e^x - 1/x^2$
6	$3 \cdot e^{2x}$	e^{2x}
7	$2 \cdot e^{2x} + e^{-3x} - \frac{2}{3}x - \frac{5}{18}$	$e^{2x} + 3 \cdot e^{-3x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{12}$
8	$e^{-x} + e^{2x} - 2 \sin x - \cos x$	$-e^{-x} + 2 \cdot e^{2x} + \sin x + 3 \cos x$
9	$e^{3x} + x \cdot e^x - e^{4x}$	$e^{3x} - (1 + x) \cdot e^x - 2 \cdot e^{4x}$
10	$e^x - e^{2x}$	$-e^x - e^{2x}$
11	$1 + \frac{x}{2} \cdot \cos x$	$-\frac{x}{2} \cdot \sin x - \frac{1}{2} \cdot \cos x$
12	$\frac{4}{25} \cdot e^x - \frac{1}{36} \cdot e^{2x}$	$\frac{1}{25} \cdot e^x + \frac{7}{36} \cdot e^{2x}$
13	$\sin x + e^x$	$-e^x$
14	$e^x \cdot (2 \cos x - \sin x)$	$e^x \cdot (3 \cos x + \sin x)$
15	0	e^{-2x}

Глава 4

Краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

Цель работы — изучение и применение численных методов для приближенного решения краевых задач для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Продолжительность работы — 2 часа.

4.1. Постановка задачи

Требуется найти функцию $u(x)$, которая является решением следующей *краевой* задачи

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad a < x < b, \quad (4.1.1)$$

$$u(a) = A, u(b) = B. \quad (4.1.2)$$

Задачу (4.1.1), (4.1.2) называют краевой, поскольку дополнительные условия (4.1.2) задаются на концах отрезка $[a, b]$.

4.2. Численные методы решения краевой задачи

4.2.1. Разностная аппроксимация производных

Введем на отрезке $[a, b]$ равномерную *сетку* ω_h (3.2.1). Записывая уравнение (4.1.1) во внутренних узлах сетки ω_h , получим $(n - 1)$ -но уравнение для

Глава 4. Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения

определения $3(n-1)$ неизвестных u_i , u'_i и u''_i :

$$u''_i + p_i u'_i + q_i u_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, (n-1), \quad (4.2.1)$$

где $u_i = u(x_i)$, $u'_i = u'(x_i)$, $u''_i = u''(x_i)$, $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$. Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений относительно u_i , необходимо первые и вторые производные функции $u(x)$ в узловых точках выразить через значения $u(x)$ в этих точках. Будем предполагать, что функция $u(x)$ имеет все необходимые по ходу рассуждения непрерывные производные. Выразим значения u_{i+1} и u_{i-1} по формуле Тейлора, беря точку x_i в качестве точки разложения:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2!}u''_i + \frac{h^3}{3!}u'''_i + O(h^4), \\ u_{i-1} &= u_i - hu'_i + \frac{h^2}{2!}u''_i - \frac{h^3}{3!}u'''_i + O(h^4). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Отсюда, учитывая свойства величины $O(h^k)$ (см. гл. 1), можно получить следующие выражения для точного значения первой производной функции $u(x)$ в точке x_i :

$$\begin{aligned} u'_i &= \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(h), \\ u'_i &= \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + O(h), \\ u'_i &= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h^2), \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

а также выражение для точного значения второй производной функции $u(x)$ в той же точке x_i :

$$u''_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + O(h^2). \quad (4.2.4)$$

Отношения

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

в (4.2.3) называются *правой разностной производной*, *левой разностной производной* и *центральной разностной производной*, соответственно. Отношение

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$$

в (4.2.4) называется *второй разностной производной*.

Из (4.2.3) следует, что левая и правая разностные производные аппроксимируют производную $u'(x)$ с первым порядком точности относительно шага h , а центральная разностная производная — со вторым порядком точности относительно h . Из (4.2.4) следует, что вторая разностная производная аппроксимирует производную $u''(x)$ со вторым порядком точности относительно h .

4.2.2. Решение задачи методом прогонки

Пусть, как и ранее, y_i — приближенное значение, соответствующее точному значению u_i функции $u(x)$ в точке x_i . Заменяем u''_i и u'_i в (4.2.1) второй разностной производной и первой центральной разностной производной, соответственно, подставляя в них вместо u_i величины y_i . В результате вместо дифференциальной задачи (4.1.1), (4.1.2) получим следующую *разностную задачу*:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, (n-1), \quad (4.2.5)$$

$$y_0 = A, y_n = B. \quad (4.2.6)$$

Подставляя краевые условия (4.2.6) в (4.2.5), получим относительно значений y_i , $i = 1, 2, \dots, (n-1)$ систему линейных алгебраических уравнений $(n-1)$ -ого порядка с трехдиагональной матрицей

$$\begin{aligned}
 (h^2 q_1 - 2)y_1 + \left(1 + \frac{h}{2} p_1\right) y_2 &= h^2 f_1 - A \cdot \left(1 - \frac{h}{2} p_1\right), \\
 \left(1 - \frac{h}{2} p_i\right) y_{i-1} + (h^2 q_i - 2)y_i + \left(1 + \frac{h}{2} p_i\right) y_{i+1} &= h^2 f_i, \\
 i &= 2, \dots, (n-2); \\
 \left(1 - \frac{h}{2} p_{n-1}\right) y_{n-2} + (h^2 q_{n-1} - 2)y_{n-1} &= h^2 f_{n-1} - B \cdot \left(1 + \frac{h}{2} p_{n-1}\right).
 \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Система (4.2.7) решается методом прогонки [1].

4.2.3. Решение задачи методом стрельбы

Идея метода. Как известно из курса дифференциальных уравнений общее решение (4.1.1) записывается в виде

$$u(x) = u_0(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x), \tag{4.2.8}$$

где $u_0(x)$ — частное решение (4.1.1), а $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — линейно независимые частные решения, соответствующего (4.1.1) однородного уравнения

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = 0. \tag{4.2.9}$$

Краевые условия (4.1.2), используя (4.2.8), можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 u_0(a) + c_1 u_1(a) + c_2 u_2(a) &= A, \\
 u_0(b) + c_1 u_1(b) + c_2 u_2(b) &= B.
 \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Пусть $u_0(x)$ — такое частное решение (4.1.1), что $u_0(a) = A$, а частные решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ уравнения (4.2.9) пусть удовлетворяют условиям $u_1(a) = 0$ и $u_2(a) \neq 0$, соответственно. Тогда из первого уравнения (4.2.10) следует равенство

$$A + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot u_2(a) = A,$$

т.е. $c_2 = 0$, а выражение (4.2.8) приобретает вид

$$u(x) = u_0(x) + c_1 u_1(x). \quad (4.2.11)$$

Константу c_1 находим из второго краевого условия (4.2.10): $u(b) = u_0(b) + c_1 u_1(b) = B$. Следовательно $c_1 = (B - u_0(b))/u_1(b)$. Будем считать, что $u_1(b) \neq 0$. Описанный способ решения задачи называют *методом стрельбы* или *методом пристрелки* [3].

Реализация метода. Итак, в соответствии (4.2.11), для приближенного решения $y(x)$ в узлах равномерной сетки ω_h можем записать

$$y_i = y_{0,i} + c_1 y_{1,i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (4.2.12)$$

Будем искать такие численные решения $y_{0,i}$ и $y_{1,i}$, для которых в 0-ом и 1-ом узлах сетки ω_h выполняются следующие условия:

$$y_{0,0} = A, \quad y_{0,1} = D_0, \quad (4.2.13)$$

$$y_{1,0} = 0, \quad y_{1,1} = D_1 \neq 0, \quad (4.2.14)$$

где D_0 и D_1 — константы. Формально алгоритм применим при произвольных значениях D_0 и D_1 ($D_1 \neq 0$), однако с целью уменьшения влияния вычислительной погрешности рекомендуется брать $D_0 = A + O(h)$ и $D_1 = O(h)$.

Записываем для $y_{0,i}$ и $y_{1,i}$ разностные уравнения, соответствующие неоднородному (4.1.1) и однородному (4.2.9) уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{y_{0,i-1} - 2y_{0,i} + y_{0,i+1}}{h^2} + p_i \frac{y_{0,i+1} - y_{0,i-1}}{2h} + q_i \cdot y_{0,i} &= f_i, \\ \frac{y_{1,i-1} - 2y_{1,i} + y_{1,i+1}}{h^2} + p_i \frac{y_{1,i+1} - y_{1,i-1}}{2h} + q_i \cdot y_{1,i} &= 0, \\ i &= 1, \dots, (n-1). \end{aligned}$$

Отсюда находим выражения для $y_{0,i+1}$ и $y_{1,i+1}$:

$$\begin{aligned} y_{0,i+1} &= \frac{h^2 f_i - \left(1 - \frac{h}{2} p_i\right) \cdot y_{0,i-1} - (h^2 q_i - 2) \cdot y_{0,i}}{1 + \frac{h}{2} p_i}, \\ y_{1,i+1} &= \frac{-\left(1 - \frac{h}{2} p_i\right) \cdot y_{1,i-1} - (h^2 q_i - 2) \cdot y_{1,i}}{1 + \frac{h}{2} p_i}, \\ i &= 1, \dots, (n-1). \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Заданные значения (4.2.13) и (4.2.14) позволяют по формулам (4.2.15) найти последовательно решения $y_0(x)$ и $y_1(x)$ во всех оставшихся узлах x_i , $i = 2, \dots, n$. Постоянную c_1 находим по формуле (см. выше): $c_1 = (B - y_{0,n})/y_{1,n}$. Однако, может оказаться так, что $y_{1,n} = 0$. Поскольку выбор констант D_0 и D_1 в (4.2.13) и (4.2.14) находится в распоряжении вычислителя, то меняя значение D_1 в (4.2.14) можно найти решение $y_1(x)$, для которого $y_{1,n} \neq 0$. Решение всей задачи (4.1.1), (4.1.2) находится по формулам (4.2.12).

4.3. Задание

Для предложенного варианта лабораторной работы решить краевую задачу либо методом прогонки, либо методом стрельбы. Для задания краевого условия в точке b предварительно необходимо решить аналитически соответствующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} u'' + p(x)u' + q(x)u &= f(x), \\ u(x_0) &= A, \quad u'(x_0) = C; \\ x &\in [a, b], \quad x_0 = a. \end{aligned}$$

Значение B находится подстановкой точки b в точное решение $u(x)$ задачи Коши: $B = u(b)$. Варианты задачи Коши приведены в табл. 4.1. Значения a и b во всех вариантах равны 0 и 1, соответственно $[a, b] = [0, 1]$.

Таблица 4.1. Варианты задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

№ вар.	Функции			Нач. условия	
	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	A	C
1	2	3	4	5	6
1	-2	2	$e^x \cdot \sin x$	2	3/2
2	-7	12	5	1	2
3	2	2	$x \cdot e^{-x}$	0	0
4	-2	2	x^2	0.5	0
5	-8	16	e^{4x}	0	1
6	0	-1	$2e^x - x^2$	2	1
7	0	4	8	3	4
8	-1	0	$\operatorname{ch}(2x)$	0	0
9	-2	0	$e^x(x^2 + x - 3)$	2	2
10	0	1	$4e^x$	4	-3
11	0	-1	$2 - x^2$	1	1
12	0	4	e^{-2x}	0	0
13	-4	0	$6x^2 + 1$	0	3.5625
14	0	-4	$16x \cdot e^{2x}$	0	3
15	1	-2	$-2x + 1$	1	-1

Окончание таблицы 4.1.

1	2	3	4	5	6
16	−6	8	10	1	2
17	−2	2	$2x$	0	1
18	0	4	$\sin(2x) + 1$	0.25	0
19	−3	2	$2 \sin x$	0	−0.2
20	0	−1	$2 \operatorname{sh} x$	0	1
21	1	−2	$\cos x - 3 \sin x$	1	2
22	−1	0	3	6	2
23	0	4	$\sin x$	1	1
24	0	4	e^x	1	3
25	−1	−6	2	1	0
26	−8	7	14	1	5
27	0	9	$6 \cos(3x)$	1	3
28	4	4	$5e^{-2x}$	1	2
29	0	4	$3 \sin(2x)$	2	0.75
30	0	1	$4x \cdot e^x$	−2	0

Литература

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
2. Самарский А.А. Введение в численные методы. СПб.: Издательство «Лань», 2005. 288 с.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. 632 с.
4. Костомаров Д.П., Фаворский А.П. Вводные лекции по численным методам. М.: Университетская книга, Логос, 2006. 184 с.
5. Волков Е.А. Численные методы. М.: Наука, 1987. 248 с.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
7. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. шк., 1994. 544 с.

Блюмин Алексей Григорьевич
Федотов Анатолий Александрович
Храпов Павел Васильевич

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ**

Методические указания
к выполнению лабораторных работ
по курсу «Численные методы»