

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Л.Г. Ветров, А.Л. Сунчалина, В.И. Тимонин

**Методические указания к выполнению типового расчета по теории
вероятностей**

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2011

Оглавление

Введение	3
1. Примеры решения задач	4
2. Задачи типового расчета.....	19
3. Варианты типового расчета	23
Литература	29

Введение

Методические указания предназначены для студентов второго– третьего курсов факультетов МТ, ИБМ, РК. Они предназначены для приобретения студентами навыков самостоятельного решения различных задач по теории вероятностей, подготовки их к изучению спецдисциплин, базирующихся на методах теории вероятностей (математической статистики, теории надежности, управления рисками и др.). В методических указаниях подробно рассмотрены примеры решения задач из различных разделов теории вероятностей – вычислению вероятностей в классической схеме, геометрических вероятностей, условных вероятностей с применением формул Байеса и полной вероятности. Кроме того, большое внимание уделено анализу распределений случайных величин – дискретных, непрерывных, скалярных и векторных. Проанализированы методы определения распределений функций от случайных величин (как скалярных, так и векторных).

Для овладения материалом студентам необходимо знание стандартных курсов математического анализа – дифференциального и интегрального исчисления одной и нескольких переменных, читаемых в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Ввиду ограниченности объема издания, в методических указаниях отсутствуют теоретические сведения по рассматриваемой дисциплине. Их можно найти в литературе, рекомендованной учебными планами МГТУ им. Н.Э. Баумана (см., например, [1,2]).

1. Примеры решения задач.

Пример 1. Одновременно подбрасывают две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков: 1) равна 8; 2) меньше 6; 3) больше 7; 4) заключена в промежутке $[4; 8]$.

Решение. В качестве пространства элементарных исходов данного эксперимента будем использовать множество упорядоченных пар: $\Omega = \{\omega = (i, j), \quad i = 1, \dots, 6, j = 1, \dots, 6\}$ (здесь i и j – число очков, выпавших соответственно на первой и второй кости). Таким образом, общее число элементарных исходов $N = 36$. В рамках классической схемы вероятность любого события вычисляется как отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов. На следующем рисунке отмечены элементарные исходы, благоприятные для каждого из интересующих нас событий.

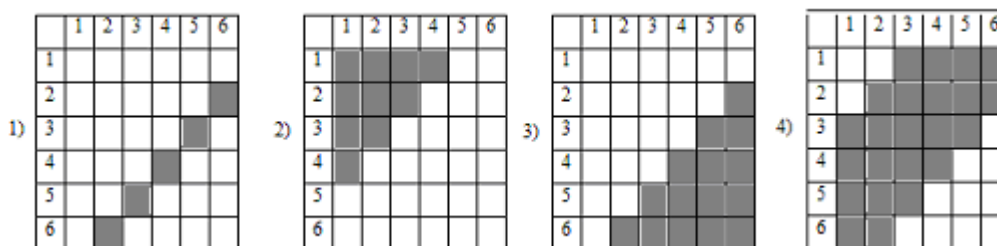


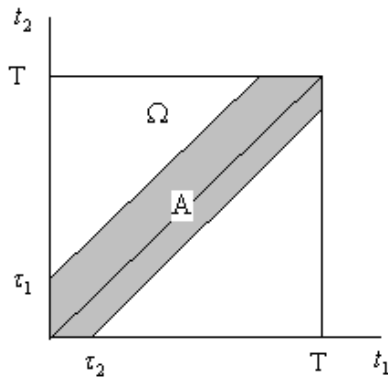
Рис. 1. Диаграммы благоприятствующих элементарных исходов

Таким образом $p_1 = 5/36$, $p_2 = 10/36 = 5/18$, $p_3 = 15/36 = 5/12$, $p_4 = 23/36$.

Пример 2. На интервале времени $[0, T] = [0, 120]$ в случайный момент t_1 включается радиолокационная станция (РЛС), которая сканирует местность в течение $\tau_1 = 15$. В

другой случайный момент t_2 появляется цель, которая находится в зоне видимости РЛС в течение времени $\tau_2 = 10$. Найти вероятность того, что РЛС запеленгует цель.

Решение. В качестве элементарных исходов эксперимента будем рассматривать точки квадрата со стороной T : $\Omega = \{\omega = (t_1, t_2), 0 \leq t_1 \leq T, 0 \leq t_2 \leq T\}$, где t_1 - момент включения РЛС, а t_2 - момент входа цели в зону видимости РЛС. В рамках геометрической схемы,



вероятность любого события A вычисляется как отношение меры множества благоприятных исходов к мере всего пространства элементарных исходов

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \frac{S(A)}{S(\Omega)}.$$

Рис. 2. Геометрическое изображение события A

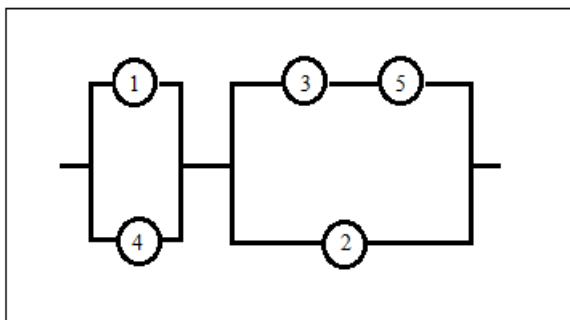
Опишем множество благоприятных исходов $A = \{t_1 \leq t_2 \leq t_1 + \tau_1\} \cup \{t_2 \leq t_1 \leq t_2 + \tau_2\}$

(если цель появилась после включения РЛС, то она должна появиться до отключения РЛС, аналогично, если РЛС включилась после появления цели, то она должна включиться до выхода цели из зоны видимости РЛС).

Следовательно $P(A) = \frac{T^2 - (T - \tau_1)^2 / 2 - (T - \tau_2)^2 / 2}{T^2}$. Подставив численные значения,

получаем $P(A) \approx 0,197$. На рисунке 2 показано событие A в виде подмножества пространства элементарных исходов.

Пример 3. На рисунке 3 изображена физическая схема соединения системы, состоящей из 5 фильтров. Отказом фильтра является прорыв сетки (фильтр перестает фильтровать жидкость). Событие $\bar{A}_i$ - отказ i -го фильтра за некоторый промежуток времени. Вероятности безотказной работы фильтров заданы: $P(A_i) = 0,95$, $i = 1, 3$;



$P(A_j) = 0,9$, $j = 2, 4$; $P(A_5) = 0,85$.

Рис. 3. Физическая схема системы

Событие A состоит в безотказной работе всей системы за рассматриваемый промежуток времени (события A_i независимы в совокупности). Требуется: 1) изобразить структурную схему надежности системы; 2) выразить событие A через события A_i или $\bar{A}_i$ ($i=1,2,3,4,5$); 2) найти вероятность $P(A)$ безотказной работы системы.

Решение. Система будет функционировать, если не откажут первый и четвертый фильтры или же второй и хотя бы один из двух оставшихся. Следовательно, структурная схема надежности данной системы фильтров имеет вид, изображенный на рисунке 4.

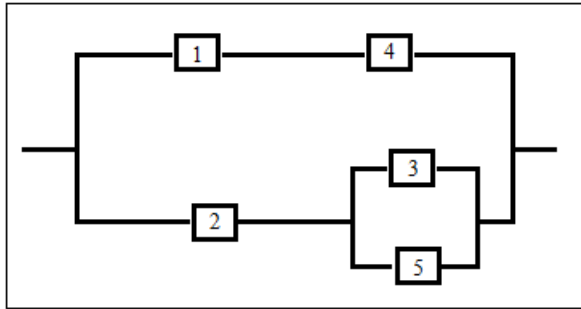
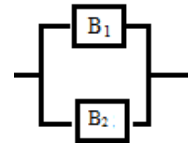


Рис. 4. Структурная схема надежности системы

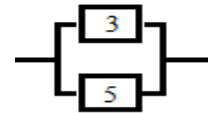
Данная схема может быть представлена как параллельное соединение блоков B_1 и B_2 .



Блок B_1 имеет вид , а блок B_2 , в свою очередь, может быть представлен в виде



где блок B_3 имеет следующую структурную схему



Пусть события B_i - безотказная работа i -го блока. Тогда при параллельном соединении

$$A = B_1 \cup B_2, \quad \bar{A} = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2. \quad \text{Для последовательного}$$

соединения $B_1 = A_1 \cap A_4, \quad \bar{B}_1 = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_4$. Далее

$$B_2 = A_2 \cap B_3, \quad \bar{B}_2 = \bar{A}_2 \cup \bar{B}_3 \quad \text{и}$$

$B_3 = A_3 \cup A_5, \quad \bar{B}_3 = \bar{A}_3 \cap \bar{A}_5$. Окончательно получаем

$$A = (A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap (A_3 \cup A_5)), \quad \bar{A} = (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_4) \cap (\bar{A}_2 \cup (\bar{A}_3 \cap \bar{A}_5)).$$

Для подсчета вероятности безотказной работы системы воспользуемся формулой сложения вероятностей и формулой умножения вероятностей для независимых событий.

$$P(B_3) = P(A_3 \cup A_5) = P(A_3) + P(A_5) - P(A_3 \cap A_5) = P(A_3) + P(A_5) - P(A_3)P(A_5) = 0,9925;$$

$$P(B_2) = P(A_2 \cap B_3) = P(A_2)P(B_3) = 0,89325;$$

$$P(B_1) = P(A_1 \cap A_4) = P(A_1)P(A_4) = 0,9025;$$

$$P(A) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1)P(B_2) \approx 0,989.$$

Пример 4. Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров, последовательно наугад извлекают 5 шаров. Найти вероятность того, что среди извлеченных шаров окажется ровно 2 белых шара при условии, что выборка производится: 1) с возвращением (извлеченный шар возвращается обратно в урну); 2) без возвращения (извлеченный шар в урну не возвращается).

Решение. Введем следующие события: событие A_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ состоит в том, что i -й в порядке извлечения шар оказался белого цвета. Тогда интересующее нас событие может быть выражено через события A_i следующим образом

$$A = A_1 A_2 \overline{A_3} \overline{A_4} \overline{A_5} \cup A_1 \overline{A_2} A_3 \overline{A_4} \overline{A_5} \cup A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} A_4 \overline{A_5} \cup \dots \cup \overline{A_1} A_2 A_3 \overline{A_4} \overline{A_5} \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3 A_4 \overline{A_5}.$$

Заметим, что все слагаемые попарно несовместны. Следовательно, вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей

$$P(A) = P(A_1 A_2 \overline{A_3} \overline{A_4} \overline{A_5}) + P(A_1 \overline{A_2} A_3 \overline{A_4} \overline{A_5}) + \dots + P(\overline{A_1} A_2 A_3 \overline{A_4} \overline{A_5}) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3 A_4 \overline{A_5}).$$

Подсчет вероятностей для произведений событий зависит от способа извлечения шаров.

Если выборка осуществляется с возвращением, то события A_i также как и $\overline{A_i}$ будут независимыми между собой (вероятность извлечь белый шар не зависит от того, какого цвета шары извлекались до этого, а зависит только от количества белых и черных шаров в урне). Для независимых событий вероятность произведения равна произведению вероятностей сомножителей. В этом случае

$$P(A) = \frac{4}{10} \frac{4}{10} \frac{6}{10} \frac{6}{10} \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \frac{6}{10} \frac{4}{10} \frac{6}{10} \frac{6}{10} + \dots + \frac{6}{10} \frac{6}{10} \frac{6}{10} \frac{4}{10} \frac{4}{10}.$$

Все слагаемые одинаковые, а их число (число вариантов выбрать 2 места из 5) равно

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10. \text{ Таким образом } P(A) = 10 \frac{4^2 6^3}{10^5} = 0,3456.$$

В случае извлечения выборки без возвращения события A_i являются зависимыми (вероятность извлечь белый шар зависит от того, какого цвета и сколько шаров извлекалось до этого). Поэтому, при подсчете вероятности слагаемых, будем использовать формулу умножения вероятностей для зависимых событий:

$$P(B_1 B_2 \dots B_n) = P(B_1) P(B_2 | B_1) P(B_3 | B_1 B_2) \dots P(B_n | B_1 B_2 \dots B_{n-1}).$$

Получаем

$$P(A) = \frac{4}{10} \frac{3}{9} \frac{6}{8} \frac{5}{7} \frac{4}{6} + \frac{4}{10} \frac{6}{9} \frac{3}{8} \frac{5}{7} \frac{4}{6} + \dots + \frac{6}{10} \frac{5}{9} \frac{4}{8} \frac{4}{7} \frac{3}{6}.$$

Так же, как и в первом случае, все слагаемые равны между собой, поэтому

$$P(A) = 10 \frac{4}{10} \frac{3}{9} \frac{6}{8} \frac{5}{7} \frac{4}{6} = \frac{10}{21} \approx 0,476.$$

Пример 5. Из 10 стрелков пять попадают в цель с вероятностью 0,4, три - с вероятностью 0,6 и два оставшихся – с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что случайно выбранный стрелок попадет в цель. Известно, что случайно выбранный стрелок попал в цель. Найти вероятность того, что он принадлежит группе стрелков, поражающих цель с вероятностью 0,4.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что случайно выбранный стрелок поразил цель. Введем следующие события: H_1 - что случайно выбранный стрелок поражает цель с вероятностью 0,4; H_2 - с вероятностью 0,6; H_3 - с вероятностью 0,8. События H_i , $i = 1, 2, 3$ попарно несовместны ($H_i \cap H_j = \emptyset, \forall i \neq j$) и образуют полную группу событий $\left(\sum_i H_i = \Omega \right)$, то есть являются гипотезами. Поэтому для нахождения вероятности события A можно воспользоваться формулой полной вероятности

$$P(A) = \sum_i P(A|H_i) P(H_i).$$

Априорные вероятности гипотез: $P(H_1) = \frac{5}{10} = 0,5$; $P(H_2) = \frac{3}{10} = 0,3$; $P(H_3) = \frac{2}{10} = 0,2$.

Условные вероятности: $P(A|H_1) = 0,4$; $P(A|H_2) = 0,6$; $P(A|H_3) = 0,8$.

Таким образом $P(A) = 0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,2 = 0,54$.

Для подсчета апостериорной вероятности гипотезы H_1 воспользуемся формулами Байеса

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) P(H_i)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i) P(H_i)}{\sum_j P(A|H_j) P(H_j)}.$$

В нашем случае $P(H_1|A) = \frac{0,4 \cdot 0,5}{0,54} \approx 0,37$.

Пример 6. Среди 15 коммерческих банков региона 5 являются нарушителями финансовой отчетности. Центробанк для проверки отобрал случайным образом 3 банка. При проверке банка- нарушителя комиссия с вероятностью 0,9 обнаруживает нарушения независимо от результатов проверки других банков. Найти вероятность того, что в результате проверки будет обнаружен хотя бы один банк, нарушающий финансовую отчетность.

Решение. Ясно, что вероятность обнаружить нарушения финансовой отчетности, зависит от того, сколько банков-нарушителей окажется среди трех, отобранных для проверки. Введем события: H_i – событие, состоящее в том, что среди трех отобранных для проверки банков оказалось ровно i нарушителей финансовой отчетности ($i = 0, 1, 2, 3$). События $\{H_i\}$ являются гипотезами, то есть образуют полную группу попарно несовместных событий. Следовательно, по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=0}^3 P(A|H_i)P(H_i),$$

где событие A состоит в том, что в результате проверки будет обнаружен хотя бы один банк-нарушитель.

Сначала найдем априорные вероятности гипотез $P(H_i)$. Общее число способов отобрать 3 банка из 15 (число сочетаний «из 15 по 3») равно $C_{15}^3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = 455$.

Число благоприятных исходов равно $C_5^i C_{10}^{3-i}$. Следовательно, $P(H_i) = \frac{C_5^i C_{10}^{3-i}}{C_{15}^3}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Простой подсчет дает

$$P(H_0) = \frac{120}{455} \approx 0,264; \quad P(H_1) = \frac{225}{455} \approx 0,494; \quad P(H_2) = \frac{100}{455} \approx 0,22; \quad P(H_3) = \frac{10}{455} \approx 0,022.$$

Найдем условные вероятности $P(A|H_i)$.

Ясно, что $P(A|H_0) = 0$. Далее, $P(A|H_1) = 0,9$. Для поиска остальных условных вероятностей воспользуемся формулой сложения вероятностей для независимых событий $P(\cup A_i) = 1 - \prod_i (1 - P(A_i))$. Эта формула дает

$$P(A|H_2) = 1 - (1 - 0,9)^2 = 0,99; \quad P(A|H_3) = 1 - (1 - 0,9)^3 = 0,999.$$

Окончательно получаем

$$P(A) = 0 \cdot 0,264 + 0,9 \cdot 0,494 + 0,99 \cdot 0,22 + 0,999 \cdot 0,022 = 0,684378 \approx 0,68.$$

Пример 7. Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров, последовательно наугад извлекают 5 шаров (выборка с возвращением). Случайная величина ξ – число белых шаров в выборке. Для случайной величины ξ найти: 1) распределение вероятностей; 2) функцию распределения и построить ее график; 3) вероятность попадания случайной величины в интервал $(1;5)$; 4) математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

Решение. Так как выборка осуществляется с возвращением, вероятность извлечь белый шар остается постоянной ($p = 0,4$) и не зависит от результатов предыдущих испытаний. Таким образом, случайная величина ξ - число успехов в схеме Бернулли с числом испытаний $n = 5$ и вероятностью успеха $p = 0,4$. Для схемы Бернулли имеем $p_k = P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$. В нашем случае

$$p_0 = P(\xi = 0) = C_5^0 (0,4)^0 (0,6)^5 = 0,07776; \quad p_1 = P(\xi = 1) = C_5^1 (0,4)^1 (0,6)^4 = 0,2592;$$

$$p_2 = P(\xi = 2) = C_5^2 (0,4)^2 (0,6)^3 = 0,3456; \quad p_3 = P(\xi = 3) = C_5^3 (0,4)^3 (0,6)^2 = 0,2304;$$

$$p_4 = P(\xi = 4) = C_5^4 (0,4)^4 (0,6)^1 = 0,0768; \quad p_5 = P(\xi = 5) = C_5^5 (0,4)^5 (0,6)^0 = 0,01024.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины ξ задается таблицей

Функция

x_k	0	1	2	3	4	5
p_k	0,07776	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,01024

распределения кусочно постоянна

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x) = \sum_{\{k < x\}} p_k = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0,07776, & 0 < x \leq 1 \\ 0,33696, & 1 < x \leq 2 \\ 0,68256, & 2 < x \leq 3 \\ 0,91296, & 3 < x \leq 4 \\ 0,98976, & 4 < x \leq 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

На рисунке 5 представлен ее график.

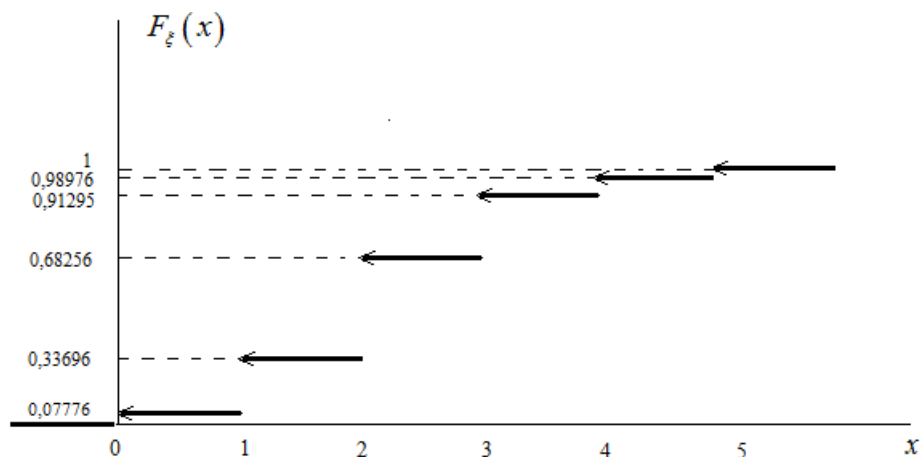


Рис. 5. График функции распределения

Вероятность попадания случайной величины в интервал вычисляется по формуле

$$P(\xi \in (a; b)) = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a + 0) = F_{\xi}(b) - \lim_{x \rightarrow a+0} F_{\xi}(x). \text{ Следовательно}$$

$$P(\xi \in (1; 5)) = F(5) - F(1+) = F(5) - F(2) = 0,98976 - 0,33696 = 0,6528.$$

Найдем числовые характеристики случайной величины ξ .

Математическое ожидание

$$M(\xi) = \sum_k x_k p_k = 0 \cdot 0,07776 + 1 \cdot 0,2592 + 2 \cdot 0,3456 + 3 \cdot 0,2304 + 4 \cdot 0,0768 + 5 \cdot 0,01024 = 2.$$

Дисперсия

$$D(\xi) = \sum_k (x_k - M(\xi))^2 = \sum_k x_k^2 p_k - (M(\xi))^2 = \\ = 0 \cdot 0,07776 + 1 \cdot 0,2592 + 4 \cdot 0,3456 + 9 \cdot 0,2304 + 16 \cdot 0,0768 + 25 \cdot 0,01024 - 4 = 1,2.$$

$$\text{Среднеквадратическое отклонение } \sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{1,2} \approx 1,1.$$

Пример 8. Непрерывная случайная величина ξ распределена по закону Релея с плотностью $f(x) = 2\lambda^2 x e^{-\lambda^2 x^2}$, $x > 0$. Для случайной величины ξ с параметром $\lambda = 0,5$ найти : 1) ее функцию распределения $F(x)$ и построить графики функции распределения $F(x)$ и плотности распределения вероятностей $f(x)$; 2) вероятность попадания случайной величины в интервал $(0,5; 1,5)$; 4) математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

Решение. Исходя из определения плотности распределения случайной величины запишем

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_0^x \frac{1}{2} t e^{-\frac{1}{4} t^2} dt, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{4}}, & x > 0 \end{cases}$$

Графики функции распределения и плотности изображены на рисунке 6.

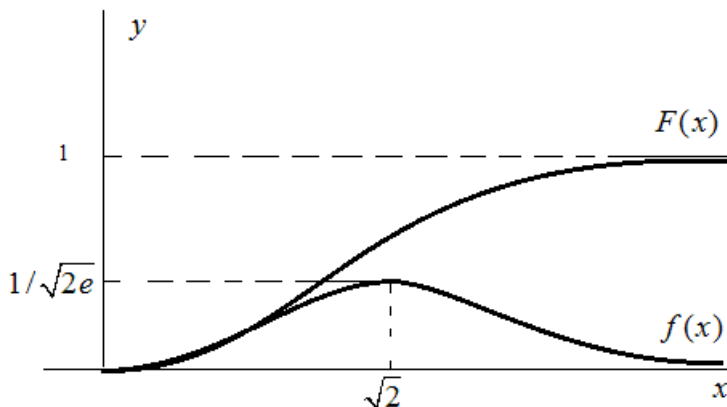


Рис. 6. Функция распределения и плотность случайной величины

Найдем вероятность попадания в интервал $(0,5;1,5)$.

$$P(\xi \in (0,5;1,5)) = F(1,5) - F(0,5) = e^{-0,5625} - e^{-0,0625} \approx 0,37.$$

При подсчете числовых характеристик случайной величины ξ удобно использовать

гамма-функцию Эйлера $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$, обладающую свойствами:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Найдем математическое ожидание ξ .

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} dx = \int_0^{\infty} 2t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 2\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Здесь в интеграле использована замена переменной $t = x^2/4$. Аналогично находим дисперсию ξ .

$$\begin{aligned} D(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (M(\xi))^2 = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{x^3}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} dx - \pi = \int_0^{\infty} 4te^{-t} dt - \pi = 4\Gamma(2) - \pi = 4\Gamma(1) - \pi = 4 - \pi. \end{aligned}$$

Среднеквадратическое отклонение $\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{4 - \pi} \approx 0,93$.

Пример 9. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид $f_{\xi}(x) = \begin{cases} kx, & x \in [0;1,5] \\ 0, & x \notin [0;1,5] \end{cases}$. Случайная величина η связана с ξ функциональной

зависимостью $\eta = 4\xi^2 - 7$. Найти: 1) константу k ; 2) математическое ожидание и дисперсию случайной величины η , используя плотность распределения вероятностей случайной величины ξ ; 3) функцию распределения и плотность распределения вероятностей случайной величины η и построить их графики; 4) математическое ожидание и дисперсию случайной величины η , используя найденную плотность распределения вероятностей.

Решение. Константу k находим из условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) dx = 1$. Получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) dx = \int_0^{1,5} kx dx = \frac{9k}{8} = 1. \text{ Следовательно } k = \frac{8}{9}.$$

Для вычисления математического ожидания случайной величины η воспользуемся

формулой $M(\eta) = M(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{\xi}(x)dx$. Получаем

$$M(\eta) = \int_0^{1.5} (4x^2 - 7) \frac{8}{9} x dx = \frac{8}{9} \left(x^4 - \frac{7}{2} x^2 \right) \Big|_0^{1.5} = -\frac{5}{2}.$$

Дисперсия

$$\begin{aligned} D(\eta) &= D(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x)f_{\xi}(x)dx - (M(\eta))^2 = \int_0^{1.5} (4x^2 - 7)^2 \frac{8}{9} x dx - \frac{25}{4} = \\ &= \frac{8}{9} \left(\frac{16}{6} x^6 - \frac{56}{4} x^4 + \frac{49}{2} x^2 \right) \Big|_0^{1.5} - \frac{25}{4} = \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

Найдем функцию распределения случайной величины ξ .

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t)dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \frac{8}{9} t dt, & 0 \leq x \leq 1.5 \\ 1, & x > 1.5 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{4}{9} x^2, & 0 \leq x \leq 1.5 \\ 1, & x > 1.5 \end{cases}$$

Далее ищем функцию распределения случайной величины η .

$$F_{\eta}(x) = P(\eta < x) = P(4\xi^2 - 7 < x) = P\left(\xi^2 < \frac{x+7}{4}\right) = \begin{cases} 0, & x < -7 \\ P\left(-\sqrt{\frac{x+7}{4}} < \xi < \sqrt{\frac{x+7}{4}}\right), & -7 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} 0, & x < -7 \\ F_{\xi}\left(\sqrt{\frac{x+7}{4}}\right) - F_{\xi}\left(-\sqrt{\frac{x+7}{4}}\right), & -7 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < -7 \\ \frac{4}{9} \left(\sqrt{\frac{x+7}{4}}\right)^2 - 0, & -7 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & x < -7 \\ \frac{1}{9}(x+7), & -7 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

По определению плотности распределения случайной величины

$$f_{\eta}(x) = F'_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & x \in [-7; 2] \\ 0, & x \notin [-7; 2] \end{cases}$$

Таким образом, случайная величина η имеет равномерное распределение на отрезке $[-7; 2]$. Графики ее плотности и функции распределения изображены на рисунке 7.

Найдем числовые характеристики случайной величины η , используя ее плотность распределения. Для математического ожидания получаем

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\eta}(x) dx = \int_{-7}^2 x \frac{1}{9} dx = \frac{x^2}{18} \Big|_{-7}^2 = -\frac{5}{2}.$$

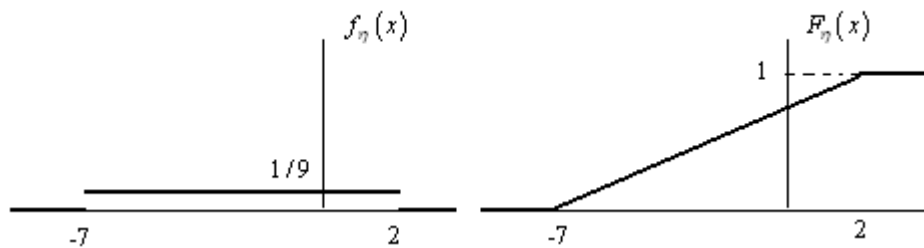


Рис. 7. Плотность и функция распределения случайной величины η

Аналогично, находим дисперсию случайной величины η .

$$D(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\eta}(x) dx - (M(\eta))^2 = \int_{-7}^2 x^2 \frac{1}{9} dx - \frac{25}{4} = \frac{x^3}{27} \Big|_{-7}^2 - \frac{25}{4} = \frac{27}{4}.$$

Видим, что результаты подсчета числовых характеристик различными способами совпадают.

Пример 10. Дана система двух дискретных случайных величин (ξ, η) , закон

$x_i \setminus y_j$	-1	0	2	4
1	0,1	0	0,15	0,05
3	0,15	0,15	0	0,1
5	0,2	0	0,1	0

распределения которой задан таблицей. Найти: 1) законы распределения случайных величин ξ и η ; 2) математические ожидания и дисперсии случайных величин ξ и η ; 3) коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$; 4) условные распределения $P_{\xi}(x_i|y_3)$, $P_{\eta}(y_j|x_3)$; 5)

условные математические ожидания $M(\xi|y_3)$, $M(\eta|x_3)$.

Решение. Найдем законы распределения случайных величин ξ и η . Пусть $p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j)$, $i = 1, 2, 3$ $y = 1, 2, 3, 4$. Тогда

$p_i^\xi = P(\xi = x_i) = \sum_j p_{ij}$, $p_j^\eta = P(\eta = y_j) = \sum_i p_{ij}$. Простые вычисления дают законы распределения случайных величин ξ и η (их удобно изображать на таблице совместного распределения, добавив один столбец справа и одну строку снизу).

x_i	1	3	5
p_i^ξ	0,3	0,4	0,3

y_j	-1	0	2	4
p_j^η	0,45	0,15	0,25	0,15

Ищем числовые характеристики случайных величин.

$$M(\xi) = \sum_i x_i p_i^\xi = 1 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,3 = 3;$$

$$M(\eta) = \sum_j y_j p_j^\eta = (-1) \cdot 0,45 + 0 \cdot 0,15 + 2 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,15 = 0,65;$$

$$D(\xi) = \sum_i x_i^2 p_i^\xi - (M(\xi))^2 = 1 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,4 + 25 \cdot 0,3 - 9 = 2,4;$$

$$D(\eta) = \sum_j y_j^2 p_j^\eta - (M(\eta))^2 = 1 \cdot 0,45 + 0 \cdot 0,15 + 4 \cdot 0,25 + 16 \cdot 0,15 - 0,4225 = 1,9775.$$

Для подсчета коэффициента корреляции случайных величин ξ и η сначала найдем их ковариацию.

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - M(\xi)M(\eta) = 1 \cdot (-1) \cdot 0,1 + 1 \cdot 2 \cdot 0,15 + 1 \cdot 4 \cdot 0,05 + 3 \cdot (-1) \cdot 0,15 + 3 \cdot 4 \cdot 0,1 + 5 \cdot (-1) \cdot 0,2 + 5 \cdot 2 \cdot 0,1 - 3 \cdot 0,65 = 0,7.$$

$$\text{Коэффициент корреляции } \rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D(\xi)D(\eta)}} = \frac{0,7}{\sqrt{2,4 \cdot 1,9775}} \approx 0,23.$$

Далее находим условные законы распределения по формулам

$$P_\xi(x_i | y_3) = \frac{p_{i3}}{p_3^\eta}, \quad P_\eta(y_j | x_3) = \frac{p_{3j}}{p_3^\xi}.$$

x_i	1	3	5
$P_\xi(x_i y_3)$	0,6	0	0,4

y_j	-1	0	2	4
$P_\eta(y_j x_3)$	2/3	0	1/3	0

Пример 11. Дана система двух непрерывных случайных величин (ξ, η) с совместной плотностью распределения $f(x, y) = \begin{cases} C, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$. Область D ограничена кривыми $x=1, y=0, y=2x^2$. Область D показана на рисунке 8.

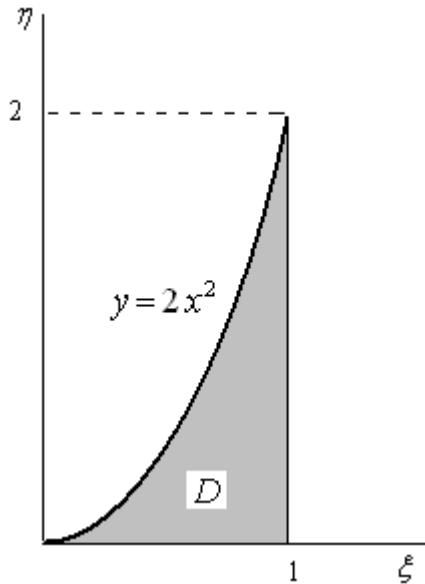


Рис. 8. Область D , на которой задано распределение (ξ, η)

Найти: 1) совместную плотность распределения $f(x, y)$, предварительно построив область D ; 2) плотности вероятности случайных величин ξ и η ; 3) математические ожидания и дисперсии случайных величин ξ и η ; 4) коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$; 5) условные плотности распределения $f_{\xi}(x|y)$ и $f_{\eta}(y|x)$; 6) условные математические ожидания $M(\xi|y), M(\eta|x)$, уравнения линий регрессии и построить их графики.

Решение.

1. Константа C определяется из условия нормировки

$$1 = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x^2} C dy = C \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2C}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2C}{3}. \text{ Отсюда } C = \frac{3}{2}.$$

Область D уже показана на рисунке 8.

2. Плотность $f_{\xi}(x)$ случайной величины ξ определяется интегрированием совместной плотности $f(x, y)$ по всем возможным при данном $\xi = x$ значениям случайной величины η (из рисунка непосредственно видно, что $0 < \eta < 2x^2$). Имеем

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^{2x^2} \frac{3}{2} dy = 3x^2, \quad 0 < x < 1. \text{ Совершенно аналогично } f_{\eta}(y) =$$

$$\int_{\sqrt{y/2}}^1 \frac{3}{2} dx = \frac{3}{2} (1 - \sqrt{y/2}), \quad 0 < y < 2.$$

3. Математические ожидания и дисперсии каждой величины ξ, η определяются согласно формулам для вычисления моментов скалярных случайных величин (см., например, пример 9). Имеем

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\eta}(y) dy = \frac{3}{2} \int_0^2 y \left(1 - \sqrt{\frac{y}{2}}\right) dy = \frac{3}{2} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{2}{5\sqrt{2}} y^{5/2}\right) \Big|_0^2 = \frac{3}{2} \left(2 - \frac{8}{5}\right) = \frac{3}{5}.$$

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx = \int_0^1 x 3x^2 dx = \left(\frac{3x^4}{4}\right) \Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

$$D(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{\eta}(y) dy - (M(\eta))^2 = \frac{3}{2} \int_0^2 y^2 \left(1 - \sqrt{\frac{y}{2}}\right) dy - \frac{9}{25} = \frac{3}{2} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{2}{7\sqrt{2}} y^{7/2}\right) \Big|_0^2 - \frac{9}{25} = \frac{37}{175}.$$

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi}(x) dx - (M(\xi))^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2 dx - \frac{9}{16} = \left(\frac{3x^5}{5}\right) \Big|_0^1 - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$$

4. Коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$ вычисляется по формуле

$$r_{\xi\eta} = \frac{M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)}{\sqrt{D(\xi)D(\eta)}}. \text{ В этом выражении неизвестен только смешанный момент}$$

второго порядка $M(\xi \cdot \eta)$.

$$M(\xi\eta) = \iint_D xy f(x, y) dx dy = \frac{3}{2} \int_0^1 x dx \int_0^{2x^2} y dy = \frac{3}{2} \int_0^1 2x^5 dx = \frac{1}{2}$$

$$\text{Тогда } r_{\xi\eta} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5}}{\sqrt{\frac{3}{80} \cdot \frac{37}{175}}} \approx 0,56.$$

5. Условные плотности распределения $f_{\xi}(x|y)$ и $f_{\eta}(y|x)$ определяются по формулам

$$f_{\xi}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_{\eta}(y)} = \frac{\cancel{3/2}}{\cancel{3/2} \left(1 - \sqrt{\frac{y}{2}}\right)} = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{y}{2}}}. \text{ Необходимо обратить внимание на то, что}$$

возможные значения аргумента x здесь зависят от y и меняются в пределах $\left(\sqrt{\frac{y}{2}}, 1\right)$.

Переменная y здесь играет роль параметра и может принимать любое значение в промежутке $[0, 2]$. Рассуждая аналогично, получим для $f_\eta(y|x)$ выражение

$$f_\eta(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_\xi(x)} = \frac{\frac{3}{2}}{3x^2} = \frac{1}{2x^2}; \quad 0 < y < 2x^2; 0 < x < 1.$$

6. Общие формулы для условных математических ожиданий $M(\xi|y)$, $M(\eta|x)$

имеют вид $M(\xi|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x/y) dx$, $M(\eta|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y/x) dy$. Учитывая замечание

предыдущего пункта о возможных значениях случайной величины при фиксированном значении другой случайной величины, получим

$$M(\xi|y) = \int_{\sqrt{y/2}}^1 x \frac{1}{1-\sqrt{y/2}} dx = \frac{1}{1-\sqrt{y/2}} \cdot \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{\sqrt{y/2}}^1 \right) = \frac{1 - \left(\sqrt{y/2}\right)^2}{2(1-\sqrt{y/2})} = \frac{1 + \sqrt{y/2}}{2}.$$

$$M(\eta|x) = \int_0^{2x^2} y \frac{1}{2x^2} dy = \frac{1}{2x^2} \cdot \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{2x^2} \right) = \frac{4x^4}{4x^2} = x^2; .$$

Графики условных математических ожиданий показаны на рисунке 9.

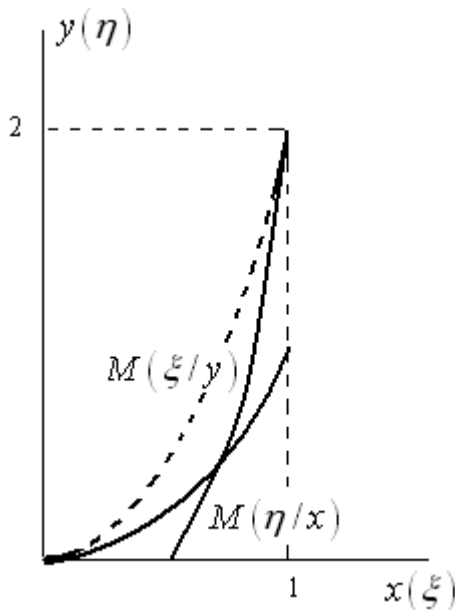


Рис.9. Графики условных математических ожиданий

Пример 12.

а) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $z = 3\xi - 8\eta + 4$, где (ξ, η) - система случайных величин из примера 11;

в) Найти функцию распределения, плотность и математическое ожидание площади прямоугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,\eta)$, $(\xi,0)$, (ξ,η) , где (ξ,η) - система случайных величин из примера 11.

Решение.

а)

$$M(z) = M(3\xi - 8\eta + 4) = 3M\xi - 8M\eta + 4 = \frac{9}{4} - \frac{24}{5} + 4 = \frac{29}{20}$$

$$\begin{aligned} D(z) &= D(3\xi - 8\eta + 4) = D(3\xi - 8\eta) = 9D\xi + 64D\eta + 2 \cdot 3 \cdot (-8) \cdot \text{cov}(\xi, \eta) = \\ &= 9D\xi + 64D\eta + 2 \cdot 3 \cdot (-8) \cdot (M(\xi\eta) - M\xi M\eta) = \frac{27}{80} + \frac{2368}{175} - 48 \cdot \frac{1}{20} \approx \\ &\approx 11,49. \end{aligned}$$

в) Так как $\xi > 0, \eta > 0$, то площадь прямоугольника S равна $S = \xi \cdot \eta$. Проще всего вычислить среднее значение $MS = M(\xi\eta) = \text{cov}(\xi, \eta) + M\xi M\eta = 0,5$.

Нетрудно видеть, что возможные значения S лежат в интервале $[0, 2]$. Функция распределения $F_S(z)$ случайной величины S вычисляется как интеграл от совместной плотности $f(x, y)$ по области $D_z = \{(x, y) \mid x \cdot y < z \cap D, 0 < z < 2\}$ (см. рисунок 10).

Разбивая область интегрирования на две части $D_z = D_z^1 \cup D_z^2$, $D_z^1 = \{(x, y) \mid x \cdot y < z \cap D, 0 < x < x_0\}$, $D_z^2 = \{(x, y) \mid x \cdot y < z \cap D, x_0 < x < 1\}$, где $x_0 = \sqrt[3]{z/2}$ - абсцисса точки пересечения кривых $y = 2x^2$, $x \cdot y = z$, получим

$$\begin{aligned} F_S(z) &= P(\xi \cdot \eta < z) = \iint_{D_z} f(x, y) dx dy = \iint_{D_z^1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_z^2} f(x, y) dx dy = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{x_0} dx \int_0^{2x^2} dy + \frac{3}{2} \int_{x_0}^1 dx \int_0^{z/x} dy = \frac{3}{2} \left[\int_0^{x_0} 2x^2 dx + \int_{x_0}^1 \frac{z}{x} dx \right] = x^3 \Big|_0^{x_0} + \frac{3}{2} z \cdot \ln x \Big|_{x_0}^1 = \\ &= \frac{z}{2} \left(1 - \ln \left(\frac{z}{2} \right) \right), \quad 0 < z \leq 2. \end{aligned}$$

Тогда плотность $f_s(z)$ имеет вид $f_s(z) = F'_s(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{2}{z}, & z \in (0, 2] \\ 0, & z \notin (0, 2] \end{cases}$.

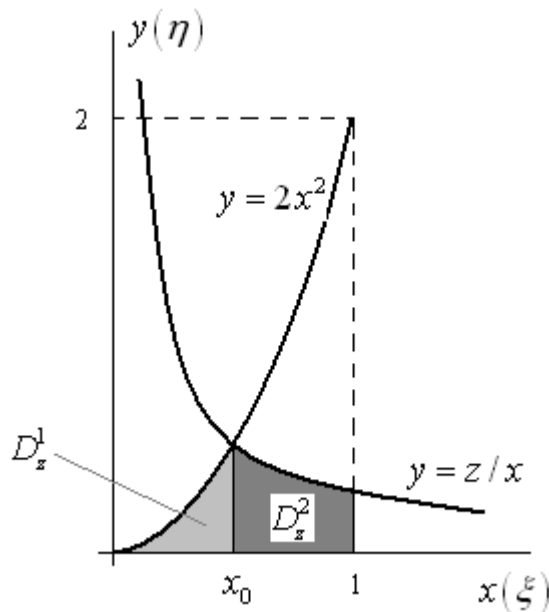


Рис. 10. Разбиение области интегрирования

2. Задачи типового расчета.

Задача 1. Одновременно подбрасывают две игральные кости. В вариантах 1-10 найти вероятность того, что сумма выпавших очков: 1) равна k ; 2) меньше $k+1$; 3) больше $k-1$; 4) заключена в промежутке $[\alpha; \beta]$. В вариантах 11-30 найти вероятность

того, что произведение выпавших очков: 1) равно k ; 2) меньше $k+1$; 3) больше $k-1$; 4) заключено в промежутке $[\alpha; \beta]$.

Задача 2. На некоторое обслуживающее устройство поступают две заявки. Каждая может поступить в любой момент времени в течение T минут. Время обслуживания первой заявки τ_1 минут, второй - τ_2 минут. При поступлении заявки на занятое устройство она не принимается. При поступлении заявки на свободное устройство даже в последний момент времени T , она обслуживается. Найти вероятность того, что: 1) обе заявки будут обслужены; 2) будет обслужена ровно одна заявка.

Задача 3. Задана структурная схема надежности системы, состоящей из пяти элементов. Событие $\bar{A}_i$ - отказ i -го элемента за некоторый промежуток времени. Вероятности безотказной работы элементов заданы:

$$P(A_i) = 0,95, \quad i = 1, 3, 5; \quad P(A_j) = 0,9, \quad j = 2, 4.$$

Событие A состоит в безотказной работе всей системы за рассматриваемый промежуток времени (события A_i независимы в совокупности). Требуется: 1) выразить событие A через A_i или $\bar{A}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$); 2) найти вероятность $P(A)$ безотказной работы системы.

Задача 4. Из партии, содержащей n изделий, среди которых k - высшего сорта, для контроля последовательно выбирают наугад m изделий. Найти вероятность того, что среди выбранных изделий окажется ровно ℓ высшего сорта при условии, что выборка производится: 1) с возвращением (выбранное изделие после проверки возвращается обратно в партию); 2) без возвращения (выбранное изделие в партию не возвращается).

Задача 5. На склад поступили детали, изготавливаемые на трех станках. На i -м станке изготовлено R_i % деталей ($i = 1, 2, 3$). Вероятность выпуска бракованных деталей на i -м станке равна P_i ($i = 1, 2, 3$). 1) Определить вероятность того, что деталь, наудачу взятая со склада оказалась бракованной. 2) Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена на j -м станке.

Задача 6. В отдел технического контроля поступает партия, содержащая N изделий, среди которых имеется M бракованных. Контролер для контроля отбирает 3 изделия, при этом в бракованном изделии он обнаруживает брак с вероятностью P . Партия бракуется, если среди трех отобранных для проверки изделий обнаружено хотя бы одно бракованное изделие. Найти вероятность того, что данная партия изделий будут забракована.

Задача 7. Произведено n независимых выстрелов по мишени с вероятностью попадания p . Пусть случайная величина ξ - число попаданий в цель. Для случайной величины ξ найти: 1) распределение вероятностей; 2) функцию распределения и построить ее график; 3) вероятность попадания случайной величины в интервал $(\alpha; \beta)$; 4) математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

Задача 8. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей $f(x)$. Для случайной величины ξ найти: 1) ее функцию распределения $F(x)$ и построить графики функции распределения $F(x)$ и плотности распределения вероятностей $f(x)$; 2) вероятность попадания случайной величины в интервал $(\alpha; \beta)$; 4) математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

Задача 9. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид $f(x) = \begin{cases} kx, & x \in [0; c] \\ 0, & x \notin [0; c] \end{cases}$. Случайная величина η связана со случайной величиной ξ функциональной зависимостью $\eta = a\xi^2 + b$. Найти: 1) константу k ; 2) математическое ожидание и дисперсию случайной величины η , используя плотность распределения вероятностей случайной величины ξ ; 3) функцию распределения и плотность распределения вероятностей случайной величины η и построить их графики; 4) математическое ожидание и дисперсию случайной величины η , используя найденную плотность распределения вероятностей.

Задача 10. Дана система двух дискретных случайных величин (ξ, η) , закон распределения которой задан таблицей $p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j)$ $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$, где $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, y_1 = -1, y_2 = 0, y_3 = 1, y_4 = 2$. Найти: 1) законы распределения случайных величин ξ и η ; 2) математические ожидания и дисперсии случайных величин ξ и η ; 3) коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$; 4) условные распределения $P_\xi(x_i|y_2), P_\eta(y_j|x_2)$; 5) условные математические ожидания $M(\xi|y_2), M(\eta|x_2)$.

Задача 11. Система непрерывных случайных величин (η, ξ) распределена равномерно в области D , ограниченной линиями $x = a, y = b, y = \beta|x|^\alpha$. Найти: 1) совместную плотность распределения $f(x, y)$, предварительно построив область D ; 2) плотности вероятности случайных величин ξ и η ; 3) математические ожидания и дисперсии случайных величин ξ и η ; 4) коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$; 5) условные плотности распределения $f_\xi(x|y)$ и $f_\eta(y|x)$; 6) условные математические ожидания $M(\xi|y), M(\eta|x)$, уравнения линий регрессии и построить их графики.

Задача 12.

а) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi = a\xi + b\eta + c$, где (ξ, η) - система случайных величин из задачи 11;

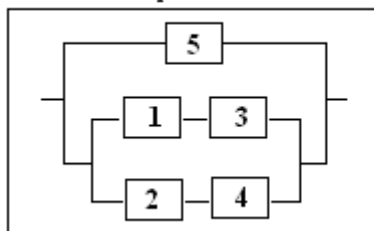
в) Найти функцию распределения, плотность и математическое ожидание площади прямоугольника с вершинами в точках $(0,0), (0,\eta), (\xi,0), (\xi,\eta)$, где (ξ, η) - система случайных величин из задачи 11.

3. Варианты типового расчета

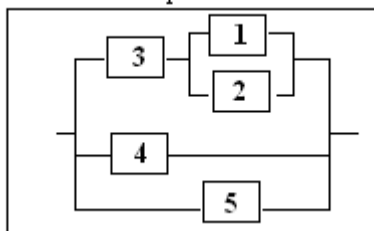
Вар. №	Задача 1			Задача 2			Задача 4				Задача 7			
	к	α	β	T	τ_1	τ_2	n	k	m	l	n	p	α	β
1	3	4	6	100	5	5	12	6	6	5	4	0,2	-1	0,5
2	4	2	5	100	5	10	12	6	6	4	4	0,3	0,5	3
3	5	3	7	100	5	15	12	6	6	3	4	0,4	1,5	2,5
4	6	2	6	100	5	20	12	6	6	2	4	0,5	1,5	3
5	7	3	5	100	5	25	12	7	6	5	4	0,6	0,5	2
6	8	3	4	100	10	10	12	7	6	4	4	0,7	1,3	2
7	9	3	8	100	10	15	12	7	6	3	4	0,8	2	3,5
8	10	4	7	100	10	20	12	7	6	2	4	0,9	1	3
9	2	9	12	100	10	25	12	7	6	1	5	0,1	0,5	4
10	11	8	12	100	10	30	12	8	6	5	5	0,2	-1	0,5
11	4	4	10	150	15	15	12	8	6	4	5	0,3	0,5	3
12	5	2	8	150	15	20	12	8	6	3	5	0,4	0,5	2,5
13	6	5	17	150	15	25	12	8	6	2	5	0,5	1,5	3
14	7	8	12	150	15	30	12	9	6	5	5	0,6	0,5	2
15	8	10	13	150	15	35	12	9	6	4	5	0,7	1,3	2
16	9	20	28	150	20	20	12	10	6	4	5	0,8	2	3,5
17	10	30	35	150	20	25	12	6	5	4	5	0,9	1	3
18	11	21	26	150	20	30	12	6	5	3	6	0,1	3	4
19	12	15	18	150	20	35	12	6	5	2	6	0,2	2	6
20	13	20	23	150	20	40	12	7	5	4	6	0,3	1,5	4
21	14	19	24	200	25	25	12	7	5	3	6	0,4	1	6
22	15	24	28	200	25	30	12	7	5	2	6	0,5	2	7
23	16	28	31	200	25	35	12	7	5	1	6	0,6	4	7
24	17	21	36	200	25	40	12	8	5	4	6	0,7	0,5	3
25	18	17	22	200	25	45	12	8	5	3	6	0,8	-1	4
26	19	15	19	200	30	30	12	8	5	2	6	0,9	-2	3
27	20	22	28	200	30	35	12	8	5	1	3	0,1	0	2
28	21	10	15	200	30	40	12	9	5	4	3	0,2	0,5	3
29	24	12	18	200	30	45	12	9	5	3	3	0,3	-1	1,5
30	25	3	8	200	30	50	12	9	5	2	3	0,5	2	4

Схемы к Задаче 3.

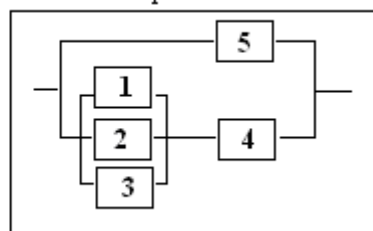
Вар. №1



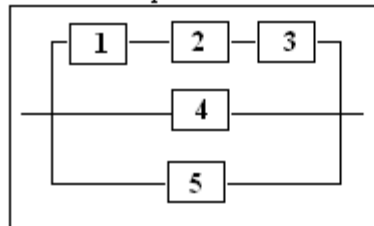
Вар. № 2



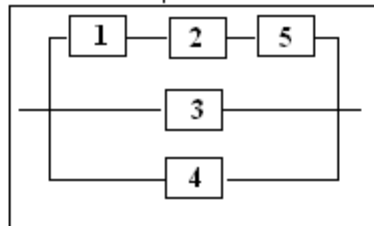
Вар. № 3



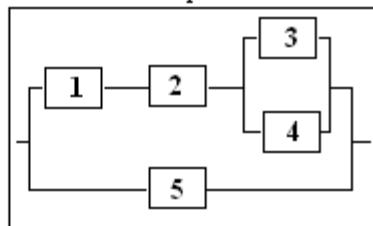
Вар. №4



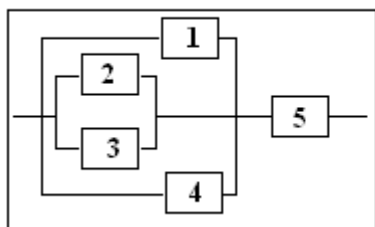
Вар. №5



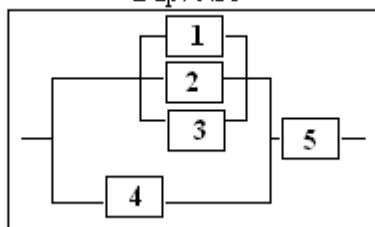
Вар. №6



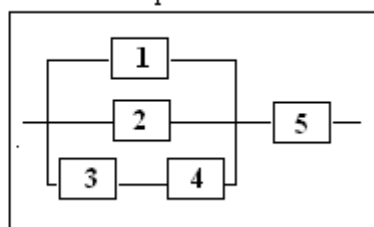
Вар. №7



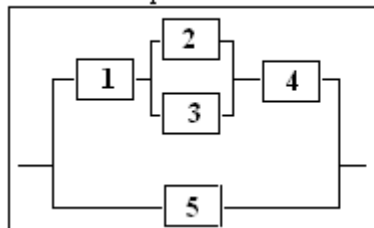
Вар. №8



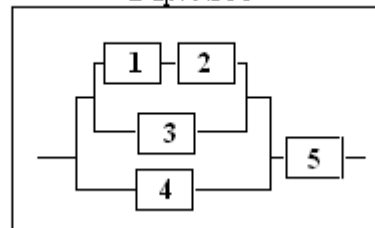
Вар. №9



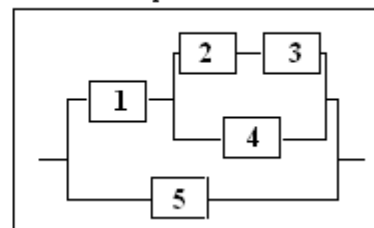
Вар. №10



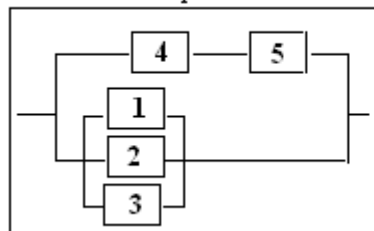
Вар. №11



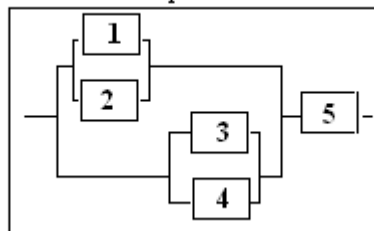
Вар. №12



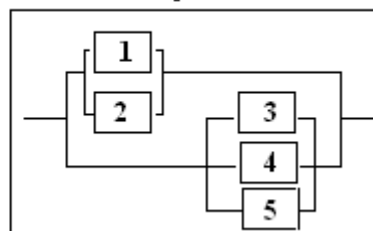
Вар. №13



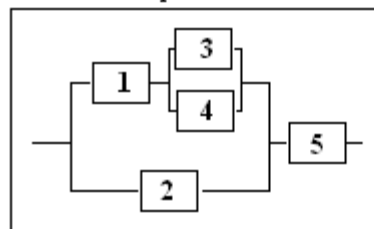
Вар. №14



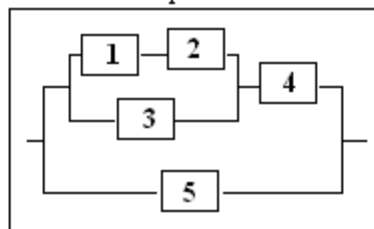
Вар. №15



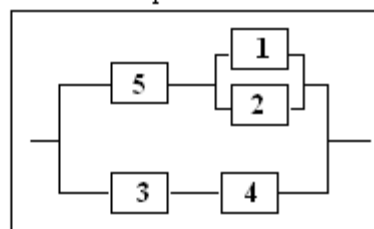
Вар. №16



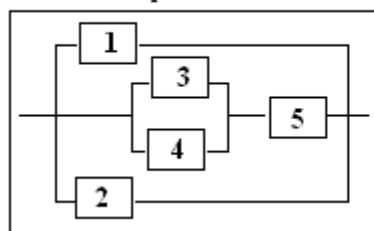
Вар. №17



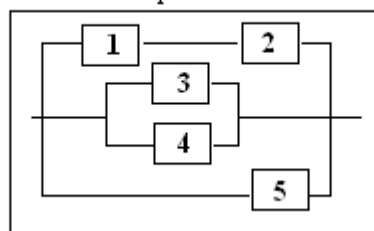
Вар. №18



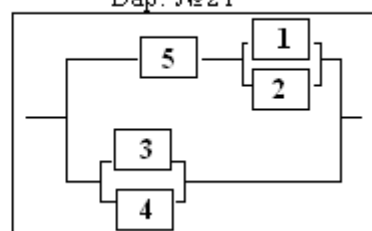
Bap. №19



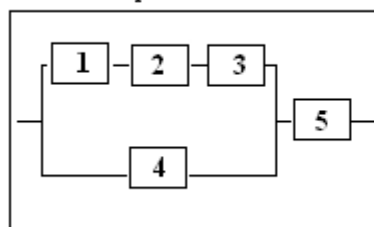
Bap. №20



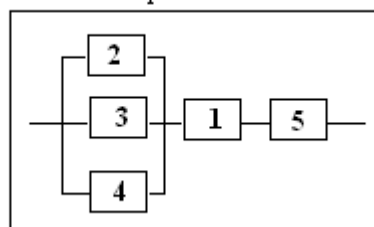
Bap. №21



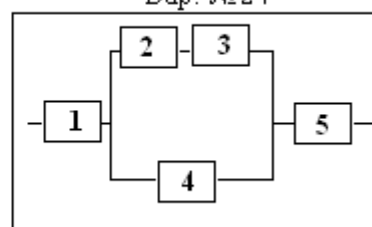
Bap. №22



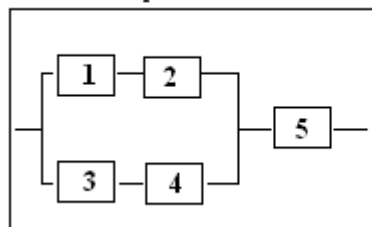
Bap. №23



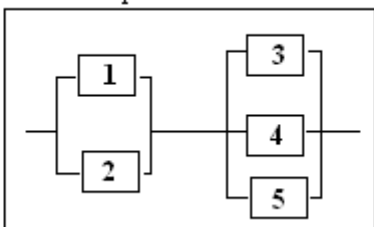
Bap. №24



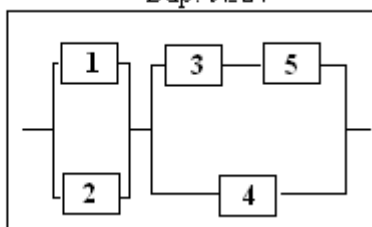
Bap. №25



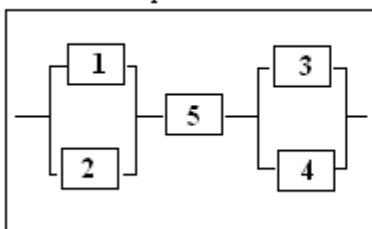
Bap. №26



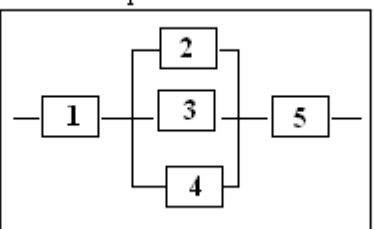
Bap. №27



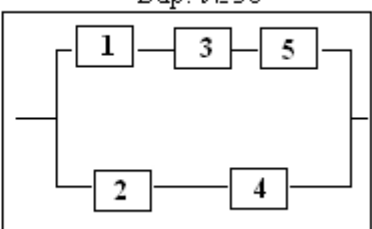
Bap. №28



Bap. №29



Bap. №30



Вар.	Задача 5							Задача 6			Задача 9		
№	R_1	R_2	R_3	P_1	P_2	P_3	j	N	M	P	a	в	с
1	10	30	60	0,01	0,02	0,03	1	20	6	0,85	4	5	1
2	30	10	60	0,01	0,04	0,03	2	20	5	0,90	2	2	2
3	10	60	30	0,02	0,04	0,03	3	20	4	0,95	1	-6	3
4	30	60	10	0,03	0,01	0,05	1	16	4	0,85	5	4	1
5	60	10	30	0,02	0,05	0,01	2	16	5	0,90	3	3	2
6	60	30	10	0,01	0,03	0,02	3	16	6	0,95	2	-5	3
7	20	35	45	0,01	0,03	0,04	1	15	6	0,85	4	3	1
8	20	45	35	0,02	0,03	0,04	2	15	5	0,90	2	4	2
9	35	20	45	0,03	0,05	0,03	3	15	4	0,95	1	-4	3
10	35	45	20	0,02	0,01	0,05	1	18	5	0,85	5	2	1
11	45	20	35	0,02	0,03	0,91	2	18	6	0,90	3	5	2
12	45	35	20	0,03	0,01	0,04	3	18	4	0,95	2	-3	3
13	25	40	35	0,03	0,04	0,02	1	17	4	0,85	4	-1	1
14	25	35	40	0,05	0,01	0,03	2	17	5	0,90	2	-1	2
15	40	35	25	0,05	0,01	0,02	3	17	6	0,95	1	1	3
16	40	25	35	0,02	0,01	0,03	1	25	7	0,85	5	-2	1
17	35	40	25	0,03	0,01	0,02	2	25	6	0,90	3	-2	2
18	35	25	40	0,03	0,04	0,01	3	25	5	0,95	2	2	3
19	40	15	45	0,03	0,02	0,04	1	24	8	0,85	4	-3	1
20	40	45	15	0,05	0,03	0,01	2	24	6	0,90	2	-3	2
21	15	40	45	0,05	0,02	0,01	3	24	4	0,95	1	3	3
22	15	45	40	0,03	0,02	0,01	1	22	5	0,85	5	-4	1
23	45	15	40	0,04	0,01	0,03	2	22	5	0,90	3	-4	2
24	45	40	15	0,04	0,02	0,03	3	22	4	0,95	2	4	3
25	10	55	35	0,01	0,03	0,05	1	21	7	0,85	4	-4	1
26	10	35	55	0,04	0,03	0,02	2	21	6	0,90	2	-5	2
27	55	10	35	0,01	0,05	0,03	3	21	5	0,95	1	-6	3
28	55	35	10	0,04	0,03	0,02	1	23	7	0,85	5	6	1
29	35	10	55	0,01	0,05	0,02	2	23	6	0,90	3	0	2
30	35	55	10	0,04	0,03	0,02	3	23	5	0,95	2	0	3

Вар.	Задача 8				Задача 11					Задача 12		
№	$f(x)$	λ	α	β	a	b	α	β	x	a	b	c
1	Экспоненциальное Распределение $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}, x>0$	0,5	1	3	1	0	1	2	>0	2	-7	1
2		0,4	1	4	1	0	2	2	>0	2	-6	-1
3		0,3	2	6	1	0	1/2	2	>0	2	-5	2
4		0,2	3	7	1	0	3	2	>0	2	-4	-2
5		0,1	4	12	1	0	1	-2	>0	2	-3	3
6		0,6	1	4	1	0	2	-2	>0	-2	7	-3
7		0,7	1	3	1	0	1/2	-2	>0	-2	6	4
8		0,8	1	5	1	0	3	-3	>0	-2	5	-4
9		0,9	1	4	0	2	1	2	>0	-2	4	5
10		1	1	3	0	2	2	2	>0	-2	3	-5
11	Гамма- распределение ($\alpha=3$) $f(x)=\lambda^3 x^2 e^{-\lambda x}/2, x>0$	1	2	5	0	2	1/2	2	>0	3	-6	6
12		2	1	4	0	2	3	2	>0	3	-5	-6
13		3	1	5	0	-2	1	-2	>0	3	-4	7
14		1	1	4	0	-2	2	-2	>0	2	-3	-7
15		2	1	5	0	-2	1/2	-2	>0	3	-2	8
16		3	1	4	-1	0	1	2	<0	-3	6	-8
17		1	1	5	-1	0	2	2	<0	-3	5	7
18		2	2	5	-1	0	1/2	2	<0	-3	4	-7
19		3	1	6	-1	0	3	2	<0	-3	3	6
20		1	2	4	-1	0	1	-2	<0	-3	2	-6
21	Распределение Лапласа $f(x)=0,5 \lambda e^{-\lambda x }, -\infty < x < +\infty$	1	-2	1	-1	0	2	-2	<0	4	-5	5
22		2	-1	1	-1	0	1/2	-2	<0	4	-4	-5
23		3	-1	1	-1	0	3	-2	<0	4	-3	4
24		1	-1	2	0	2	1	2	<0	4	-2	-4
25		2	-2	1	0	2	2	2	<0	4	-1	3
26		3	-1	2	0	2	1/2	2	<0	-4	5	-3
27		1	-1	1	0	2	3	2	<0	-4	4	2
28		2	-1	2	0	-2	1	-2	<0	-4	3	-2
29		3	-2	1	0	-2	2	-2	<0	-4	2	1
30		1	-2	2	0	-2	1/2	-2	<0	-4	1	-1

Вар.	Задача 10											
№	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}
1	0,05	0,08	0,12	0,10	0,10	0,00	0,00	0,18	0,04	0,06	0,15	0,12
2	0	0	0,18	0,10	0,06	0,15	0,12	0,04	0,12	0,10	0,05	0,08
3	0	0,18	0,10	0	0,15	0,12	0,04	0,06	0,10	0,05	0,08	0,12
4	0	0,06	0,05	0,10	0,18	0,15	0,08	0,10	0,04	0,12	0,12	0
5	0,18	0,15	0,08	0,10	0,04	0,12	0,12	0	0,06	0,05	0,10	0
6	0,05	0,12	0,10	0	0,04	0,15	0,08	0,10	0	0,18	0,06	0,12
7	0,05	0	0,08	0,18	0,12	0,04	0,10	0,06	0,10	0,15	0	0,12
8	0	0,10	0,18	0	0,15	0,04	0,12	0,06	0,10	0,08	0,05	0,12
9	0,04	0,12	0,06	0,10	0,08	0,05	0,12	0	0,10	0,18	0	0,15
10	0	0,10	0,12	0,10	0	0,06	0,04	0,05	0,18	0,15	0,12	0,08
11	0,04	0,06	0,02	0,08	0,10	0,15	0,05	0,20	0,06	0,09	0,03	0,12
12	0,15	0,05	0,10	0,20	0,06	0,02	0,04	0,08	0,09	0,03	0,06	0,12
13	0,075	0,075	0,06	0,09	0,075	0,075	0,06	0,09	0,10	0,10	0,08	0,12
14	0,06	0,06	0,04	0,04	0,06	0,06	0,04	0,04	0,18	0,18	0,12	0,12
15	0,03	0,04	0,01	0,02	0,09	0,12	0,03	0,06	0,18	0,24	0,06	0,12
16	0,09	0,12	0,03	0,06	0,09	0,12	0,03	0,06	0,12	0,16	0,04	0,08
17	0,015	0,035	0,025	0,025	0,045	0,105	0,075	0,075	0,09	0,21	0,15	0,15
18	0,02	0,03	0,07	0,08	0,07	0,105	0,245	0,28	0,010	0,015	0,035	0,040
19	0,030	0,045	0,105	0,120	0,050	0,075	0,175	0,200	0,02	0,03	0,07	0,08
20	0,06	0,045	0,075	0,120	0,04	0,03	0,05	0,08	0,100	0,075	0,125	0,200
21	0,12	0,10	0,18	0,08	0	0	0,15	0,10	0,04	0,06	0,12	0,05
22	0,05	0,08	0,12	0,10	0	0	0,18	0,06	0,15	0,12	0,10	0,04
23	0	0,18	0,06	0,12	0,12	0,05	0	0,10	0,15	0,04	0,10	0,08
24	0,08	0,04	0,10	0,05	0,12	0,18	0,10	0,15	0	0,12	0,06	0
25	0,08	0,05	0,10	0,12	0,04	0,12	0,15	0,06	0,10	0,18	0	0
26	0,10	0	0	0,06	0,18	0,12	0,15	0,10	0,04	0,08	0,05	0,12
27	0,18	0,12	0,15	0,10	0,04	0,08	0,05	0,12	0	0	0,06	0,10
28	0,05	0,04	0,06	0,15	0,12	0,08	0,12	0,10	0,10	0	0	0,18
29	0	0,05	0,10	0,04	0,10	0,18	0,10	0,15	0	0,08	0,06	0,12
30	0,10	0	0,12	0,06	0	0,18	0,10	0,12	0,05	0,18	0,04	0,15

Литература

1. Печинкин А.В. и др. Теория вероятностей: Учебник для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. Сер. «Математика в техническом университете», вып. XVI. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. – 456 с.
2. Карташов Г.Д., Вилисова Н.Т., Тимонин В.И., Ветров Л.Г. Методические указания к выполнению ДЗ по теории вероятностей. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 41 с.