

Экзаменационная программа по курсу
«Теория вероятностей и математическая статистика»
ИБМ (2 курс, 3 семестр) 2011-12. Поток Васильева Н.С.

Модуль 1. Теория вероятностей

1. Вероятностный эксперимент, элементарные и сложные события. Алгебра событий. Вероятность события. Свойства вероятности. Классическая схема вероятности. Геометрическая вероятность. Аксиоматическое определение вероятностного пространства.
2. Элементы комбинаторики. Основные правила комбинаторики. Формулы для числа перестановок, сочетаний и размещений (с доказательством). Полиномиальное и гипергеометрическое распределение.
3. Условная вероятность. Зависимые и независимые события. Независимость попарная и в совокупности. Формула умножения вероятностей для зависимых и независимых событий.
4. Формула сложения вероятностей совместных и несовместных событий. Формулы полной вероятности и Байеса (с доказательством).
5. Схема Бернулли (Вывод формулы Бернулли). Предельные теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа (Вывод локальной формулы из интегральной).
6. Случайные величины и их законы распределения. Функция распределения, плотность распределения и их свойства (с доказательством). Дискретные и непрерывные случайные величины.
7. Основные законы распределения: геометрическое, экспоненциальное (уметь доказывать отсутствие последствия); биномиальное, пуассоновское, нормальное; полиномиальное.
8. Числовые характеристики случайных величин (математическое ожидание и дисперсия) и их свойства. Моменты k -го порядка – начальные и центральные.
9. Функция от случайной величины. Ее распределение и числовые характеристики.
10. Пара случайных величин (дискретный и непрерывный случаи). Совместная функция распределения, её свойства. Совместная и частная плотности. Условные распределения. Ковариация и коэффициент корреляции пары случайных величин, их свойства. Свойства ковариационной матрицы.
11. Двумерное нормальное (гауссовское) распределение (знать матричную форму записи). Смысл параметров. Вывести формулу условного распределения.
12. Гамма-функция, ее свойства и применение для вычисления несобственных интегралов.
13. Гамма-распределение и его свойства.
14. Распределение суммы независимых случайных величин, Доказательство формулы свертки плотностей. Свертка гамма – плотностей. Формула для плотности распределения χ^2 .
15. Производящая функции случайной величины, её свойства. Использование для вычисления моментов.
16. Центральная предельная теорема (формулировка).
17. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Бернулли и в форме Чебышева. Усиленный закон больших чисел (формулировки).

Модуль 2. Математическая статистика

1. Задачи математической статистики. Выборка, вариационный ряд, эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко-Кантелли.
2. Эмпирические моменты k -го порядка – начальные и центральные.
3. Точечное оценивание параметров. Состоятельность, несмещенность и эффективность оценок.
4. Неравенство Рао-Крамера. Доказать, что эмпирическое среднее – несмещенная и эффективная (при известной дисперсии) оценка для неизвестного математического ожидания.
5. Оценивание параметров методами моментов и максимального правдоподобия. Оценивание параметров известных распределений.

6. Распределения χ^2 и Стьюдента их свойства и применения в математической статистике.
7. Понятие доверительного интервала (с заданным уровнем доверия). Метод построения доверительного интервала (при помощи центральных статистик).
8. Доверительные интервалы для параметров гауссовой случайной величины - математического ожидания и дисперсии (при известном или неизвестном значении другого параметра).
9. Построение доверительных интервалов для параметров пуассоновского и экспоненциального распределений (с обоснованием).
10. Построение приближенного доверительного интервала для вероятности успеха в схеме Бернулли (с обоснованием).
11. Задача о проверке гипотез. Ошибки первого и второго рода. Понятие критической области. Мощность критерия.
12. Оптимальность критерия. Лемма Неймана-Пирсона о выборе критической области. Проверка гипотез о значении математического ожидания и дисперсии гауссовой случайной величины с известным (неизвестным) значением второго параметра.
13. Сравнение гипотез о параметрах двух нормальных генеральных совокупностей.
14. Критерии согласия χ^2 Пирсона и Колмогорова.
15. Метод наименьших квадратов. Точечное оценивание коэффициентов линейной регрессии.

Дополнительные вопросы (сверх обязательной программы).

Студенты могут их подготовить по своему желанию

1. Характеристическая функция случайной величины, ее свойства и использование для вычисления моментов случайных величин?
2. Какое нужно выполнить преобразование равномерно распределенной на отрезке $[a; b]$ случайной величины ξ , чтобы получить показательно распределенную величину η с заданным параметром λ ?
3. Доказать устойчивость нормального распределения относительно сложения, т.е. что если ξ_1 и ξ_2 независимые случайные величины с параметрами a_1, σ_1 и a_2, σ_2 соответственно, то $\eta = \xi_1 + \xi_2$ тоже распределена нормально (с какими параметрами?)
4. Различные виды сходимости случайных величин, связь между ними.
5. Независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют геометрическое распределение (с параметрами p_1 и p_2). Доказать, что случайная величина $\eta = \min\{\xi_1; \xi_2\}$ также распределена геометрически и найти её параметр.
6. Каково предельное распределение для распределения Стьюдента при увеличении до бесконечности числа его степеней свободы?
7. Вычислить характеристическую функцию для показательного распределения
8. Доказать: неравенство Чебышева. Доказать закон больших чисел в форме Бернулли и в форме Чебышева.
9. Вычислить производящую функцию для распределения Бернулли
10. Вычислить характеристическую функцию для нормального распределения
11. Вычислить производящую функцию для геометрического распределения
12. Доказать устойчивость распределения Пуассона относительно сложения (при одинаковых значениях параметра)
13. Доказать эффективность оценки $\hat{\mu} = \bar{X}$ математического ожидания μ нормальной случайной величины с известной дисперсией.