

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА
по курсу «Кратные интегралы и ряды»
2 курс 3-й семестр, факультеты МТ (кроме МТ-4 и МТ-8), РК (кроме РК-6)
2011-2012 уч. год

Модуль 1. Кратные интегралы

1. Определение двойного интеграла. Доказать свойства двойного интеграла (линейность, интеграл от константы, интегрирование неравенств). Сформулировать свойство аддитивности. Доказать теоремы об оценке и о среднем для двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному (доказать теорему для случая $f(x, y) \geq 0$ для $\forall (x, y) \in D$). Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат.

2. Сформулировать теорему о замене переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.

3. Применения двойного интеграла: вычисление площади плоской фигуры, площади поверхности, объема цилиндрического тела (ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу поверхностью $z = g(x, y)$, сбоку цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными Oz), массы неоднородной плоской пластины, координат ее центра масс и моментов инерции (вывод всех формул).

4. Определение тройного интеграла. Доказать свойства тройного интеграла (линейность, интеграл от константы, интегрирование неравенств). Сформулировать свойство аддитивности. Доказать теоремы об оценке и о среднем для тройного интеграла. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат.

5. Сформулировать теорему о замене переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в цилиндрической и сферической системах координат.

6. Приложения тройного интеграла: вычисление объема тела, его массы, координат центра масс и моментов инерции (вывод формул).

7. Несобственные двойные интегралы 1-го рода (по неограниченной области). Примеры сходящихся и расходящихся интегралов (с обоснованием). Свойство сходящихся несобственных интегралов от неотрицательных функций (без доказательства). Вычисление интеграла Пуассона (вывод).

Модуль 2. Криволинейные и поверхностные интегралы, теория поля

8. Скалярные и векторные поля. Градиент скалярного поля и его свойства. Векторные линии векторного поля и их дифференциальные уравнения.

9. Определение криволинейного интеграла 1-го рода. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода, доказать его свойства (линейность, интеграл от константы, переход к интегралам в неравенстве). Сформулировать свойство аддитивности. Доказать теоремы об оценке и о среднем. Применения криволинейного интеграла 1-го рода.

10. Определение криволинейного интеграла 2-го рода, доказать его свойства. Вычисление в декартовой системе координат. Работа векторного поля вдоль ориентированного пути. Циркуляция векторного поля по замкнутому контуру.

11. Вывести формулу Грина для односвязной плоской области. Условия независимости криволинейного интеграла на плоскости от пути интегрирования. Вычисление интеграла от полного дифференциала. Вывод формулы Ньютона-Лейбница. Нахождение функции по ее полному дифференциалу.

12. Поверхностный интеграл 1-го рода: определение, свойства и вычисление в декартовой системе координат. Применение поверхностного интеграла 1-го рода.

13. Поверхностный интеграл 2-го рода: определение, свойства и вычисление в декартовой системе координат. Поток векторного поля через ориентированную поверхность.

14. Теорема Гаусса-Остроградского (доказательство для односвязной и правильной области). Дивергенция векторного поля: определение и физический смысл. Вывод формулы для вычисления дивергенции в декартовой системе координат. Соленоидальное векторное поле.

15. Ротор векторного поля, его физический смысл. Формулировка теоремы Стокса. Доказать соленоидальность ротора произвольного векторного поля.

16. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода в пространстве от пути интегрирования. Потенциальное векторное поле, доказать свойства. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода в потенциальном поле.

17. Оператор Гамильтона. Запись дифференциальных операций векторного анализа с помощью оператора Гамильтона. Оператор Лапласа. Гармонические скалярные поля. Примеры.

Модуль 3. Числовые ряды

18. Числовые ряды. Определение частичной суммы, сходимости, расходимости числового ряда, его суммы. Доказать свойства сходящихся числовых рядов. Доказать необходимое условие сходимости ряда и его следствие. Примеры.

19. Знакоположительные ряды, доказать критерий сходимости такого ряда. Доказать признаки сравнения: (а) мажорантный; (б) предельный. Доказать интегральный признак. Исследование сходимости рядов Дирихле (с выводом). Примеры.

20. Признаки сходимости Даламбера и Коши (доказать признак Даламбера). Примеры

21. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов. Доказать теорему о связи обычной сходимости ряда и абсолютной. Примеры.

22. Знакопередающиеся ряды. Доказать признак Лейбница с оценкой остатка ряда. Примеры.

23. Сформулировать теоремы о перестановки членов ряда, сходящегося: (а) абсолютно; (б) условно.

Модуль 4. Численные методы

24. Абсолютная и относительная погрешность. Неустраняемая, методическая и вычислительная погрешности.

25. Метод Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса с выбором главного элемента. Пример решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

26. Метод прогонки. Достаточные условия применимости метода прогонки.

27. Определение интерполяции. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа (без доказательства).

28. Определение сплайна. Кубические сплайны. Алгоритм построения сплайна. Система уравнений для определения коэффициентов сплайна.

29. Аппроксимация по методу наименьших квадратов (МНК). Приближение таблично заданных функций многочленами по МНК.

30. Численное интегрирование. Определение квадратурной формулы. Метод прямоугольников (вывод формулы с оценкой погрешности).

31. Метод трапеций. Порядок точности при численном интегрировании. Правило Рунге вычисления погрешности. Уточнение по Ричардсону.

32. Метод Симпсона, вывод формулы (без оценки погрешности). Алгоритм вычисления интеграла с заданной точностью.

33. Уравнение $f(x)=0$. Решение уравнений методом деления отрезка пополам. Метод простых итераций. Условие сходимости итерационной последовательности и скорость ее сходимости.

34. Метод Ньютона (метод касательных). Геометрическая интерпретация метода касательных. Скорость сходимости метода Ньютона.

35. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера. Порядок точности метода Эйлера. Неявный метод Эйлера и метод трапеций.

36. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Алгоритм метода при решении с заданной точностью.

37. Краевая задача для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка. Разностная аппроксимация производных. Сведение численного решения к решению трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений.

38. Многошаговые методы решения дифференциальных уравнений. Методы Адамса. Вывод метода Адамса 2-го порядка точности.

Дополнительные вопросы (сверх обязательной программы).

Студенты могут их приготовить **самостоятельно** по своему желанию

1. Доказать формулу Стокса.
2. Вычислить $\oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$. Рассмотреть два случая: (а) начало координат находится вне контура C ; (б) начало координат находится внутри контура C .
3. Выполнив замену переменных $u = x \cdot y, v = \frac{y}{x}$, вычислить площадь области D , ограниченной кривыми: $x \cdot y = 2, x \cdot y = 3, y = x, y = 2x$.
4. Выполнив замену переменных $u = x \cdot y, v = \frac{y}{x^2}$, найти координаты центра масс пластины, ограниченной кривыми: $x \cdot y = 3, x \cdot y = 4, y = 2x^2, y = 3x^2$.
5. Геометрический смысл якобиана отображения $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}, (u, v) \in D^*$.
6. Написать и вывести формулы для вычисления поверхностного интеграла: (а) первого рода; (б) второго рода для поверхности, заданной параметрически: $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$.
7. Доказать закон Архимеда.
8. Написать и вывести формулы для градиента, дивергенции и ротора различных произведений скалярных и векторных полей (например, $\operatorname{div}(U \cdot F), \operatorname{grad}(F_1 \cdot F_2), \operatorname{rot}[F_1 \times F_2]$).
9. Написать и вывести формулы для всех повторных операций векторного анализа, примененных к произвольным скалярному полю U или векторному полю F (например, $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U), \operatorname{grad}(\operatorname{div} F)$).
10. Центральные скалярные и векторные поля, формулы для градиента, дивергенции и ротора таких полей.
11. Выражения для градиента, дивергенции, ротора и лапласиана в цилиндрических и сферических координатах (с обоснованием).
12. Свойства безвихревых векторных полей. Связь с потенциальными полями.
13. Векторный потенциал векторного поля. Свойства векторных полей, имеющих векторный потенциал, связь с соленоидальными полями.
14. Привести примеры (из физики): (а) безвихревого не потенциального поля; (б) соленоидального поля, не имеющего векторного потенциала.
15. При каком условии: (а) безвихревое поле в области Ω является потенциальным? (б) соленоидальное поле в области Ω имеет векторный потенциал?
16. Доказать, что если H_n – частичная сумма гармонического ряда, то $H_n \sim \ln n$ при $n \rightarrow \infty$.
17. Найти сумму числового ряда
(а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; (в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$; (г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 8n - 5}$.
18. Признаки Абеля и Дирихле для числовых рядов (с доказательством); примеры.
19. Доказать условную сходимость ряда вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha n)}{n}$ или $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha n)}{\sqrt{n}}$ ($\alpha = \text{const}$)
20. Формула Абеля суммирования рядов. Вычислить с помощью неё сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.
21. Признак Гаусса для числового ряда, примеры.