

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА
по курсу «Кратные интегралы и ряды»
2 курс 3-й семестр, для МТ -4
2011-2012 уч. год

Модуль 1. Кратные интегралы

1. Определение двойного интеграла. Доказать свойства двойного интеграла (линейность, переход к интегралам в неравенстве, интеграл от константы), сформулировать свойство аддитивности. Доказать теоремы об оценке и о среднем для двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат.
2. Сформулировать теорему о замене переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.
3. Применения двойного интеграла: вычисление площади плоской фигуры, площади поверхности, объема тела, массы неоднородной плоской пластины, координат ее центра масс и моментов инерции (вывод всех формул).
4. Определение тройного интеграла. Доказать свойства тройного интеграла. (линейность, переход к интегралам в неравенстве, интеграл от константы), сформулировать свойство аддитивности. Доказать теоремы об оценке и о среднем для тройного интеграла. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат.
5. Сформулировать теорему о замене переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в цилиндрической и сферической системах координат.
6. Приложения тройного интеграла: вычисление объема тела, его массы, координат центра масс и моментов инерции (вывод формул).
7. Несобственные двойные интегралы 1-го рода (по неограниченной области). Примеры сходящихся и расходящихся интегралов (с обоснованием). Свойство сходящихся несобственных интегралов от неотрицательных функций (без доказательства). Вычисление интеграла Пуассона (вывод).

Модуль 2. Криволинейные и поверхностные интегралы, теория поля

8. Скалярные и векторные поля. Градиент скалярного поля и его свойства. Векторные линии векторного поля и их дифференциальные уравнения.
9. Определение криволинейного интеграла 1-го рода. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода, доказать его свойства (линейность, переход к интегралам в неравенстве, интеграл от константы), сформулировать свойство аддитивности. Доказать теоремы об оценке и о среднем. Применения криволинейного интеграла 1-го рода.
10. Определение криволинейного интеграла 2-го рода, доказать его и свойства. Вычисление в декартовой системе координат. Работа векторного поля вдоль ориентированного пути. Циркуляция векторного поля по замкнутому контуру.
11. Вывести формулу Грина для односвязной плоской области. Условия независимости криволинейного интеграла на плоскости от пути интегрирования. Вычисление интеграла от полного дифференциала. Вывод формулы Ньютона-Лейбница. Нахождение функции по ее полному дифференциалу.
12. Поверхностный интеграл 1-го рода: определение, свойства и вычисление в декартовой системе координат. Применение поверхностного интеграла 1-го рода.
13. Поверхностный интеграл 2-го рода: определение, свойства и вычисление в декартовой системе координат. Поток векторного поля через ориентированную поверхность.
14. Теорема Гаусса-Остроградского (доказательство для односвязной и правильной области). Дивергенция векторного поля: определение и физический смысл. Вывод формулы для вычисления дивергенции в декартовой системе координат. Соленоидальное векторное поле.
15. Формулировка теоремы Стокса. Ротор векторного поля, его физический смысл. Доказать соленоидальность ротора произвольного векторного поля.

16. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода в пространстве от пути интегрирования. Потенциальное векторное поле, доказать его свойства. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода в потенциальном поле.

17. Оператор Гамильтона. Запись дифференциальных операций векторного анализа с помощью оператора Гамильтона. Оператор Лапласа. Гармонические скалярные поля. Примеры.

Модуль 3. Численные методы

18. Абсолютная и относительная погрешность. Неустраняемая, методическая и вычислительная погрешности.

19. Метод Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса с выбором главного элемента. Пример решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

20. Метод прогонки. Достаточные условия применимости метода прогонки.

21. Определение интерполяции. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа (без доказательства).

22. Определение сплайна. Кубические сплайны. Алгоритм построения сплайна. Система уравнений для определения коэффициентов сплайна.

23. Аппроксимация по методу наименьших квадратов (МНК). Приближение таблично заданных функций многочленами по МНК.

24. Численное интегрирование. Определение квадратурной формулы. Метод прямоугольников (вывод формулы с оценкой погрешности).

25. Метод трапеций. Порядок точности при численном интегрировании. Правило Рунге вычисления погрешности. Уточнение по Ричардсону.

26. Метод Симпсона, вывод формулы (без оценки погрешности). Алгоритм вычисления интеграла с заданной точностью.

27. Уравнение $f(x) = 0$. Решение уравнений методом деления отрезка пополам. Метод простых итераций. Условие сходимости итерационной последовательности и скорость ее сходимости.

28. Метод Ньютона (метод касательных). Геометрическая интерпретация метода касательных. Скорость сходимости метода Ньютона.

29. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера. Порядок точности метода Эйлера. Неявный метод Эйлера и метод трапеций.

30. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Алгоритм метода при решении с заданной точностью.

31. Краевая задача для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка. Разностная аппроксимация производных. Сведение численного решения к решению трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений.

32. Многошаговые методы решения дифференциальных уравнений. Методы Адамса. Вывод метода Адамса 2-го порядка точности.