МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ (ИБМ, МТ и РК)

КОНТРОЛЬНЫЕ МЕРОПРИЯТИЯ (КМ)

Типовые задания

МОДУЛЬ 1: ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ (максимум 30 баллов)

КМ-1: Домашнее задание №1, часть 1. **Элементарные функции и их графики.**

Сроки выполнения: выдача – 1-я неделя; прием – 3-я неделя

Методические пособие: МП-4.

Типовое задание (максимум 4 + 1 = 5 баллов)**.**

1. Найти область определения функции $y=\lg\left(\frac{x+4}{1-2x}\right)$.

2. Исследовать функцию $y=\operatorname{ctg}(\cos(\operatorname{tg}x))$ на четность (нечетность).

3. Используя элементарные преобразования, построить эскизы графиков следующих функций:

а) $y=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1$; б) $y=2\cdot\sqrt[3]{x+5}-1$; в) $y=\left|1-\lg|x+1|\right|$; г) $y=\frac{1}{3}\cdot 2^{2x+1}-\frac{4}{3}$;

д) $y=\frac{3\pi}{8}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(2x-3)$; (е) $y=\frac{x^2-2x+1}{x+2}$; (ж) $y=\sqrt[3]{x}\cdot\cos 2x$.

КМ-2: Домашнее задание №1, часть 2. **Пределы и непрерывность.**

Сроки выполнения: выдача – 3-я неделя; прием – 7-я неделя

Методические пособия: МП-6 и МП-11.

Типовое задание (максимум 7 + 1 = 8 баллов):

1. Для заданной последовательности $x_n=\frac{2+3n^2}{4+5n^2}$ и числа $a=\frac{3}{5}$ доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, определив для каждого $\varepsilon>0$ число $N=N(\varepsilon)$, такое, что $|x_n-a|<\varepsilon$ при всех $n>N(\varepsilon)$. Заполнить таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001
$N(\varepsilon)$			

2. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^3-5x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-x^4\sqrt{x^3+2}}{x^5-x^3\sqrt[3]{x+2}}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{\sin x}{\sin 4}\right)^{\frac{1}{x-4}}$; д) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\operatorname{arctg}\frac{x^2-\sqrt{3}}{x^3-1}\right)^{\frac{x}{\sin 2x}}$; е) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\ln(1+\operatorname{tg}x)}{\sin 3x}$.

3.. а) Показать, что функции $f(x)=\frac{x^3+x\sin x}{x+\sqrt[3]{x}}$ и $g(x)=\frac{x^2+x+1}{x+2}$ являются бесконечно малыми или бесконечно большими при указанном стремлении аргумента;

б) для каждой функции $f(x)$ и $g(x)$ записать главную часть стандартного вида, т.е. эквивалентную ей функцию вида $C(x-x_0)^{\alpha}$ при $x\to x_0$, или Cx^{α} при $x\to\infty$, указать их порядки малости или роста ($C,\ \alpha=const$);

в) Сравнить функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to+\infty$, если это возможно.

4. Найти точки разрыва функции $f(x)$ и определить их характер. Построить фрагменты графика функции в окрестности каждой точки разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arcctg}\left(e^{\frac{1}{x}}\right), & x\le 2;\\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{x}, & x>2.\end{cases}$$

КМ-3: Рубежный контроль №1 “Элементарные функции и пределы” проводится на 8-й неделе по лекциям 1–10 и практическим занятиям 1–10.

Типовое задание (максимум 12 + 2 = 14 баллов)**:**

1. Дайте определение на языке $\varepsilon-\delta$ и сделать геометрическую иллюстрацию предела: $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=+\infty$.(2 балла)

2. Определение эквивалентных функций при данном стремлении. Таблица основных эквивалентностей. Свойства отношения эквивалентности, связь с отношением о-малое. Применение для вычисления пределов (3 балла).

3. Вычислить пределы (а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arctg}(2x-2)}{\sin(\pi x)}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[5]{10x^4-32x^5}+2x\right)$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$, г) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}\sin 3x$ (по 1 баллу за каждый предел).

4. Выясните, является ли функция $f(x)=\sin x+1-\sqrt[3]{1+x}$ бесконечно малой при $x\to 0$. Если да, найдите значения C и k, для которых функция $f(x)$ при $x\to 0$ эквивалентна функции $g(x)=Cx^k$ (1,5 балла).

5. Найдите точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2-5x+4}$, исследуйте их характер, постройте график функции в окрестности найденных точек.(1,5 балла).

КМ-4: **Поведение, прилежание и посещаемость** в первом модуле– максимум 3 балла.

МОДУЛЬ 2: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (максимум 40 баллов)

КМ-5. Контрольная работа “ Дифференцирование функций” проводится на 11-й или 12-й неделе по лекциям 11–14 и практическим занятиям 12–15.

Типовое задание (максимум 11 + 2 = 13 баллов):

1. Определение дифференцируемости функции в точке. Связь непрерывности в точке, дифференцируемости и существования конечной производной (1, 5 балла).
2. Вывести, исходя из определения, производную функции $y=\log_a x$ (1,5 балла);
3. Для заданных функций $y(x)$ найти производную y':

(а) $y=3^{\cos(2x)}\cdot\operatorname{tg}(3x+\dfrac{\pi}{5})$; (б) $y=\ln\left(\sin^2\left(\operatorname{arctg}(3x)\right)\right)$; (в) $y=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{xe^x}$;

(г) $y=(1+\operatorname{ctg}4x)^{\sin x}$; (д) $y=\dfrac{e^x(x-1)^2x^4}{(x^2+2)\sqrt{\sin x}}$ (по 1 баллу).

4. Найти производную y''_{xx} функции $y(x)$, заданной параметрически: $\begin{cases}x=\log_2(1+t^3),\\ y=t^4.\end{cases}$ (1 балл)
5. Найти производную y'_x функции $y(x)$, заданной неявно: $e^{\frac{y}{x}}+xy^3=4$.(1 балл)
6. Найти угол, под которым пересекаются кривые $y=x^3$ и $y=x^{-2}$. Сделать чертеж. (1 балл)

КМ-6: Домашнее задание №2 «Исследование функций и построение графиков»
Сроки выполнения: выдача – 12-я неделя, прием – 15-я неделя.
Методические пособия: 3, 9, 10.
Типовое задание (максимум 8 + 1 = 9 баллов):

1. Разложить функцию $y = e^{2x-x^2}$ по формуле Маклорена 3-го порядка с остаточным членом в форме Пеано.

2. Исследовать заданные функции и построить их графики:

а) $y = \dfrac{x^3}{x^3+1}$; б) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$; в) $y = 2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$; г) $y = x + 4\operatorname{arcctg} x$; д) $y = \dfrac{e^x}{x}$.

3. Из всех равнобедренных треугольников с заданным периметром найти тот, у которого площадь максимальна.

КМ-7 Рубежный контроль №2 «Приложения дифференциального исчисления» проводится на 15-й или 16-й неделе по лекциям 15–19 и практическим занятиям 17–22.

Типовое задание (максимум 12+2 = 14 баллов):

1. Сформулировать теорему Ролля. Применима ли эта теорема к функциям: $f(x) = \sqrt{x}\cdot(x-2)$ и $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}$ на отрезке $[0; 2]$? Если да, то проверить справедливость заключения этой теоремы, найдя соответствующее значение точки отрезка $[0; 2]$. Сделать чертёж. (4 балла)

2. Исследовать и построить график функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$. (5 баллов)

3. (а) Вычислить предел, используя правило Лопиталя – Бернулли: $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\operatorname{tg} x}$.

или (б) Разложить функцию $y = \sqrt{x}$ по формуле Тейлора 3-го порядка в окрестности точки $x_0 = 1$. Записать остаточный член в форме (1) Пеано; (2) Лагранжа.

или: (в) С помощью формулы Маклорена найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^4}$.(3 балла)

КМ-8: **Поведение, прилежание и посещаемость** во 2-м модуле – максимум 4 балла.