

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «Математический анализ»

1 курс 1 семестр (для факультетов МТ, РК и ИБМ) 2011 -12.

Модуль 1. Элементарные функции, пределы и непрерывность

1. Множество $\mathbf{R}$ действительных чисел, Сформулировать аксиому полноты и принцип вложенных отрезков. Промежутки; окрестности конечной точки и бесконечности.
2. Ограниченные и неограниченные множества в $\mathbf{R}$. Определение точных верхней и нижней граней множества. Доказать их существование. Сформулировать теорему о точных гранях. Привести примеры.
3. Функция и ее график. Понятия композиции функций и обратной функции. Привести примеры. Определение четных, нечетных и периодических функций, свойства их графиков. Примеры. Определение функции: (а) монотонной; (б) ограниченной на данном промежутке.
4. Основные (простейшие) элементарные функции, их свойства (области определения и значений, монотонность, четность-нечетность, периодичность) и графики. Класс элементарных функций. Примеры неэлементарных функций.
5. Числовая последовательность. Определение предела последовательности, его геометрическая интерпретация. Сходящиеся последовательности. Сформулировать основные свойства предела последовательности: предел постоянной, единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности (необходимое условие сходимости), теорема Вейерштрасса (достаточное условие сходимости последовательности). Доказать два из них.
6. Определение числа « e » (сформулировать теорему о существовании соответствующего предела последовательности). Определение гиперболических функций, их простейшие свойства и графики. Основные тождества, связывающие гиперболические функции.
7. Общее определение предела функции по Коши при произвольном стремлении аргумента. Расшифровка определения и геометрическая интерпретация предела для случаев: $x \rightarrow a$, $x \rightarrow a +$, $x \rightarrow a -$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$. Связь между пределами функции при односторонних и двустороннем стремлении аргумента.
8. Сформулировать теоремы о пределе функции: (а) о единственности предела; (б) о замене переменной в пределе (о пределе сложной функции), доказать одну из них.
9. Сформулировать теоремы о локальных свойствах предела функции: (а) о локальной ограниченности функции, имеющей предел; (б) о локальной знакоопределенности функции, имеющей предел, отличный от нуля (о сохранении функцией знака своего предела). Доказать одну из них.
10. Сформулировать теоремы: (а) о предельном переходе в неравенстве; (б) о пределе промежуточной функции. Доказать одну из них.
11. Определение бесконечно малой функции при данном стремлении аргумента, расшифровка для конкретных стремлений. Доказать теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой при некотором стремлении аргумента. Сформулировать свойства бесконечно малых функций. Доказать два из них: теорему о сумме бесконечно малых и теорему о произведении бесконечно малой на локально ограниченную.
12. Сформулировать арифметические теоремы о пределах (предел суммы, произведения и частного двух функций). Доказать две из них.
13. Определение бесконечно большой функции при данном стремлении аргумента. Расшифровка и геометрическая интерпретация для конкретных стремлений. Доказать теорему о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций.
14. Доказать теорему о «первом замечательном пределе». Сформулировать ее следствия. Доказать два из них.
15. Сформулировать теорему о «втором замечательном пределе» и ее следствия. Доказать два из них.
16. Сравнение функций при данном стремлении аргумента, определение отношений « $\sim$ » «о-малое» и «О-большое», примеры. Сформулировать теоремы об эквивалентных функциях (свойства отношения эквивалентности). Доказать две из них. Определение порядка малости (или

роста) одной функции относительно другой при данном стремлении аргумента. Привести примеры.

17. Записать и вывести эквивалентности (при $x \rightarrow 0$) для функций: $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $1 - \cos x$, $a^x - 1$, $\log_a(1 + x)$, $(1 + x)^a - 1$, а также для многочлена $P(x)$ при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$ (т.е. для каждой из этих функций указать эквивалентную ей функцию вида $C \cdot x^k$). Применение эквивалентностей для вычисления пределов. Примеры.

18. Определение непрерывности функции в точке, равносильные формулировки. Односторонняя непрерывность в точке, ее связь с (обычной) непрерывностью в точке. Доказать теорему о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Сформулировать теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного двух непрерывных функций. Доказать одну из них. Доказать теорему о непрерывности композиции двух непрерывных функций. Сформулировать теорему о непрерывности основных элементарных функций и теорему о непрерывности элементарных функций. Доказать непрерывность многочлена и функции $\sin x$. Сформулировать локальные свойства функции, непрерывной в точке x_0 : (а) локальная ограниченность; (б) локальное знакопостоянство (если $f(x_0) \neq 0$). Доказать одно из них.

19. Определение функции, непрерывной на интервале, полуинтервале, отрезке. Сформулировать теоремы о свойствах функции, непрерывной на отрезке. Привести примеры, иллюстрирующие существенность условий в формулировках этих теорем. Сформулировать теорему о непрерывности функции, обратной к монотонной и непрерывной функции.

20. Определение точки разрыва функции. Классификация точек разрыва. Примеры.

21. Определение асимптоты графика функции. Виды асимптот. Критерий существования горизонтальной и вертикальной асимптот. Вывести формулы для вычисления коэффициентов уравнения наклонной асимптоты.

Модуль 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

22. Определение производной функции в точке, ее геометрический, механический (или общенаучный) и экономический (для факультета ИБМ) смысл. Определение касательной и нормали к графику функции. Уравнения касательной и нормали. Определение дифференцируемости функции в точке. Доказать теоремы о связи дифференцируемости и: (а) существования конечной производной; (б) непрерывности функции в точке.

23. Односторонние производные. Связь односторонних производных с обычной (двусторонней). Определение бесконечной производной функции в точке и ее геометрическая интерпретация.

24. Сформулировать правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций. Доказать два из них. Доказать теоремы о производной: (а) сложной и (б) обратной функций. Вывести формулы для производных константы, показательной, логарифмической, степенной, тригонометрических и гиперболических функций.

25. Определение эластичности одной экономической величины по отношению к другой, связь с производной (для факультета ИБМ). Логарифмическое дифференцирование (предварительное логарифмирование) и его применение. Нахождение производной функций вида $(u(x))^{v(x)}$. Дифференцирование произведений и дробей с большим числом сомножителей в числителе и знаменателе. Производные высших порядков. Физический смысл второй производной. Дифференцирование функции, заданной неявно. Нахождение первой и второй производных функции, заданной параметрически.

26. Определение дифференциала функции, его геометрический смысл. Сформулировать правила нахождения дифференциала суммы, произведения и частного двух функций. Доказать два из них. Доказать инвариантность формы первого дифференциала. Определение дифференциалов высших порядков.

27. Определение экстремума функции. Доказать теорему Ферма (необходимое условие экстремума). Определение критической и стационарной точек функции.

28. Доказать теоремы Ролля и Лагранжа. Геометрическая интерпретация этих теорем. Записать теорему Лагранжа в виде формулы конечных приращений. Доказать теорему Коши.

29. Сформулировать правило Лопиталя-Бернулли и доказать его для случая неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$. Раскрытие неопределенностей других видов. Доказать теорему о сравнении роста показательной, степенной и логарифмической функций при $x \rightarrow +\infty$.
30. Определение многочлена Тейлора. Доказать теорему о нем (о равенстве значения функции и ее производных в точке x_0 значению многочлена Тейлора и его производных в этой точке).
31. Сформулировать теоремы о представимости функции по формуле Тейлора с остаточным членом: (а) в форме Пеано; (б) в форме Лагранжа. Формула Маклорена, как частный случай формулы Тейлора. Вывести разложения по формуле Маклорена функций: e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^p$. Применение формулы Тейлора к приближенным вычислениям (с оценкой погрешности). Применение формул Маклорена к вычислению пределов.
32. Доказать достаточное условие и сформулировать необходимое условие монотонности дифференцируемой функции. Доказать достаточные признаки экстремума функции: первый (в критической точке – по первой производной); второй (в стационарной точке – по второй производной).
33. Определение выпуклости функции (ее графика) на промежутке. Доказать достаточное условие выпуклости графика.
34. Определение точки перегиба графика. Доказать необходимое условие перегиба графика в данной точке. Доказать достаточное условие перегиба графика в точке.
35. Схема полного исследования функции и построения (эскиза) ее графика.
36. Определение векторной функции скалярного аргумента как отображения из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}^2$ или $\mathbf{R}^3$, график векторной функции. Определение предела и непрерывности векторной функции. Определение производной векторной функции, ее геометрический и механический смысл. Уравнения касательной к плоской и пространственной кривой, заданной параметрически. Правила дифференцирования векторной функции (вывод на усмотрение экзаменатора). Доказать теорему о производной векторной функции постоянной длины; ее геометрическая интерпретация.
37. Определение длины дуги пространственной или плоской кривой. Написать формулу для производной и дифференциала длины дуги кривой, заданной параметрически. Вывести формулы для производной и дифференциала длины дуги кривой, заданной на плоскости явно или в полярных координатах. Вывести геометрический смысл дифференциала длины дуги, заданной на плоскости явно.
38. Определение кривизны кривой. Формулы для кривизны плоской кривой, заданной явно или параметрически.
39. Определение радиуса и центра кривизны плоской кривой. Эволюта и эвольвента плоской кривой, их свойства.
- Примечание.** Вопросы 36 – 39 включаются в экзаменационную программу на усмотрение лектора потока в определяемом им объеме и, как правило, на экзамене будут предложены студентам, претендующим на высокую отметку.

Дополнительные вопросы сверх обязательной программы (студенты могут подготовить эти вопросы по своему желанию).

1. Доказать существование числа «е».
2. Доказать второй замечательный предел.
3. Доказать свойства функции, непрерывной на отрезке (а) первую теорему Вейерштрасса; (б) вторую теорему Вейерштрасса; (г) теорему Больцано – Коши.
4. Вывести формулу Тейлора с остаточным членом в форме: (а) Пеано; (б) Лагранжа.
5. Доказать достаточное условие: (а) экстремума и (б) перегиба графика функции по производной порядка выше второго.
6. Вывести (строго!) формулу для производной длины дуги кривой, заданной параметрически.
7. Вывести формулы для кривизны плоской кривой, заданной явно или параметрически.