

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА по курсу «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

1 курс, 1 семестр, 2011-12 учебный год, факультеты МТ, РК и ИБМ

Модуль 1 Векторы, прямые и плоскости

1. Скалярные и векторные величины. Определение геометрического вектора. Нулевой вектор, противоположный вектор, определение коллинеарных и компланарных векторов; равенство векторов. Свободные векторы. Единичный вектор (орт). Определение линейных операций над геометрическими векторами, их свойства. Правила вычитания векторов, правило многоугольника нахождения суммы нескольких векторов. Длина вектора, её свойства.

2. Определение линейной зависимости геометрических векторов. Критерий линейной зависимости: (а) двух и (б) трех геометрических векторов, линейная зависимость любых четырех геометрических векторов.

3. Базис на плоскости и в пространстве. Ортонормированный канонический базис i, j, k . Доказать единственность разложения вектора по базису. Определение координат вектора в данном базисе. Доказать теорему о линейных операциях над векторами в координатной форме.

4. Определение ортогональной проекции геометрического вектора на ось (направление), её свойства, формула для её вычисления. Определение скалярного произведения геометрических векторов, его механический смысл. Доказать свойства скалярного произведения. Признак перпендикулярности (ортогональности) двух векторов. Вывести формулы для нахождения скалярного произведения, длины вектора, косинуса угла между векторами и проекции вектора на направление в базисе i, j, k . Доказать теорему о связи координат вектора в этом базисе с его ортогональными проекциями на соответствующие направления. Определение направляющих углов (косинусов) вектора или луча. Доказать теорему о них.

5. Правые и левые тройки геометрических векторов. Определение векторного произведения двух геометрических векторов, его геометрический смысл. Доказать свойства векторного произведения (дистрибутивность без док-ва). Критерий коллинеарности двух векторов. Вывести формулу для вычисления векторного произведения в базисе i, j, k . Физические приложения векторного произведения.

6. Определение смешанного произведения трех геометрических векторов, его геометрический смысл. Доказать свойства смешанного произведения. Вывести формулу для нахождения смешанного произведения в базисе i, j, k . Вывод формулы объема треугольной пирамиды (тетраэдра). Условие компланарности трех векторов. Проверка ориентации тройки векторов.

9. Определение: декартовой системы координат в пространстве, координаты точки. Радиус-вектор точки. Связь координат вектора и его концов (вывод). Прямоугольная система координат, вывести формулу расстояния между двумя точками и формулу для координат точки, делящей отрезок в данном отношении $\alpha:\beta$.

10. Геометрический смысл уравнения $F(x, y) = 0$ на плоскости, в пространстве. Геометрический смысл уравнения $F(x, y, z) = 0$ и системы двух таких уравнений в пространстве. Поверхность, заданная уравнением $F(x - a, y - b, z - c) = 0$. Нахождение уравнение проекции линии пересечения двух поверхностей на координатную плоскость (для МТ и РК).

11. Прямая на плоскости, ее направляющий и нормальный векторы. Различные виды уравнения прямой на плоскости: прямая с угловым коэффициентом; общее уравнение прямой, каноническое и параметрические уравнения, уравнение в отрезках. Вывод этих уравнений, геометрический смысл их коэффициентов. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Вывод формулы для расстояния от точки до прямой. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Нахождение угла между прямыми. Условия совпадения, параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.

12. Плоскость в пространстве, ее нормальный вектор. Вывод уравнения плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Вывод общего уравнения плоскости (в векторной и координатной форме) и уравнения плоскости в отрезках, геометрический смысл коэффициентов этих уравнений. Вывод уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой. Уравнение плоскости в отрезках. Вывод формулы для нахождения расстояния от точки до плоскости.

13. Прямая в пространстве и ее направляющий вектор. Общие уравнения прямой (в виде системы двух уравнений). Вывод параметрических (в векторной и координатной форме) и канонических уравнений прямой. Геометрический смысл коэффициентов этих уравнений. Нахождение канонических уравнений прямой, заданной общими уравнениями. Вывод уравнений прямой проходящей через две заданные точки. Определение и вывод уравнения пучка плоскостей. Вывод формулы для расстояния от точки до прямой в пространстве

14. Исследование взаимного расположения в пространстве: (а) двух плоскостей; (б) прямой и плоскости; (в) двух прямых. Нахождение угла между: (а) двумя плоскостями; (б) двумя прямыми; (в) прямой и плоскостью. Нахождение точки пересечения: (а) прямой и плоскости; (б) двух пересекающихся прямых. Нахождение расстояния между параллельными плоскостями. Нахождение расстояния между двумя параллельными или скрещивающимися прямыми.

Модуль 2. Кривые и поверхности второго порядка, матрицы и системы линейных алгебраических уравнений

15. Кривые второго порядка. Определение, эллипса, гиперболы и параболы, выводы их канонических уравнений. Определение эксцентриситета этих кривых, его смысл. Вывод уравнений асимптот гиперболы. Уравнения эллипса и гиперболы со смещенным центром, параболы со смещенной вершиной, координаты фокусов этих кривых. Исследование уравнения $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, $(A^2 + C^2 > 0)$ на плоскости. Параметрические уравнения эллипса и гиперболы. Свойство касательных эллипса, параболы и гиперболы и их оптическая интерпретация. Косые сечения цилиндра и конуса.

16. Поверхности второго порядка. Цилиндрические поверхности, поверхности вращения и их уравнения. Эллипсоид. Гиперболоиды, конус. Параболоиды. Их канонические уравнения. Исследование поверхностей второго порядка методом сечений. Вырожденные линии и поверхности второго порядка. Нахождение проекции линии пересечения двух поверхностей (для МТ и РК).

17. Определение матрицы и её размера. Определение нулевой матрицы. Виды квадратных матриц: симметричные, кососимметричные, верхние треугольные и нижние треугольные, диагональные, скалярные, единичная матрица. Равенство матриц. Определение линейных операций над матрицами (не путать с элементарными преобразованиями). Операция транспонирования матрицы. Свойства вышеуказанных операций. Определение произведения двух матриц, свойства операции умножения матриц. Экономическая интерпретация произведения двух матриц (для ИБМ).

18. Определение элементарных преобразований строк и столбцов матрицы. Определение отношения эквивалентности двух матриц, доказать его свойства (симметричность, транзитивность и рефлексивность).

19. Аксиомы линейного пространства. Следствия из аксиом. Примеры линейных пространств: пространства геометрических векторов: $\mathcal{V}_\ell$, $\mathcal{V}_\pi$, $\mathcal{V}$; арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$ и арифметические векторы; пространство матриц $\mathcal{M}_{m \times n}$; пространство многочленов $\mathcal{P}_n[x]$.

20. Определение линейной комбинации векторов произвольного линейного пространства, линейной зависимости и независимости векторов. Доказать общий критерий линейной зависимости векторов и его следствия. Критерий линейной зависимости двух векторов произвольного линейного пространства. Критерий линейной

зависимости m арифметических векторов пространства $\mathbf{R}^n$. Определение ранга системы векторов произвольного линейного пространства.

21. Определение базиса и размерности линейного пространства. Доказать единственность разложения вектора по базису. Сформулировать теоремы о базисе и размерности. Размерность и базис конкретных линейных пространств: пространства геометрических векторов $\mathcal{V}_\ell$, $\mathcal{V}_\pi$, $\mathcal{V}'$ арифметического пространства $\mathbf{R}^n$; пространства многочленов $\mathcal{P}_n[x]$, пространства матриц $\mathcal{M}_{m \times n}$.

22. Определение подпространства линейного пространства. Примеры. Определение линейной оболочки системы векторов, её основное свойство. Примеры.

23. Определение ступенчатой матрицы. Теорема (и алгоритм) Гаусса о приведении произвольной матрицы к ступенчатому виду.

24. Вычисление определителя первого, второго и третьего порядка. Свойства определителя любого порядка. Изменение определителя при элементарных преобразованиях. Вычисление определителя любого порядка (а) разложением по строке или по столбцу; (б) с помощью элементарных преобразований. Свойства определителя произведения двух квадратных матриц.

25. Определение присоединённой матрицы, доказать её свойство. Определение вырожденной и невырожденной квадратной матрицы. Алгоритм приведения невырожденной квадратной матрицы к единичной. Определение обратной матрицы, доказать её единственность. Доказать критерий существования обратной матрицы, и вывести метод её нахождения с помощью алгебраических дополнений. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

26. Доказать теоремы о: (а) матрице, обратной произведению двух невырожденных матриц; (б) транспонировании обратной матрицы. Решение матричных уравнений вида $AX = C$, $XB = C$ и $AXB = C$ с помощью обратной матрицы (вывод).

27. Определение минора прямоугольной матрицы, определение ранга матрицы. Определение базисного минора матрицы, окаймляющего минора матрицы. Теорема об окаймляющих минорах (о базисном миноре) и её следствия. Доказать критерий вырожденности квадратной матрицы (в терминах её ранга). Метод окаймляющих миноров нахождения ранга матрицы.

28. Инвариантность (неизменность) линейной зависимости (независимости) столбцов матрицы относительно элементарных преобразований её строк (и наоборот). Инвариантность ранга матрицы относительно элементарных преобразований и транспонирования. Ранг ступенчатой матрицы (вывод). Нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Теорема о ранге системы арифметических векторов.

29. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), координатная, матричная и векторная записи. Определение совместной СЛАУ, её матрицы, расширенной матрицы. Доказать критерий Кронекера–Капелли совместности СЛАУ. Определение частного и общего решения СЛАУ.

30. Инвариантность множества решений СЛАУ относительно элементарных преобразований строк её расширенной матрицы. Алгоритм Гаусса исследования и решения СЛАУ. Выбор базисных и свободных переменных, их количество. Доказать критерий существования единственного решения совместной СЛАУ. Векторная запись общего решения. Обосновать матричный метод (т.е. с помощью обратной матрицы) решения «квадратной» СЛАУ (у которой число уравнений равно числу неизвестных). Вывести формулы Крамера решения квадратной СЛАУ, условия их применимости.

31. Определение однородной и неоднородной СЛАУ. Однородная СЛАУ: вопрос о её совместности, доказать критерий существования ненулевого решения и следствие для квадратных однородных СЛАУ. Доказать свойство частных решений однородной СЛАУ. Пространство решений однородной СЛАУ как подпространство пространства $\mathbf{R}^n$, где n – число неизвестных. Теорема о размерности пространства решений. Определение

фундаментальной системы решений однородной СЛАУ, структура общего решения однородной СЛАУ.

32. Доказать свойства частных решений неоднородной СЛАУ. Доказать теорему о структуре общего решения неоднородной СЛАУ. Интерпретация столбцов (арифметических векторов) D и $F_1, \dots, F_k$ в векторной записи общего решения неоднородной СЛАУ: $X = D + c_1 F_1 + \dots + c_k F_k$.

Комплексные числа и многочлены.

33. Определение мнимой единицы и комплексного числа. Комплексная плоскость, изображение на ней комплексных чисел. Сложение и умножение комплексных чисел, их свойства. Операция комплексного сопряжения. Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом. Модуль и аргумент комплексного числа, свойства модуля. Деление комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексного числа. Доказать формулы умножения комплексных чисел в тригонометрической форме и формулу Муавра. Геометрическая интерпретация сложения и умножения комплексных чисел. Извлечение корня n -й степени из комплексного числа (вывод). Привести примеры.

34. Многочлены в действительной и комплексной области. Теорема Безу и её следствие. Основная теорема алгебры и её следствие о разложении многочлена $P(z)$ с комплексными коэффициентами на множители. Понятие кратности корня многочлена. Теорема о разложении многочлена с вещественными коэффициентами на неприводимые множители и её следствие (о количестве различных корней многочлена). Доказать теорему о вещественных корнях многочлена нечетной степени с вещественными коэффициентами.

Студенты должны уметь находить действительные и комплексные корни многочленов и определять их кратности.

Дополнительные вопросы сверх обязательной программы

(студенты могут их подготовить по своему желанию)

1. Исследование взаимного расположения трех плоскостей в пространстве, заданных своими общими уравнениями.
2. Доказать, что косое сечение кругового цилиндра есть эллипс.
3. Доказать теорему о параболических и гиперболических сечениях круговой конической поверхности.
4. Доказать оптические свойства (а) эллипса; (б) параболы; (в) гиперболы.
5. Доказать теорему о связи фокусов, директрис и эксцентриситета для: (а) эллипса; (б) параболы; (в) гиперболы.
6. Решение матричных уравнений вида $AX = C$, $XB = C$ и $AXB = C$ с помощью элементарных преобразований.
7. Определение единично-ступенчатой матрицы. Алгоритм Гаусса – Жордана приведения произвольной матрицы с единично-ступенчатым видом. Применение единично ступенчатой матрицы для нахождения ранга и базиса системы арифметических векторов и разложения небазисных векторов данной системы по базисным.
8. Доказать, что все базисы линейного пространства имеют одинаковое число векторов.
9. Доказать, что размерность линейного пространства (определяемая как число векторов базиса) равна максимальному числу линейно независимых векторов пространства.
10. Доказать теорему об окаймляющих минорах (о базисном миноре) и её следствия.
11. Доказать, что ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.
12. Метод Гаусса – Жордана решения СЛАУ.
13. Определение определителя произвольного порядка (через перестановки), доказательство его свойств.