МГТУ им. Н.Э. Баумана

Кафедра ФН-4

М.Л. Поздышев, А.В. Семиколенов

Изучение свободных колебаний на примере колебаний пружинного маятника

Методические указания к лабораторной работе М-114

Москва, 2024 г.

Цель лабораторной работы: экспериментальное изучение свободных колебаний на примере колебаний пружинного маятника и ознакомление с методами экспериментального определения параметров механических колебаний.

1. Теоретическая часть

1.1. Сила упругости

Деформацией тела называется изменение размеров тела под действием действующей на него силы. Направлением деформации называется направление смещения точек тела при деформации относительно положения равновесия. Величину деформации определяют как разность между размером тела при действующей на него силе L_1 и размером L_0 в свободном (ненагруженном состоянии) $x = L_1 - L$.

Опыт показывает, что при небольших деформациях в теле возникает сила, величина которой прямо пропорциональная величине деформации. В этом случае принято говорить, что тело проявляет упругие свойства, а силу называют силой упругости (упругой силой).

Закон Гука: Сила упругости, возникающая в теле при малой деформации величиной x, прямо пропорциональна величине деформации и направлена противоположно ее направлению:

$$\vec{F}_{УПР} = -k \cdot \vec{x}\,. \qquad (1)$$

Коэффициент k называется коэффициентом упругости (жесткости), Н/м.

В случае, когда для описания свойств тела можно ограничиться только его упругими свойствами, а другими свойствами можно пренебречь, тело условно изображают в виде пружины (рис.1).

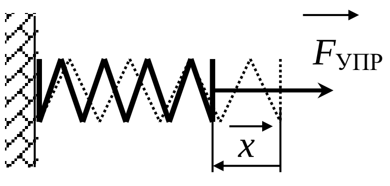


Рис.1

Пример. Найдем общий коэффициент упругости для двух невесомых пружин одинаковой длины, жесткости которых равны k_1 и k_2, при их параллельном и последовательном соединениях.

При параллельном соединении: общая сила деформации равна сумме сил в каждой из пружин: $F = F_1 + F_2$.

При параллельном соединении деформации пружин одинаковые: $x_1 = x_2$. Тогда: $k_{ОБЩ} \cdot x = k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2$. Поэтому: $k_{ОБЩ} = k_1 + k_2$. *При параллельном соединении суммируются коэффициентыжесткости пружин.*

<u>При последовательном соединении</u>: в этом случае сила упругости в любом сечении пружин одинаковая. Действительно, если бы в двух любых соседних сечениях силы были бы разными, то часть пружины между этими двумя сечениями, согласно второму закону Ньютона, двигалась бы под действием разности этих сил, т.е. пружина продолжала бы деформироваться до тех пор, пока силы не станут равными по величине. При этом общая деформация пружин равна сумме деформаций каждой из них: $x_1 + x_2 = x_{ОБЩ}$.Отсюда: $\frac{F}{k_{ОБЩ}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$ или $\frac{1}{k_{ОБЩ}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$. *При последовательном соединении суммируютсяобратные величины коэффициентовжесткости*.

1.2.Квазиупругая сила.

Сила упругости является консервативной силой - для неё можно определить потенциальную энергию

$$W = \frac{1}{2} k \cdot x^2 \tag{2}$$

Для любой консервативной силы можно определить некоторые свойства, подобные свойствам силы упругости. Известно, что потенциальная энергия и вектор консервативной силы связаны соотношением

$$\vec{F} = -grad\left(W\right), \tag{3}$$

или в координатной форме

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial W}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial W}{\partial z}. \tag{3'}$$

Рассмотрим одномерное движение тела под действием консервативной силы вдоль координатной оси X. Для потенциальной энергии тела вблизи некоторой точки x_0 можно записать выражение в виде ряда Тейлора

$$W\left(x\right) = W_0 + \left.\frac{dW}{dx}\right|_{x_0} \cdot \left(x - x_0\right) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_{x_0} \cdot \left(x - x_0\right)^2 + \ldots \tag{4}$$

Т.к. для проекции силы на ось X (3’) $F_x = -\dfrac{dW}{dx}$, то вблизи этой точки должно быть (4)

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\left(\left.\frac{dW}{dx}\right|_{x_0} + \left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_{x_0} \cdot \left(x - x_0\right) + \dots \right). \qquad (5)$$

В случае, когда точка x_0 является положением равновесия, т.е.

$$F_x = -\left.\frac{dW}{dx}\right|_{x_0} = 0, \qquad (6)$$

то вблизи точки x_0 для изменения потенциальной энергии из (5) и (6) следует

$$\Delta W = W\left(x\right) - W_0 \approx \frac{1}{2}\left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_{x_0} \cdot \left(x - x_0\right)^2, \qquad (7)$$

и для проекции силы

$$F_x \approx -\left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_{x_0} \cdot \left(x - x_0\right). \qquad (8)$$

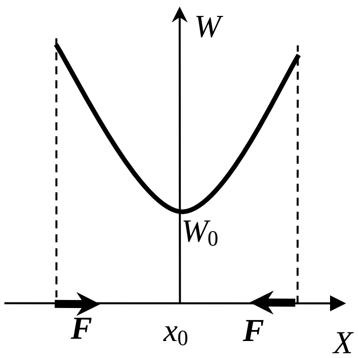


Рис. 2

Рассмотрим случай, когда в точке x_0 наблюдается локальный минимум потенциальной энергии. Тогда должно быть $d^2W/dx^2 > 0$ и в некоторой окрестности точки x_0справедливы неравенства

$$W\left(x\right) > W_0 \text{ и } F_X < 0 \text{ при } x < x_0 \text{ и } F_X < 0 \text{ при } x > x_0. \qquad (9)$$

Таким образом, вектор силы, действующей на тело, в этой окрестности будет направлен к точке x_0 (рис. 2). Это означает, что при малых смещения тела из положения равновесия, вектор силы будет стремиться вернуть тело обратно. Такое положение равновесия называется *устойчивым*.

Положение равновесия называется *неустойчивым*, если при малом отклонении от этого положения возникает сила, «стремящаяся увести» тело от положения равновесия. В этом случае в точке x_0 должно быть $d^2W/dx^2 < 0$, т.е. локальный максимум потенциальной энергии.

В случае $d^2W/dx^2 = 0$ требуется дополнительное исследование.

Таким образом, выражение для консервативной силы вблизи положения устойчивого равновесия можно записать в векторной форме аналогично (1)

$$\vec{F} = -k_0 \cdot \Delta\vec{x}, \qquad (1')$$

а величину изменения потенциальной энергии аналогично (2)

$$\Delta W = \frac{1}{2} k_0 \cdot \Delta x^2 \text{ , где } k_0 = \left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)_{x=x_0}. \qquad (2')$$

Такая форма записи для консервативной силы вблизи точки равновесия называется *квазиупругой силой*.

1.3 Одномерные незатухающие колебания

Колебания – процесс движения тел или изменения состояния системы, параметры которых повторяются во времени. Колебания в той или иной мере встречаются во всех явлениях природы: от пульсации излучения звезд, движения планет до внутриклеточных процессов или колебаний атомов и молекул, колебаний полей. В физике особо выделяют механические и электромагнитные колебания (и их комбинации).

Моделью для изучения механических колебаний является осциллятор – материальная точка или система, совершающая колебательное периодическое движение около положения устойчивого равновесия. Более того, термин *осциллятор* применим к любой системе, если описывающие ее величины периодически меняются во времени.

Простейшие примеры осцилляторов – грузик на пружине, математический маятник.

Уравнение колебаний можно получить, записав второй закон Ньютона для тела, движущегося прямолинейно вдоль координатной оси X под действием некоторой квазиупругой силы (1') $F_x = -k_0 (x - x_0)$ вблизи точки устойчивого положения равновесия $ma_x = F_x$. Введем ось X так, чтобы $x_0 = 0$, тогда уравнение движения примет вид

$$ma_x = -k_0 x. \qquad (10)$$

С учетом зависимости $a_x = \ddot{x}$ получаем уравнение $m\ddot{x} = -k_0 x$ или

$$\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = 0 \qquad (11)$$

где $\omega_0{}^2 = \dfrac{k_0}{m} > 0$.

Уравнение (11) - линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Решением уравнения (11) являются гармонические функции от времени t

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha) \text{ или } x = A\sin(\omega_0 t + \beta), \tag{12}$$

описывающие смещение точки вблизи равновесного значения $x_0 = 0$.

Замечание. Обе формы в (12) записи равноправны. Например, одна переходит в другую при $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$.Так как функции синус и конус имеют минимальный период 2π, то параметры процесса будут повторяться через минимальный промежуток времени T, называемый периодом колебаний:

$$T = 2\pi/\omega_0 . \tag{13}$$

Физическая величина $\nu = \frac{1}{T}$ называется частотой колебаний (единица измерения Гц - Герц), величина $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ - круговой или циклической частотой колебаний (единица измерения с$^{-1}$.)

Величина А в формуле (12) - это амплитуда колебаний - модуль максимального смещения точки от положения равновесия. По определению А > 0 – всегда положительная величина.

Аргумент функции $(\omega_0 t + \alpha)$ называется фазой колебания, а величина α - начальной фазой колебаний - это фаза колебаний в момент времени $t = 0$, который обычно называют начальным моментом времени.

Таким образом, уравнение (11) описывает колебательный процесс, параметры которого изменяются периодически с течением времени.

В этом колебательном процессе с течением времени сохраняется величина механической энергии $W_{MEX} = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{k_0 x^2}{2} = const$. Действительно:

$$\frac{dW_{MEX}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k_0 x^2}{2}\right) = 2m\frac{\dot{x}}{2}\ddot{x} + 2k_0\frac{x}{2}\dot{x} = m\dot{x}\cdot\left(\ddot{x} + \omega_0{}^2 x\right) = 0 . \tag{14}$$

Такой колебательный процесс принято называть свободными *незатухающими* колебаниями.

Пример. Груз массы m подвешен на невесомой пружине жесткости k в поле сил тяжести (пружинный маятник). Найти период его колебаний. Сопротивлением воздуха пренебречь.

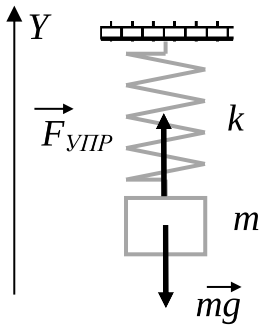


Рис. 3

Решение.

<u>1) Динамический метод</u>.Запишем уравнение его движения в проекции на вертикальное направление Y (рис.3)

$$ma_Y = -F_{УПР} + mg = -k \cdot y + mg \text{ или } a_Y = -\frac{k}{m}y + g .$$

где y – величина растяжения пружины. Положение равновесия груза на пружине $y_0 = \frac{mg}{k}$. Введем смещение груза от положения равновесия $x = y - y_0$, тогда $y = x + y_0$, $a_Y = \ddot{y} = \ddot{x}$.Получаем уравнение $\ddot{x} = -\frac{k}{m}(x + y_0) + g = -\frac{k}{m}x$, т.е. $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$, откуда

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{15}$$

<u>2) Вывод для квазиупругой силы</u>: вблизи положения равновесия $y_0 = mg/k$

$$W_{УПР} = \frac{k(x + y_0)^2}{2}, k_0 = \left(\frac{d^2W}{dx^2}\right)_{x=0} = k \text{, и } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1.4 Определение жесткости пружинного маятника по результатам измерений периода колебаний

Используя значение периода колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} , \tag{16}$$

можно найти жесткость пружины: $k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$. В случае использования двух различных грузов m_1 и m_2, по соответствующей линейной зависимости квадрата периода колебаний от массы $T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m$ оценивают жесткость пружины динамическим методом: $T_2^2 - T_1^2 = \frac{4\pi^2}{k}(m_2 - m_1)$, откуда

$$k = 4\pi^2 \frac{(m_2 - m_1)}{(T_2^2 - T_1^2)} . \tag{17}$$

2. Экспериментальная часть

Указания по технике безопасности

1. Перед выполнением работы необходимо ознакомится с установкой.
2. Соблюдайте общие правила техники безопасности работы в лаборатории "Физика”.

2.1. Описание лабораторной установки

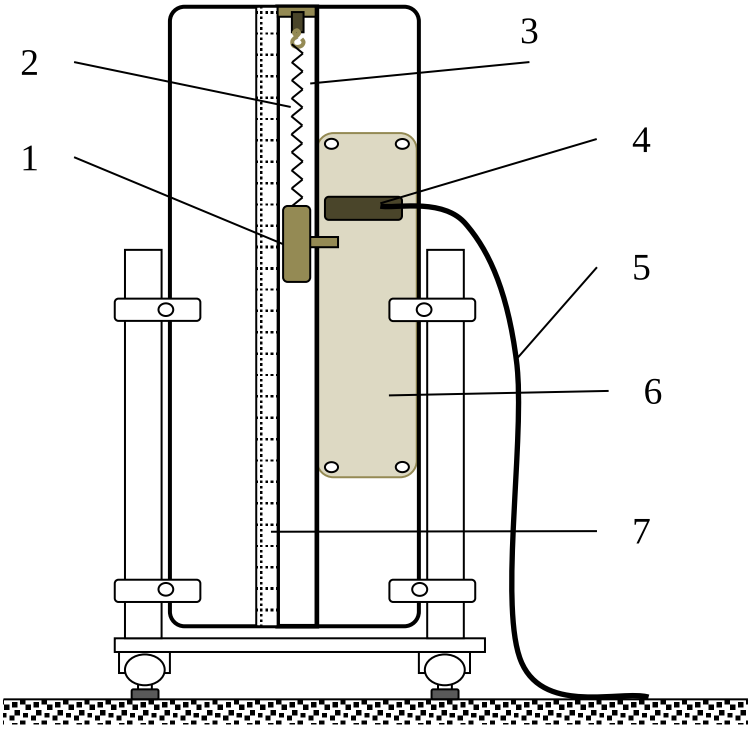


Рис. 4 Лабораторная установка

Оценка жесткости пружин динамическим методом в лабораторной работе производится с помощью лабораторной установки (рис. 4). Лабораторная установка представляет собой вертикальный стенд, на котором размещены её элементы. А именно: пружинный маятник, состоящий из груза - каретки (1), подвешенной на пружине (2). Груз движется в направляющих для движения каретки (3). Для регистрации колебаний применяется оптический датчик (4), который через USB кабель (5) соединен с компьютером. На стенде также размещены: металлическая пластина (6), к которой с помощью магнита крепится оптический датчик и линейка (7). На грузе - каретке установлен специальный флажок, с помощью которого определяется период колебаний оптическим датчиком.

2.2. Подготовка лабораторной установки

- Выровнять по вертикали металлический стенд, вращая опоры, на которых он установлен.
- Подвесить каретку за пружину к специальному подвесу вверху стенда и, вращая подвес вокруг своей оси, выровнять каретку в вертикальных пазах так, чтобы флажок находился со стороны металлической пластины.
- С помощью магнита, встроенного в оптический датчик, прикрепить датчик к металлической пластине так, чтобы флажок подвешенного на пружине груза в положении равновесия находился вблизи уровня отверстий фотоэлемента датчика.
- Для запуска колебательного движения необходимо оттянуть вниз груз - каретку на несколько сантиметров, отпустить и дать ему возможность свободно колебаться.

В наборе оборудования для проведения экспериментов есть две пружины различных жесткостей, и две каретки массами m_1=50±1 г и m_2=100±1 г каждая. Для определения периода колебаний необходимо будет провести по два цикла измерений периода колебаний на каждой из пружин с разными грузами.

2.3. Порядок проведения лабораторной работы

1. Соберите лабораторную установку в соответствие с п.2.2, зафиксировав конец одной из пружин наверху опорной конструкции, а на другой ее конец прикрепите первую груз-каретку m_1. Поместите оптический датчик на пути движения пластины каретки так, чтобы в положении равновесия пластина каретки была вблизи уровня оптической оси датчика.
2. Подключите оптический датчик к USB-разъёму компьютера.
3. После включения компьютера запустите программу «Практикум по физике». На панели устройств выберите соответствующий сценарийпроведения эксперимента (рис.4, кнопка 1).

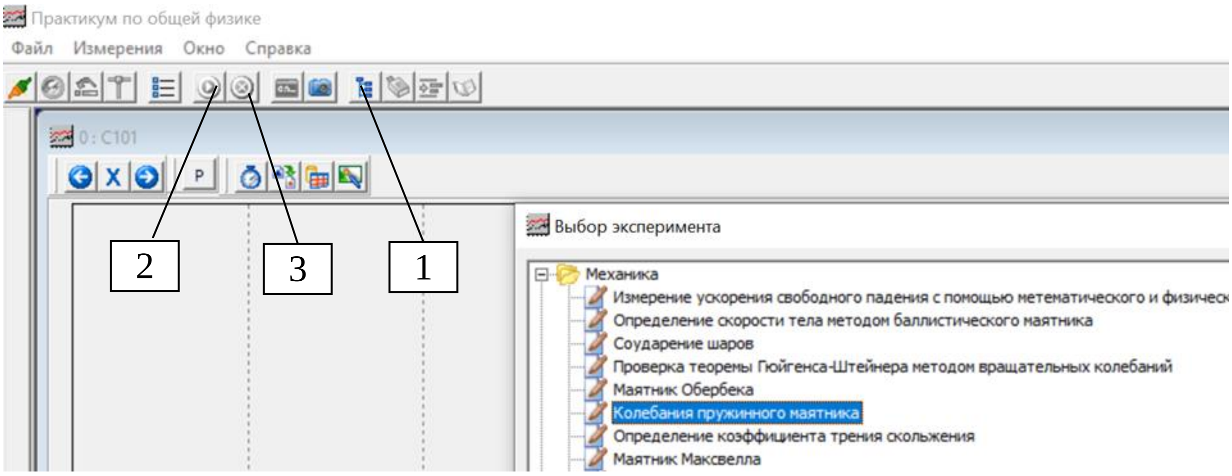
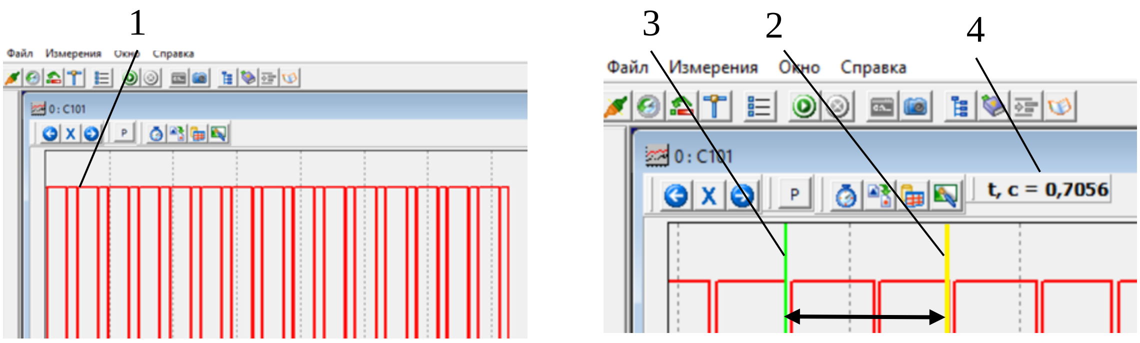


Рис. 4

4. Начните измерения для выбранного датчика (рис.4, кнопка 2) и сразу, непосредственно вслед за этим, приведите в колебательное движение каретку на пружине, потянув вниз за специальный зацеп на каретке.

5. После измерений 15-20 периодов колебаний маятника остановите измерения (рис.4, кнопка 3).



А Б

Рис. 5 Измерение периода колебаний

6. Проведите обработку полученных экспериментальных данных, для чего:

- выделите в окне измерений (рис.5, А) область (1) с числом импульсов не менее 10 для её детального просмотра в увеличенном масштабе методом одновременного нажатия кнопки «Alt+левая кнопка мыши»;
- путем постановки желтого (левая кнопка мыши) (2) и зеленого (3) маркера (правая кнопка мыши) (рис.5, Б) измерьте период колебаний маятника по передним или задним фронтам соседних четных (либо нечетных) импульсов. Результат каждого измерения (4) следуетзаписать в таблицу отчета. Если при измерениях получается отрицательное

значение, то следует поменять местами желтый и зелёный маркер.

Желтый маркер должен всегда находиться правее зелёного.

7. Выполните измерения периода не менее 7 раз, используя различные фронты разных импульсов. Результаты измерений запишите в таблицу 1.1 для груза m_1.

8. Замените груз-каретку в направляющей. Повторите пп. 4-7 для другого маятника. Результаты измерений запишите в таблицу 1.1 для груза m_2.

9. Смените пружину на другую из прилагаемого набора. Затем проведите эксперимент вновь по пп.4 - 8. Результаты измерений запишите в таблицу1.2 соответственно.

Таблица 1.1

Пружина 1.

i, номер опыта	Период маятника m_1 T_{i1}, с	Период маятника m_2 T_{i2}, с
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Таблица 1.2

Пружина 2.

i, номер опыта	Период маятника m_1 T_{i1}, с	Период маятника m_2 T_{i2}, с
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

2.4. Обработка результатов измерений

1. Используя полученные результаты, определите средние значения периодов колебаний для каждой пружины с каждым из грузов и определите соответствующую полуширину доверительного интервала

$$\Delta T = t_{P,f} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(T_i - \langle T \rangle\right)^2}{n(n-1)}}$$

Значения коэффициента $t_{P,f}$ для P = 0,95 можно найти в таблице 2.

Найденные значения занесите в таблицу 3.

Таблица 2.

Значения коэффициента $t_{P,f}$

$f = n - 1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P = 0.95	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.37	2.31	2.26

Таблица 3.

Результаты обработки экспериментальных данных

Пружина	Груз	$\langle T \rangle$	ΔT	$\langle k \rangle$	Δk
1	m_1				
	m_2				
2	m_1				
	m_2				

2. Найдите средние значения жесткостей пружин из прилагаемого набора

$$\langle k \rangle = 4\pi^2 \frac{(m_2 - m_1)}{\left(\langle T_2 \rangle^2 - \langle T_1 \rangle^2\right)}.$$

Найденные значения занесите в таблицу 3.

3. Определите относительные погрешности косвенных измерений

$$\frac{\Delta k}{\langle k \rangle} = \sqrt{\frac{(\Delta m_2)^2 + (\Delta m_1)^2}{(m_2 - m_1)^2} + 4\frac{\left(\langle T_2 \rangle \Delta T_2\right)^2 + \left(\langle T_1 \rangle \Delta T_1\right)^2}{\left(\langle T_2 \rangle^2 - \langle T_1 \rangle^2\right)^2}}$$

Найдите полуширину доверительного интервала Δk.

Найденные значения занесите в таблицу 3.

4. Запишите окончательный результат для каждой из пружин в виде

$$k = \langle k \rangle \pm \Delta k \text{, Н/м}$$

5. Сравните полученные результаты, заполнив таблицу 4. Для этого рассчитайте период колебаний каждого из маятников $T_P = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\langle k \rangle}}$ и относительную погрешность косвенных измерений $\dfrac{\Delta T_P}{T_P} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta k}{\langle k \rangle}\right)^2}$

Найдите полуширину доверительного интервала ΔT_P. Полученные результаты занесите в таблицу 4.

Таблица 4.

Сравнение результатов экспериментальных и расчётных периодов колебаний

Пружина	Груз	$\langle T \rangle$	ΔT	T_P	ΔT_P
1	m_1				
	m_2				
2	m_1				
	m_2				

Перекрываются ли доверительные интервалы экспериментальных и вычисленных значений периода? Объясните полученные результаты.

6. Исходя из полученных значений жесткости, найдите циклическую частоту свободных колебаний $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ для грузов при последовательном и параллельном соединении пружин. $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Результаты занесите в таблицу 5.

Таблица 5.

Циклическая частота свободных колебаний

Груз	ω_0, 1/с	
	последовательное соединение пружин	параллельное соединение пружин
m_1		
m_2		
$m_1 + m_2$		

Контрольные вопросы

1. Дайте определение осциллятора.

2. Какие колебания называются гармоническими?

3. Напишите дифференциальное уравнение гармонических колебаний и дайте определения амплитуды, циклической частоты и фазы.

4. Сформулируйте определение квазиупругой силы и выведите размерность входящих в неё величин.

5. Как получить уравнение колебаний математического маятника из квазиупругой силы?

Рекомендуемая литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Механика.- М. : Наука. Физматлит, 2004, 1998.
2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. - М.-С.-П.:Физматлит, 2006, 2000
3. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986
4. Сивухин Д.В. Курс общей физики. Том I. Механика. - М.: Наука, 1979