

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана
Г.В.БАЛАБИНА
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В КОНТУРЕ LRC
Методические указания к лабораторной работе Э-6 по курсу общей физики
Под редакцией Л.К.Мартинсона
Издательство МГТУ, 1992

Изучены свободные затухающие электрические колебания при помощи осциллографа. Экспериментально определены основные параметры контура LRC. Для студентов 2-го курса.

Цель работы - изучение свободных затухающих электрических колебаний в контуре LRC с сосредоточенными параметрами при помощи осциллографа.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Колебательный контур с сосредоточенными параметрами состоит из конденсатора C , катушки индуктивности L и активного сопротивления R (рис. 1). При этом предполагают, что емкости сопротивления R и катушки L малы по сравнению с емкостью конденсатора C , а индуктивности сопротивления R , конденсатора C и соединительных проводов малы по сравнению с индуктивностью катушки L .

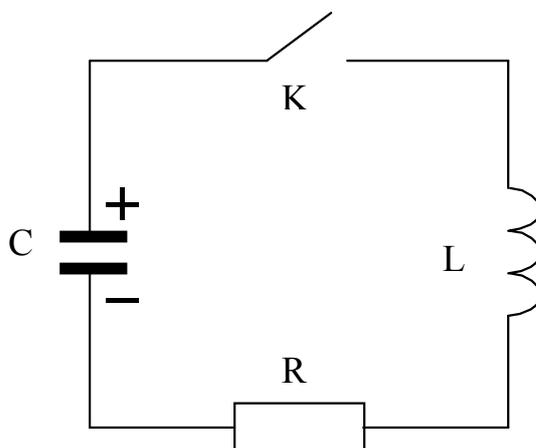


Рис. 1

Рассмотрим процесс возбуждения электрических колебаний в контуре. Пусть, при разомкнутом ключе K конденсатор заряжен, т.е. между обкладками конденсатора имеется электрическое поле, заключающее в себе определенную энергию

$$W_C = \frac{CU_0^2}{2} \quad (1)$$

где C - емкость конденсатора; U_0 - начальное напряжение на конденсаторе.

Если ключ K замкнуть, то конденсатор начнет разряжаться и его электрическое поле будет уменьшаться. При этом в контуре возникнет электрический ток разряда конденсатора, в результате в катушке индуктивности L появится магнитное поле, а в контуре - ЭДС самоиндукции. Через некоторое время конденсатор разрядится полностью, и электрического поля в конденсаторе не будет. Однако магнитное поле в катушке при этом достигнет максимума, иначе говоря, вся энергия электрического поля преобразуется в энергию магнитного поля

$$W_L = \frac{LJ_0^2}{2} \quad (2)$$

где L - индуктивность катушки; J_0 - максимальное значение силы тока.

В последующие моменты времени магнитное поле начнет уменьшаться, так как нет токов, его

поддерживающих. Это уменьшающееся поле вызовет появление ЭДС самоиндукции, которая в соответствии с правилом Ленца будет поддерживать ток разряда конденсатора. В результате конденсатор перезарядится, и между его обкладками появится электрическое поле, направленное противоположно начальному. Через некоторое время магнитное поле в катушке исчезнет, а электрическое поле между обкладками конденсатора достигнет максимума, т.е. вся энергия магнитного поля преобразуется в энергию электрического поля. Конденсатор начнет снова разряжаться, но с противоположным направлением тока.

В ходе рассмотренного процесса периодически меняются заряд q на обкладках конденсатора, напряжение U на конденсаторе и сила тока J в контуре, иначе говоря, в контуре происходят свободные электрические колебания. Так как всякий реальный контур обладает активным сопротивлением, то энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется на нагревание сопротивления, вследствие чего колебания затухают. Такие колебания принято называть **свободными затухающими колебаниями**.

Найдем уравнение, описывающее свободные затухающие колебания в контуре, представленном на рис. 1.

Условимся считать заряд на обкладках конденсатора q положительным, если знаки зарядов на обкладках такие, как на рис. 1, а силу тока J положительной, если ток в контуре направлен по часовой стрелке. Причем ток можно считать квазистационарным, т.е. относительно медленно меняющимся переменным током. Для его мгновенных значений с достаточной степенью точности выполняются законы постоянного тока. На практике установлено, что токи промышленной частоты (50 Гц) можно рассматривать как квазистационарные.

Конденсатор C , напряжение на котором равно U , разряжается через катушку индуктивности L и резистор сопротивления R , причем в цепи возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_s = -L \frac{dJ}{dt}$.

По закону Ома ток в цепи

$$J = \frac{U + \mathcal{E}_s}{R} = \frac{U - L \frac{dJ}{dt}}{R} \quad (3)$$

или

$$L \frac{dJ}{dt} + JR - U = 0 \quad (4)$$

Заряд q и напряжение U на конденсаторе связаны соотношением $q=CU$, поэтому силу тока J можно представить в виде:

$$J = \frac{dq}{dt} = -C \frac{dU}{dt} \quad (5)$$

Знак «минус» указывает на то, что выбранное положительное направление тока соответствует уменьшению положительного заряда конденсатора.

Дифференциальное уравнение (4) после подстановки в него выражения (5) и деления всех членов на произведение LC будет иметь вид

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC} U = 0 \quad (6)$$

Уравнение (6) является уравнением, описывающим свободные затухающие электрические колебания для напряжения U на конденсаторе.

Введем обозначения

$$\delta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (7)$$

Тогда уравнение (6) можно записать в виде

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2\delta \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0 \quad (8)$$

где δ - постоянная величина, называемая коэффициентом затухания; ω_0 - собственная частота контура.

Полученное уравнение (8) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с обыкновенными производными и постоянными коэффициентами. Решения его имеют различный вид в зависимости от соотношения между постоянными коэффициентами.

1. Рассмотрим случай, когда $\delta < \omega_0$ (или. $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$) - малое затухание.

Тогда решение имеет вид

$$U(t) = U_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (9)$$

где U_0 - начальное напряжение на конденсаторе; ω - циклическая частота затухающих колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (10)$$

φ - начальная фаза, значение которой определяется начальными условиями, а именно: при $t=0$ $U=U_0$, т.е. $\varphi = 0$.

Примечание. За начало отсчета времени выбираем момент замыкания ключа К. Период затухающих колебаний в контуре

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi / \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (11)$$

График зависимости напряжения U от времени t показан на рис. 2.

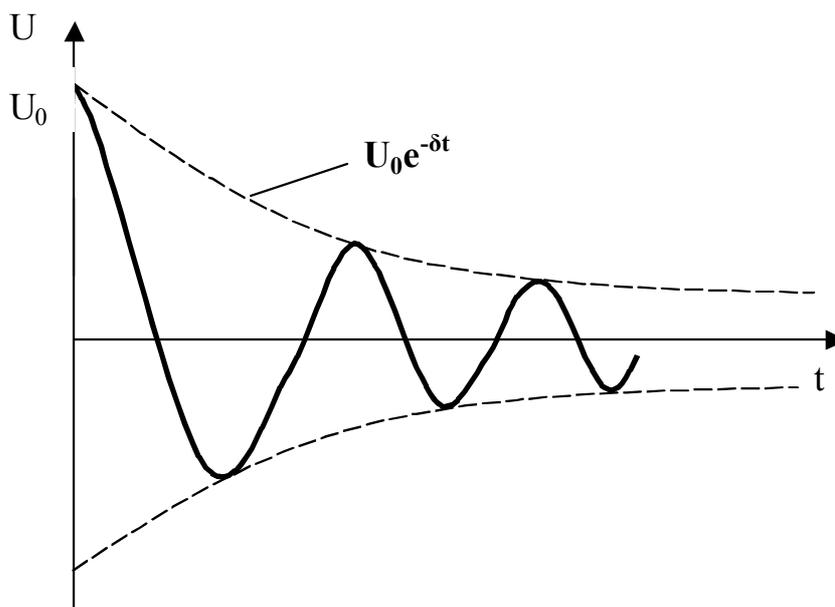


Рис.2

Приведенное решение (9) позволяет найти закон изменения тока в контуре. С учетом (5) имеем

$$J(t) = -C \frac{dU}{dt} = q_0 e^{-\delta t} \left[\delta \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi) \right]$$

где $q_0 = CU_0$ - начальный заряд на конденсаторе.

Умножим и разделим правую часть полученного выражения на ω_0 :

$$J(t) = -C \frac{dU}{dt} = q_0 \omega_0 e^{-\delta t} \left[\frac{\delta}{\omega_0} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega t + \varphi) \right]$$

Введем угол α , определяемый условиями $\cos \alpha = \delta/\omega_0$, $\sin \alpha = \omega/\omega_0$.

После простых тригонометрических преобразований получаем закон изменения тока J в контуре:

$$J(t) = J_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi - \alpha) \quad (12)$$

где $J_0 = q_0 \omega_0$ - амплитуда тока в начальный момент.

Так как $\sin \alpha > 0$ и $\cos \alpha > 0$, то угол α меняется в пределах $0 < \alpha < \pi/2$. Следовательно, между напряжением U на конденсаторе и силой тока J в контуре имеется сдвиг по фазе α , который зависит от коэффициента затухания δ : при $\delta \ll \omega_0$, $\alpha \rightarrow \pi/2$.

Таким образом, в случае малого затухания сила тока J отстает по фазе от напряжения U на величину α .

2. Пусть теперь затухание велико: $\delta > \omega_0$ (или $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$).

В этом случае частота ω , представленная соотношением (10), является мнимой величиной. Это означает, что решение (9) не применимо, иначе говоря, электрических колебаний в контуре не будет. Для данного случая общее решение уравнения (8) имеет вид

$$U(t) = A_1 e^{-h_1 t} + A_2 e^{-h_2 t} \quad (13)$$

т.е. является суммой двух экспоненциальных функций времени, что выражает апериодическое монотонное затухание напряжения U . В выражении (13)

$$h_1 = \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad h_2 = \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

следовательно, h_1 и h_2 - вещественные и положительные параметры; A_1 и A_2 - произвольные постоянные, определяемые из начальных условий:

$$\begin{aligned} U_{t=0} &= A_1 + A_2 \\ \left. \frac{dU}{dt} \right|_{t=0} &= -A_1 h_1 - A_2 h_2 = 0 \end{aligned}$$

так как при $t = 0$ $J = 0$.

Решая совместно оба уравнения, получаем

$$A_1 = -U_0 \frac{h_2}{h_1 - h_2}, \quad A_2 = U_0 \frac{h_1}{h_1 - h_2},$$

Тогда решение (13) принимает вид

$$U(t) = U_0 \frac{1}{h_1 - h_2} (h_1 e^{-h_2 t} - h_2 e^{-h_1 t}) \quad (14)$$

На рис. 3 графически представлен апериодический разряд конденсатора (пунктирные кривые соответствуют слагаемым, сплошная кривая - их сумме).

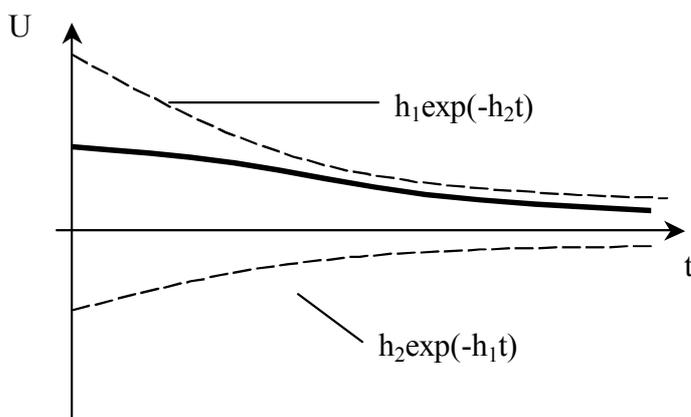


Рис.3

3. Рассмотрим случай, когда $\delta = \omega_0$, или

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (15)$$

Это соотношение определяет так называемый критический режим, при котором осуществляется переход колебательного процесса в апериодический. Сопротивление $R_{\text{кр}}$ принято называть критическим сопротивлением.

Из соотношений (9) и (12) следует, что величина δ характеризует скорость затухания колебаний в контуре, так как чем больше δ , тем быстрее прекращаются колебания. Величина $\tau = 1/\delta$ характеризует время, за которое амплитуда колебаний, убывает в e число раз.

Кроме коэффициента δ для оценки быстроты затухания колебаний используют безразмерную величину γ , называемую логарифмическим декрементом затухания и равную натуральному логарифму отношения двух последовательных максимальных отклонений колеблющейся величины в одну и ту же сторону. Так, для напряжения на конденсаторе

$$\gamma = \ln \frac{U_t}{U_{t+T}} = \delta T = \frac{\pi R}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}}, \quad (16)$$

где U_t - амплитуда напряжения в момент времени t ; U_{t+T} амплитуда напряжения в момент времени $t+T$.

Очевидно, что коэффициент затухания δ характеризует затухание колебаний за единицу времени, а логарифмический декремент затухания γ - затухание колебаний за один период T . Если N_e -число колебаний за время, в течение которого амплитуда уменьшилась в e раз, то можно записать, что

$$\gamma = \frac{1}{N_e} \quad (17)$$

Колебательный контур часто характеризуют его добротностью Q , которая определяется соотношением

$$Q = \frac{\pi}{\gamma} = \pi N_e = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}} \quad (18)$$

Очевидно, чем больше добротность контура Q , тем медленнее затухают колебания.

Физический смысл добротности Q рассмотрим для случая слабых затуханий ($\delta < \omega_0$). Энергия

$W_0 = \frac{CU_0^2}{2}$, запасенная в контуре в начальный момент, к концу первого периода уменьшится до

$\frac{CU_0^2}{2} e^{-2\delta T}$. Относительное уменьшение энергии за один период

$$\frac{\Delta W}{W_0} = \frac{\frac{CU_0^2}{2} (1 - e^{-2\delta T})}{\frac{CU_0^2}{2}} = 1 - e^{-2\delta T} \approx 2\delta T = \frac{2\pi}{Q}$$

(здесь учтено, что при слабом затухании $e^{-2\delta T} \approx 1 - 2\delta T$). Таким образом,

$$Q = 2\pi \cdot \frac{W_0}{\Delta W} \quad (19)$$

т.е. добротность контура Q равна умноженному на 2π отношению энергии, запасенной в контуре, к потерям энергии за период.

В ряде случаев колебательный процесс целесообразно исследовать непосредственно по зависи-

мости напряжения U от тока J . Интегральную кривую $U=f(J)$, уравнение которой может быть получено с помощью дифференциальных уравнений (5) и (8), называют фазовой траекторией свободных затухающих колебаний. Преимущество анализа процессов в колебательном контуре с помощью фазовых траекторий заключается в их наглядности.

С учетом соотношения (5) уравнение (8) можно представить в виде

$$\frac{dJ}{dt} = \omega_0^2 CU - 2\delta J \quad (20)$$

Решая совместно (5) и (20), получаем дифференциальное уравнение интегральной кривой на фазовой плоскости

$$\frac{dU}{dJ} = \frac{J}{2\delta CU - \omega_0^2 C^2 U} = \frac{JL}{C(RJ - U)} \quad (21)$$

Так как в начальный момент времени напряжение на конденсаторе равно U_0 , а ток $J=0$, то согласно (21) $dU/dJ=0$. Следовательно, фазовая траектория начинается параллельно оси J , т.е. горизонтально.

Через четверть периода $U=0$, а $J=J_0$ и $dU/dJ=L/(CR)$. В этом случае траектория подходит к оси J под углом

$$\varphi = \arctg \frac{L}{CR}.$$

В теории колебаний уравнение интегральных кривых часто записывают в полярных координатах. Полагая $U = \rho \cos \theta$, $J = \omega_0 C \rho \sin \theta$, уравнение (21) представим в виде

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{2\delta \sin^2 \theta d\theta}{\delta \sin 2\theta - \omega} \quad (22)$$

При очень слабом затухании ($\delta \ll \omega_0$, $\omega = \omega_0$) решение уравнения (22) принимает вид

$$\rho = U_0 e^{\frac{\delta}{\omega_0} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta - \theta \right)}. \quad (23)$$

Вид фазовой траектории представлен на рис. 4. Каждый поворот на угол $\theta=2\pi$ соответствует одному полному колебанию. Из (23) следует, что за время одного периода T амплитуда

напряжения U уменьшается в $e^{-2\pi\delta/\omega_0} = e^{-\delta T}$ раз, что полностью согласуется с выражением (9).

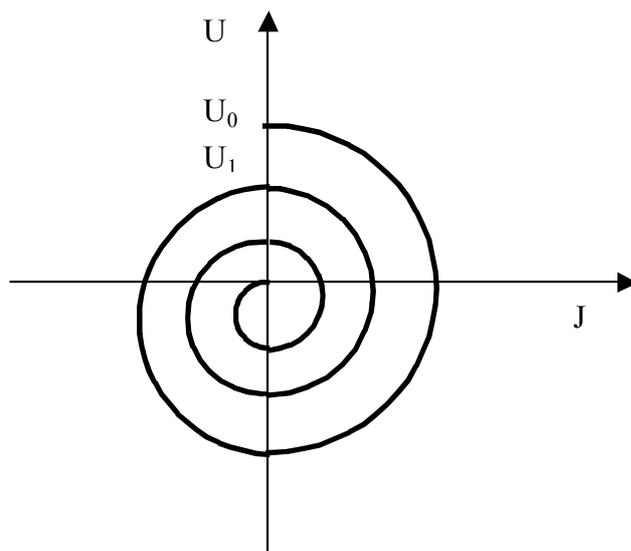


Рис.4

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Описание установки.

Для получения свободных затухающих колебаний и их изучения в данной работе использовалась электрическая схема, приведенная на рис. 5. Конденсатор С с помощью реле, частота переключения которого составляет 50 Гц, подключается то к источнику постоянного напряжения, то к катушке индуктивности L и сопротивлению R. Колебания можно наблюдать на экране осциллографа.

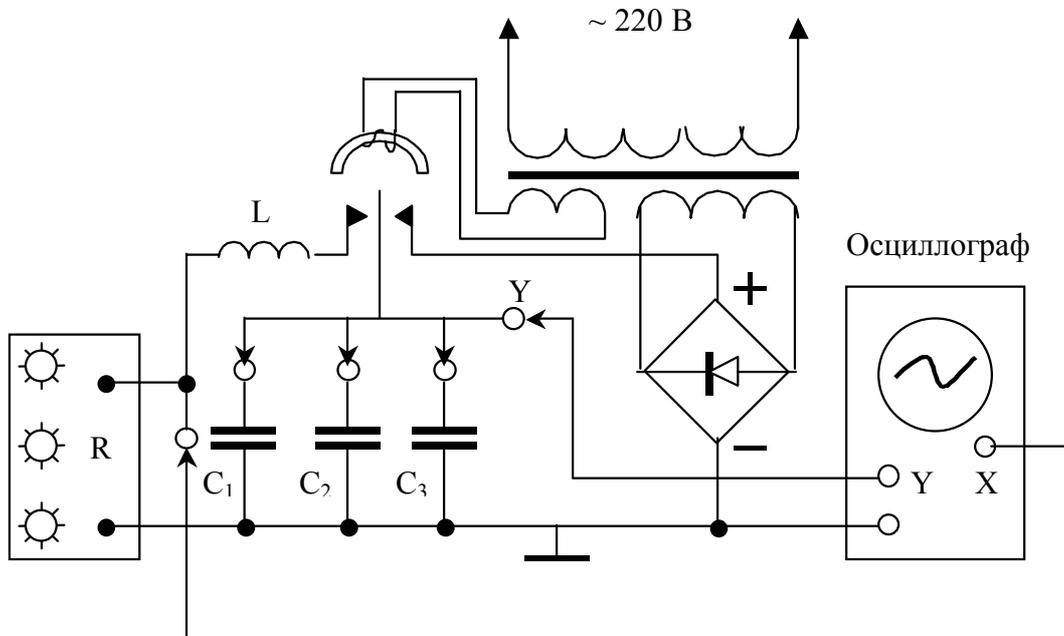


Рис. 5

При включении генератора временной развертки осциллографа и синхронизации его частоты с частотой реле на экране наблюдается устойчивая картина затухающих колебаний.

Для получения фазовой кривой $U=f(J)$ достаточно отключить генератор развертки осциллографа. В этом случае на вход Y будет подаваться напряжение U, а на вход X - напряжение JR, пропорциональное силе тока J.

Определяя по фазовой кривой начальное напряжение U_0 и напряжение к концу первого полного колебания U_1 (см. рис. 4), найдем добротность контура Q.

Действительно, начальная энергия, записанная в контуре, и энергия к концу первого полного колебания соответственно равны:

$$W_0 = \frac{1}{2}CU_0^2, \quad W_1 = \frac{1}{2}CU_1^2,$$

Отсюда потери энергии за один период $\Delta W = W_0 - W_1 = \frac{C}{2}(U_0^2 - U_1^2)$. Поэтому добротность контура Q согласно (9) можно представить в виде

$$Q = 2\pi \frac{U_0^2}{U_0^2 - U_1^2} = \frac{2\pi}{1 - \left(\frac{U_1}{U_0}\right)^2} \quad (24)$$

Если чувствительность вертикально отклоняющихся пластин равна k_Y , то можно записать, что $U_0 = y_0/k_Y$; $U_1 = y_1/k_Y$, где y_0 - максимальное отклонение луча по вертикали; y_1 - отклонение луча по вертикали к концу первого полного колебания. Тогда добротность контура

$$Q = \frac{2\pi}{1 - \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2} \quad (25)$$

ВЫПОЛНЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Задание 1. Определение периода затухающих колебаний T.

1. Собрать электрическую схему согласно рис. 5.
2. Включить осциллограф и реле.
3. Меняя сопротивление R_M , с помощью магазина сопротивление для выбранного значения емкости C получить осциллограмму, соответствующую затухающей кривой (см. рис. 2). Ручками управления осциллографа добиться, чтобы вся осциллограмма располагалась в центральной части экрана. Для получения устойчивой картины необходимо воспользоваться ручкой «Уровень»; если этого сделать не удастся, - ручкой «Стаб».
4. Поставить большую ручку двойного переключателя «Время/см» и переключатель "X, x1, x0,2» в такие положения, чтобы на горизонтальной оси укладывались 2...3 полных колебания.
5. Измерить по горизонтальной шкале экрана осциллографа длину интервала l одного полного колебания.
6. Определить период колебаний T по формуле: $T = lN\tau$, где N - значение множителя развертки, равное 1 или 0,2 в зависимости от положения переключателя «X, x1, x0,2»; τ - коэффициент развертки. Значение τ соответствует цифровой отметке переключателя «Время/см» при условии, что малая ручка «Длительность» находится в крайнем правом положении (в этом положении ручка «Длительность» имеет механическую фиксацию).
7. Зарисовать осциллограмму без строгого соблюдения масштаба (табл. 1).
8. Полученное значение периода $T_{\text{ЭКСП}}$ сравнить с теоретическим, рассчитанным по формуле (11), при этом следует учитывать, что $R = R_M + R_L$ (R_L - сопротивление катушки L).
9. Выполнить измерения для трех - четырех различных комбинаций сопротивления R_M и емкости C (при $R = \text{const}$ два различных значения C и, наоборот). Результаты занести в табл. 1.

Таблица 1

Характеристика	1	2	3	4
Осциллограмма				
Ёмкость C , Ф				
Сопротивление				
$R = R_M + R_L$, Ом				
Длина интервала l , см				
Коэффициент развертки τ , с/см				
Период колебаний $T_{\text{ЭКСП}}$, с				
Период колебаний $T_{\text{ТЕОР}}$, с				
Относительная ошибка				
$\frac{T_{\text{ТЕОР}} - T_{\text{ЭКСП}}}{T_{\text{ТЕОР}}} 100, \%$				

Задание 2. Определение критического сопротивления $R_{\text{КР}}$.

1. Постепенно увеличивая сопротивление R_M , зафиксировать $R_{\text{КР}}$, при котором затухающие колебания переходят в апериодический разряд конденсатора (см. рис. 3).

2. Полученное значение $R_{\text{КР}}^{\text{ЭКСП}}$ сравнить с теоретическим, рассчитанным по формуле (15), учитывая, что $R = R_M + R_L$.
3. Провести измерения для трех различных емкостей C . Данные занести в табл. 2. Значения R_L и L указаны на панели установки.

Таблица 2

Характеристика	1	2	3	4
Осциллограмма				
Емкость C , Ф				
$R_{\text{КР}}^{\text{ЭКСП}}$, Ом				
$R_{\text{КР}}^{\text{ТЕОР}}$, Ом				
Относительная ошибка				
$\frac{R_{\text{КР}}^{\text{ТЕОР}} - R_{\text{КР}}^{\text{ЭКСП}}}{R_{\text{КР}}^{\text{ТЕОР}}} 100, \%$				

Задание 3. Определение добротности контура Q с помощью фазовых кривых.

1. Получить фазовую кривую, отключив генератор развертки осциллографа (переключатель «Х, х1, х0,2» поставить в положение «1»). Сопротивление R_M и емкость C необходимо выбрать такими, чтобы фазовая кривая имела не менее четырех полных колебаний (случай слабого затухания: $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$). Это достигается для диапазонов сопротивления 10...200 Ом и емкости 0,25.....0,5 мкФ.
2. С помощью вертикальной шкалы экрана осциллографа измерить значения y_0 и y_1 и определить добротность контура $Q_{\text{ЭКСП}}$ по формуле (25). Полученные значения $Q_{\text{ЭКСП}}$ сравнить с теоретическим $Q_{\text{ТЕОР}} \cong \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$, учитывая, что $R=R_M + R_L$.
3. Провести измерения для трех-четырех комбинаций R_M и C . Результаты занести в табл. 3.

Таблица 3

Характеристика	1	2	3	4
Фазовая кривая				
Емкость C , Ф				
Сопротивление $R=R_M + R_L$, Ом				
y_0 , мм				
y_1 , мм				
$Q_{\text{ЭКСП}}$				
$Q_{\text{ТЕОР}}$				
Относительная ошибка				
$\frac{Q_{\text{ТЕОР}} - Q_{\text{ЭКСП}}}{Q_{\text{ТЕОР}}} 100, \%$				

4. Экспериментально исследовать влияние параметров R и C на характер фазовой кривой и объяснить полученные результаты.

Задание 4. Определение логарифмического декремента затухания γ .

1. Получить фазовую кривую при минимальном значении емкости С.
2. С помощью вертикальной шкалы экрана осциллографа измерить значения начального отклонения луча по вертикали y_0 и последующие значения y_1, y_2, y_3, \dots соответственно к концу первого, второго, третьего и т.д. полных колебаний.
3. Рассчитать логарифмический декремент затухания по формуле

$$\gamma = \ln \frac{y_i}{y_{i+1}} \quad (26)$$

Данные занести в табл. 4.

Таблица 4

$y_i, \text{ мм}$	$\frac{y_i}{y_{i+1}}$	$\gamma_i = \ln \frac{y_i}{y_{i+1}}$	$\gamma_i - \langle \gamma \rangle$	$(\gamma_i - \langle \gamma \rangle)^2$
.				
.				
.				

4. Рассчитать погрешность среднего значения по формуле

$$\Delta \langle \gamma \rangle = t_{P,f} \sqrt{\frac{\sum (\gamma_i - \langle \gamma \rangle)^2}{n(n-1)}}$$

где множитель $t_{P,f}$ для $P = 0,95$ и $f=n-1$ (n - число измерений) приведены в табл. 5.

Таблица 5

Величина	$P = 0,95$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f = n - 1$									
$t_{P,f}$	12,7	4,3	3,2	2,8	2,6	2,4	2,4	2,3	2,3

5. Окончательный ответ представить в вида $\langle \gamma \rangle \pm \Delta \langle \gamma \rangle$.

Контрольные вопросы

1. Как получаются свободные затухающие колебания в контуре LRC?
2. Как меняется амплитуда затухающих колебаний за один, n периодов?
3. Что понимают под критическим режимом работы контура?
4. В чем физический смысл добротности контура?
5. Что называют фазовой траекторией?
6. Можно ли с помощью фазовой траектории определить соотношение между энергиями электрического и магнитного полей в любой момент времени?
7. Какими факторами можно объяснить расхождение между экспериментальными и теоретическими значениями исследуемых величин?

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики: Учеб. пособие. В 3 т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. 3-е изд., испр. М.: Наука, 1988. 496 с.
2. Калашников С.Г. Электричество: Учеб. пособие для вузов. 5-е изд., испр. и доп. М.: Наука, 1985. 576 с.
3. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний: Учебник для вузов. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1964. 437 с.