Всероссийская олимпиада по физике среди технических ВУЗов
Московский тур
2024

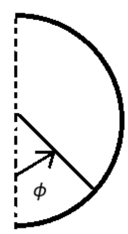
Задача 1. Вокруг одиночной планеты движется космический корабль со скоростью v в тангенциальном направлении, при этом абсолютное значение его потенциальной энергии в три раза больше кинетической энергии. Определить характеристическую скорость корабля, необходимую для удаления его на бесконечность. Характеристическая скорость, это та скорость, которую может развить корабль в свободном пространстве с тем же запасом топлива.

Задача 2. Лента намотана на катушку, которая может вращаться с постоянным моментом сопротивления M. Внешний радиус намотки R_0, внутренний r_0. С какой постоянной силой нужно тянуть за ленту, чтобы она полностью размоталась с начальной и конечной угловой скоростью равной 0. Массой ленты пренебречь.

Задача 3. На столе лежит пружина, один конец которой закреплен, а к другому концу привязана нить перекинутая, через блок на краю стола. К другому концу нити привязан груз, длина свешивающейся части нити равна l. Груз совершает малые колебания в вертикальной плоскости по эллиптической траектории, характерный размер которой $r \ll l$. Определить длину, на которую была растянута пружина в состоянии покоя.

Задача 4. Идеальный газ переходит из состояния с температурой T_1 в состояние с температурой T_2 в ходе обратимых процессов. Известно, что температура не убывает, тепло от газа не отводится, при этом максимально возможное количество теплоты, переданное газу, равно Q_{max}. Какое минимально возможное количество теплоты можно передать газу, при тех же условиях.

Задача 5. Полукольцо радиуса R заряжено линейной плотностью заряда $\tau = a \sin \phi$, см рис. Определить распределение потенциала электрического поля на оси, соединяющей концы полукольца, внутри и вне полукольца.



К задаче 5

Задача 6. Два разноименных заряда q и $-q$, одинаковой массой m, находятся на расстоянии l друг от друга и движутся в одной плоскости навстречу друг другу с одинаковой по модулю скоростью v так, что векторы скорости параллельны и направлены под углом α к линии соединяющей их. Определить индукцию однородного магнитного поля перпендикулярного плоскости движения, при котором заряды столкнутся друг с другом.

Задача 7. Световой пучок интенсивности I_0 из диэлектрика с показателем преломления n, попадает в вакуум. Угол падения на поверхность раздела близок к углу полного внутреннего отражения. Определить максимальную интенсивность прошедшего пучка, считая, что коэффициент отражения определяется по формуле Френеля $I_1 = I_0 \dfrac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)}$, где α_1 и α_2 углы падения и преломления.

Решение задач

Задача 1. Механическая энергия корабля $E = \frac{mv^2}{2} - 3\frac{mv^2}{2} = -2\frac{mv^2}{2}$. На бесконечности механическая энергия равна 0. Приращение кинетической энергии должно быть равно $2\frac{mv^2}{2}$. Тогда из определения характериситческой скорости $\frac{m\left(v+\Delta v\right)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(2v\Delta v + \Delta v^2\right) = 2\frac{mv^2}{2}$, $\Delta v^2 + 2v\Delta v - 2v^2 = 0$, $\Delta v = -v \pm \sqrt{v^2+2v^2}$, $\Delta v = \left(\sqrt{3}-1\right)v \approx 0.73v$.

Ответ: $\Delta v = \left(\sqrt{3}-1\right)v$.

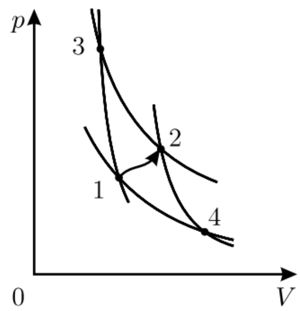
Задача 2. Уравнение динамики по мере сматывания ленты и уменьшения внешнего радиуса намотки r: $Fr - M = I\frac{d\omega}{dt}$, где I момент инерции катушки. Изменение радиуса со временем $2\pi r dr = \omega r \delta dt$, где δ толщина ленты. Поэтому $dt = \frac{2\pi dr}{\omega\delta}$. Тогда $Fr - M = \frac{I\omega\delta}{2\pi}\frac{d\omega}{dr}$, $\frac{2\pi}{I\delta}\int\limits_{R_0}^{r_0}\left(Fr - M\right)dr = \int\limits_0^0 \omega\, d\omega = 0$, $\frac{2\pi}{I\delta}\left(\frac{F}{2}\left(R_0^2 - r_0^2\right) - M\left(R_0 - r_0\right)\right) = 0$, $F = \frac{2M}{R_0 + r_0}$.

Ответ: $F = \frac{2M}{R_0 + r_0}$.

Задача 3. Период колебаний в вертикальном и горизонтальном направлении равны $\frac{k}{m} = \frac{g}{l}$. Из условия равенства силы тяжести и силы упругости в состоянии покоя $k\Delta l = mg$. Тогда $\Delta l = l$.

Ответ: $\Delta l = l$.

Задача 4. Нарисуем pV - диаграмму и обозначим состояния с температурами T_1 и T_2 точками «1» и «2» соответственно (см. рис.). Проведём через эти точки изотермы и адиабаты и обозначим точки их пересечения «3» и «4». Из условия задачи следует, что процесс 1-2, в течение которого температура не убывает, а тепло не отводится от газа, возможен. Это означает, что точка 2 лежит справа от адиабаты, проходящей через точку 1. При этом график произвольного процесса 1-2, для которого, однако, выполняются условия задачи, лежит внутри цикла 1-3-2-4-1. Обозначим через Q_{12}, Q_{132} и Q_{142} количества теплоты, сообщаемые газу в процессах 1-2, 1-3-2 и 1-4-2 соответственно. Рассмотрим процесс 1-3-2-1. В нём газ сначала получает тепло Q_{132}, потом отдаёт тепло Q_{12}, совершая при этом работу $Q_{132} - Q_{12}$, которая равна площади фигуры, ограниченной на диаграмме линиями «1–3», «3–2» и «2–1». Так как эта площадь неотрицательна, то $Q_{132} \geq Q_{12}$. Рассмотрим аналогичным образом процесс 1-2-4-1. Работа, которую совершает газ в этом процессе, также неотрицательна и равна $Q_{12} - Q_{142}$, откуда $Q_{12} \geq Q_{142}$. Из полученных неравенств имеем: $Q_{142} \leq Q_{12} \leq Q_{132}$. Поскольку процесс 1-2 - произвольный (из числа удовлетворяющих условию задачи), то из данного неравенства следует, что максимальное количество теплоты Q_{max}, которое может передаваться газу в таком процессе, равно Q_{132}. Минимальное же количество теплоты Q_{min}, которое может передаваться газу в данном процессе, из тех же соображений равно Q_{142}. Для цикла Карно 1-3-2-4-1 $\eta = 1 - \frac{Q_{142}}{Q_{132}} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$, откуда $Q_{min} = \frac{T_1}{T_2}Q_{max}$.



К задаче 4

Ответ: $Q_{min} = \dfrac{T_1}{T_2} Q_{max}$.

Задача 5. Распределим заряд полукольца по поверхности шара радиуса R посредством вращения вокруг оси. Тогда поверхностная плотность $\sigma = \dfrac{Ra \sin\phi d\phi}{2\pi R \sin\phi R d\phi} = \dfrac{a}{2\pi R}$. Тогда потенциал сферы, равномерно заряженной по поверхности $\phi = \begin{cases} \frac{4\pi R^2\sigma}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{a}{2\pi\epsilon_0}, & x < R \\ \frac{4\pi R^2\sigma}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{Ra}{2\pi\epsilon_0 x}, & x \geq R \end{cases}$.

Ответ: $\phi = \begin{cases} \frac{a}{2\pi\epsilon_0}, & x < R \\ \frac{Ra}{2\pi\epsilon_0 x}, & x \geq R \end{cases}$.

Задача 6. В силу симметрии задачи заряды встретятся в центре масс. Теорема об изменении момента импульса относительно центра масс. $qv_r Br = \dfrac{dL}{dt} = qB\dfrac{dr}{dt}r$, $dL = \dfrac{1}{2}qBd\left(r^2\right)$, $mv\sin\alpha\dfrac{l}{2} = \dfrac{1}{2}qB\left(\dfrac{l}{2}\right)^2$, $B = \dfrac{4mv\sin\alpha}{ql}$

Ответ: $B = \dfrac{4mv\sin\alpha}{ql}$.

Задача 7. Для полного внутреннего отражения $\sin\alpha_1 = \dfrac{1}{n}$, $\sin\alpha_2 = 1$. Коэффициент прохождения:

$D = 1 - R = 1 - \dfrac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} = \dfrac{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2) - \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} = \dfrac{4\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)}$.

Интенсивность прошедшего пучка зависит от соотношения углов падения и преломления $I = I_0 D\dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} = I_0\dfrac{4\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)}\dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}$, после учета $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{2}$, получаем $I = I_0 4\sin\alpha_1 = \dfrac{4I_0}{n}$

Ответ: $I = \dfrac{4I_0}{n}$.