Всероссийская олимпиада по физике среди технических вузов
Всероссийский тур
2024

Задача 1. По гладкой горизонтальной поверхности катится цилиндр радиуса R со скоростью V. Определить высоту, на которую должен прыгнуть человек, чтобы перепрыгнуть цилиндр.

Задача 2. Лестница приставлена к высокой стенке. Расстояние от стенки до точки касания лестницы и пола равно a, расстояние от верхней точки лестницы до пола равно b. Человек поднялся по лестнице до середины высоты. Коэффициент трения между лестницей и полом, лестницей и стенкой одинаков. При каком коэффициенте трения этот подъём будет безопасен. Массой лестницы и габаритами человека пренебречь.

Задача 3. Оценить минимально возможную мощность (без учета потерь) необходимую для подъёма дрона, полная масса которого равна $M = 1$ кг, если дрон имеет четыре пропеллера радиуса $R = 10$ см. Плотность воздуха считать равной 1.2 кг/м^3

Задача 4. Определить период малых колебаний тонкого обруча радиуса R накинутого на горизонтально расположенный цилиндр радиуса $r < R$, при условии, что проскальзывание между обручем и цилиндром отсутствует. Во сколько раз изменится период колебаний если коэффициент трения станет равным 0.

Задача 5. Давление и плотность воздуха в атмосфере связаны соотношением $p \sim \rho^{\gamma}$, где $\gamma = 7/5$ показатель адиабаты воздуха. Найдите зависимость температуры воздуха от высоты и температуру воздуха на уровне Джомолунгмы 8850 м, если на уровне моря температура равна $T_0 = 300$ К.

Задача 6. По гладкой плоской поверхности половины шара, заряженного равномерно объёмной плотностью положительного заряда ρ, скользит отрицательный заряд q массой m. В начальный момент времени заряд находится в центре шара и движется со скоростью V_0. Определить максимальное расстояние, на которое удалится от центра шара заряд, если перпендикулярно плоской поверхности наложено однородное магнитное поле с индукцией B.

Задача 7. Тонкий луч проходит через стеклянную призму, имеющую форму длинного бруска, сечением которого является равнобедренный треугольник с углом при вершине равным 120° без изменения направления и светового потока. Определить показатель преломления стекла, если луч перпендикулярен длинным ребрам призмы.

Задача 8. Атом водорода в основном состоянии, движущийся со скоростью V, сталкивается с покоящимся атомом водорода в основном состоянии. Используя модель Бора, найдите наименьшую скорость V_0 атома, ниже которой столкновение должно быть упругим.

Решение задач

Задача 1. На гладкой поверхности человек может прыгнуть только вертикально. Перейдя в систему отсчета связанную с цилиндром получим соприкасающиеся в двух точках параболу и окружность. Уравнения кривых $y = h\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$ и $x^2 + (y-R)^2 = R^2$. Получим из них уравнение на y: $ya^2 = ha^2 - hx^2 = ha^2 - hR^2 + h(y-R)^2 = ha^2 + h^2 - 2hR$, откуда $y^2 - y\left(\dfrac{a^2}{h} + 2R\right)^2 + a^2 = 0$. Симметрия задачи приводит к тому, что дискриминант должен быть равен 0. Учитывая, что $a = Vt$, $h = \dfrac{gt^2}{2} = \dfrac{ga^2}{2V^2}$, $\dfrac{a^2}{h} = \dfrac{2V^2}{g}$, получаем выражение $0 = \left(\dfrac{a^2}{h} + 2R\right)^2 - 4a^2 = \dfrac{a^4}{h^2} + 4R\dfrac{a^2}{h} + 4R^2 - 4a^2 = \dfrac{4V^4}{g^2} + 4R\dfrac{2V^2}{g} + 4R^2 - 4a^2$, откуда $a^2 = R\dfrac{2V^2}{g} + \dfrac{V^4}{g^2} + R^2 = h\dfrac{2V^2}{g}$ и $h = R + \dfrac{V^2}{2g} + \dfrac{R^2 g}{2V^2}$.

Ответ: $h = R + \dfrac{V^2}{2g} + \dfrac{R^2 g}{2V^2}$.

Задача 2. Пусть расстояние по горизонтали от точки касания с полом до человека равно x. Нормальная реакция опоры со стороны стенки равна N_1, со стороны пола N_2, тогда уравнения динамики принимают вид: $mg = N_2 + \mu N_1$, $N_1 = \mu N_2$, $mgx = \mu N_1 a + N_1 b$. Решая данную систему уравнений с учетом условия $x = \dfrac{a}{2}$, получаем $\mu = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2} - b}{a}$.

Ответ: $\mu = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2} - b}{a}$.

Задача 3. Сила тяги пропеллеров равна скорости изменения импульса воздушной струи $Mg = \dfrac{\Delta p}{\Delta t}$, где M – полная масса дрона с грузом, Δp – сообщаемый пропеллерами импульс воздуху. Пусть v – средняя скорость разгоняемого пропеллерами воздуха. Тогда $\Delta p = v\Delta m_{air} \approx v\rho_{air} S v \Delta t$, где Δm_{air} - масса разгоняемого за время Δt воздуха, ρ_{air} – плотность воздуха, S – площадь пропеллеров. Отсюда следует условие равновесия дрона с грузом: $Mg = \rho_{air} S v^2$. Мощность необходимая для разгона струи: $N = \dfrac{v^2}{2}\dfrac{\Delta m_{air}}{\Delta t} = \dfrac{Mgv}{2} = \dfrac{1}{2}Mg\sqrt{\dfrac{Mg}{\rho_{air}4\pi R^2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{M^3 g^3}{\rho_{air}4\pi R^2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1^3 \cdot 9.8^3}{1.2 \cdot 2 \cdot 3.14 \cdot 0.1^2}} \approx 39.5$ Вт.

Ответ: $N = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{M^3 g^3}{4\rho_{air}\pi R^2}} \approx 39.5$ Вт.

Задача 4. Пусть угол поворота точки касания обруча и цилиндра относительно центра цилиндра, а также угол поворота центра масс обруча относительно центра цилиндра α. Дуга цилиндра и обруча от начальной точки до точки касания $l = r\alpha = R\beta$, где β - угол, опущенный из центра обруча на дугу l. Угол поворота γ обруча равен разнице углов α и β. Откуда $\gamma = \alpha - \beta = \alpha - \dfrac{\alpha r}{R} = \alpha\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$. Закон сохранения энергии:

$$mg(R-r)(1-\cos\alpha) + \frac{m}{2}V^2 + \frac{m}{2}R^2\omega^2 = const,$$

$$mg(R-r)(1-\cos\alpha) + \frac{m}{2}\left((R-r)\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{m}{2}R^2\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = const$$

Упрощая выражение, получаем: $g(R-r)(1-\cos\alpha) + (R-r)^2\left(\dfrac{d\alpha}{dt}\right)^2 = const.$

Берем производную по t: $g\sin(\alpha)\left(\dfrac{d\alpha}{dt}\right) + 2(R-r)\left(\dfrac{d\alpha}{dt}\right)\dfrac{d^2\alpha}{d^2 t} = 0$. Тогда $\omega^2 = \dfrac{g}{2(R-r)}$ и

$T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{2(R-r)}{g}}$.

При отсутствии трения вращательная составляющая энергии равна 0, поэтому $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{R-r}{g}}$.

Ответ: $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{2(R-r)}{g}}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{R-r}{g}}$.

Задача 5. Уравнение состояния $p = \dfrac{\rho RT}{\mu} = \alpha\rho^{\gamma}$. Условие равновесия слоя воздуха dx: $g\rho dx = -dp = -\alpha\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho$, $\dfrac{g}{\alpha\gamma}dx = -\rho^{\gamma-2}d\rho$, $\dfrac{g}{\alpha\gamma}x = \dfrac{1}{\gamma-1}\left(\rho_0^{\gamma-1} - \rho^{\gamma-1}\right) = \dfrac{1}{\gamma-1}\dfrac{R}{\alpha\mu}\left(T_0 - T\right)$.
Откуда $T = \left(T_0 - \dfrac{g\mu(\gamma-1)}{R\gamma}x\right) = \left(300 - \dfrac{9.8\cdot 29\cdot 0.4}{8.31\cdot 10^3\cdot 1.4}\cdot 8850\right) = 300 - 86.5 = 213.5$ K.

Ответ: $T = \left(T_0 - \dfrac{g\mu(\gamma-1)}{R\gamma}x\right) = 213.5$ K.

Задача 6. Напряженность электрического поля в равномерно заряженном шаре $E_s = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}$ вдвое больше чем у половины шара $E = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}$. Закон сохранения энергии для заряда в максимально удаленной точке: $\dfrac{mV_0^2}{2} = \dfrac{mV^2}{2} + \dfrac{q\rho}{12\varepsilon_0}r_0^2$. Закон сохранения момента импульса $mVr_0 = \int\limits_0^t qV_rBr\,dt = \int\limits_0^{r_0} qBr\,dr = \dfrac{1}{2}qBr_0^2$, откуда $V = \dfrac{qB}{2m}r_0$, и $V_0^2 = \left(\dfrac{qB}{2m}\right)^2 + \dfrac{q\rho}{6m\varepsilon_0}r_0^2 =$
$= \left(\left(\dfrac{qB}{2m}\right)^2 + \dfrac{q\rho}{6m\varepsilon_0}\right)r_0^2$.

Ответ: $r_0 = \dfrac{V_0}{\sqrt{\left(\frac{qB}{2m}\right)^2 + \frac{q\rho}{6m\varepsilon_0}}}$.

Задача 7. Без изменения светового потока луч может пройти в случае полного внутреннего отражения и угла Брюстера. Учитывая, что угол Брюстера должен быть больше 45°, единственная возможность, это прохождение через боковые стенки с полным внутренним отражением от основания. Из-за симметрии задачи угол падения 60°. Откуда $\operatorname{tg} 60^\circ = n = \sqrt{3}$. Проверяем выполнение условия полного внутреннего отражения: угол падения на нижнюю грань должен быть больше γ, $\sin\gamma = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} < \sin 60^\circ$.

Ответ: $n = \sqrt{3}$.

Задача 8. Согласно модели Бора, энергетические уровни атома водорода задаются формулой: $E_n = -\dfrac{E_0}{n^2}$, где $E_0 = \dfrac{k^2me^4}{2\hbar^2}$ энергия ионизации, а n номер орбиты. Основное состояние соответствует $n = 1$, в то время как наименьшее возбужденное состояние соответствует $n = 2$. Таким образом, наименьшая энергия, необходимая для возбуждения атома водорода, равна: $\Delta E = E_2 - E_1 = E_0\left(1 - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{3}{4}E_0$. При неупругом столкновении часть кинетической энергии сталкивающихся частиц преобразуется в их внутреннюю энергию. Внутренняя энергия системы из двух атомов водорода, рассматриваемой в задаче, не может быть изменена менее чем на ΔE. Это означает, что если кинетическая энергия сталкивающихся атомов относительно их центра масс меньше ΔE, то столкновение должно быть упругим. Величину V_0 можно найти, рассмотрев критический случай, когда кинетическая энергия сталкивающихся атомов равна наименьшей энергии возбуждения. Относительно центра масс атомы движутся в противоположном направлении со скоростями

$V_0/2$. Поэтому $\dfrac{1}{2}m_H\left(\dfrac{1}{2}V_0\right)^2 + \dfrac{1}{2}m_H\left(\dfrac{1}{2}V_0\right)^2 = \dfrac{3}{4}E_0$ и $V_0 = \sqrt{\dfrac{3E_0}{m_H}}$.

Ответ: $V_0 = \sqrt{\dfrac{3E_0}{m_H}}$.