3. Теория линейных пространств.

3.1. Основные определения.

3.1.1. Определение линейного пространства. Множество L называется **линейным пространством**, если

на этом множестве определена операция **сложения** его элементов, т.е. каждой паре $\boldsymbol{x} \in L$, $\boldsymbol{y} \in L$ его элементов ставится в соответствие элемент L, называемый суммой элементов x и y, и обозначаемый $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$;

определена операция умножения элементов L на числа, т.е. каждому $\boldsymbol{x} \in L$ и числу α ставится в соответствие элемент L, называемый произведением элемента x на α, и обозначаемый $\alpha\, \boldsymbol{x}$;

для этих операций выполняются следующие свойства (**аксиомы операций**):

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ для $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$;

2. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ для $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in L$;

3. в множестве L существует нулевой элемент, т.е. элемент $\mathbf{0} \in L$ такой, что $\mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$ для $\forall\, \boldsymbol{x} \in L$;

4. для любого элемента $\boldsymbol{x} \in L$ существует противоположный элемент, т.е. элемент, обозначаемый $(-\boldsymbol{x})$ такой, что $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;

5. для любого элемента $\boldsymbol{x} \in L$ его произведение на число 1 равно $\boldsymbol{x}$: $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;

6. $\alpha\, (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\, \boldsymbol{x} + \alpha\, \boldsymbol{y}$ для $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ и любого числа α;

7. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$ для $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ и любых чисел α, β;

8. $(\alpha\, \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\, (\beta\, \boldsymbol{x})$ для $\forall\, \boldsymbol{x} \in L$ и любых чисел α, β.

Элементы линейного пространства называют просто **векторами**; если определяется операция умножения векторов на вещественные числа, то линейное пространство называется **вещественным**, если определяется операция умножения на комплексные числа, то пространство называется комплексным; мы будем рассматривать, в основном, действительные пространства.

Разностью $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ элементов x и y линейного пространства называется сумма элемента $\boldsymbol{x}$ и элемента $(-\boldsymbol{y})$, противоположного элементу $\boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{y})$.

Следствия из аксиом линейного пространства.

1. Нулевой элемент $\mathbf{0}$ любого линейного пространства единственен.

Док-во. При доказательстве этого и других свойств линейного пространства мы должны оперировать только аксиомами, содержащимися в определении линейного пространства. Применим доказательство от противного. Предположим, что в линейном пространстве имеется два нуля: $\mathbf{0}_1$ и $\mathbf{0}_2$. Тогда $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$ (т.к. $\mathbf{0}_2$ – нуль, аксиома 3); и $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$ (т.к. $\mathbf{0}_1$ – нуль, та же аксиома), следовательно, $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$.

2. Для любого элемента $\boldsymbol{x} \in L$ противоположный элемент $-\boldsymbol{x}$ определен единственным образом.

Док-во. От противного. Предположим, что существует два противоположных элемента: $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{x}$. Тогда $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{z} = \mathbf{0} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$; с другой стороны $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{y} + \mathbf{0} = \boldsymbol{y}$, следовательно, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$. Использованы вторая и четвертая аксиомы.

3. $0 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Док-во. $0 \cdot \boldsymbol{x} = 0 \cdot \boldsymbol{x} + \mathbf{0}$ (3-ья аксиома)$= 0 \cdot \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}))$ (4-ая аксиома) $= (0 \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}) + (-\boldsymbol{x})$ (2-ая аксиома) $= (0 \cdot \boldsymbol{x} + 1 \cdot \boldsymbol{x}) + (-\boldsymbol{x})$ (5-ая аксиома) $= ((0 + 1) \cdot \boldsymbol{x}) + (-\boldsymbol{x})$ (7-ая аксиома) $= (1 \cdot \boldsymbol{x}) + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})$ (5-ая аксиома) $= \mathbf{0}$ (3-ья аксиома).

4. $-\boldsymbol{x} = (-1) \cdot \boldsymbol{x}$.

Док-во. $(-1) \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} = (-1) \cdot \boldsymbol{x} + 1 \cdot \boldsymbol{x}$ (5-ая аксиома) $= (-1 + 1) \cdot \boldsymbol{x}$ (7-ая аксиома) $= 0 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (предыдущее свойство).

Самостоятельно доказать, что 5. $-(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$; 6. $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$; 7. $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$;
8. $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$.

3.2. Линейная зависимость векторов линейного пространства.

В этом разделе мы обобщим на случай общего линейного пространства понятия, изученные для геометрических векторов в разделе **1.4. Линейная зависимость и независимость системы векторов.**

Опр. 3.2.1. Выражение $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k$, где коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in R$, называется **линейной комбинацией** векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$.

Опр. 3.2.2. Линейная комбинация векторов $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + ... + \lambda_k \boldsymbol{x}_k$ называется **тривиальной**, если все $\lambda_i \quad (i = 1, 2, ..., k)$ равны нулю.

Опр. 3.2.2. Линейная комбинация векторов $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + ... + \lambda_k \boldsymbol{x}_k$ называется **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов λ_i, $(i = 1, 2, ..., k)$ отличен от нуля ($\exists\, \lambda_i \neq 0$).

Опр. 3.2.3. Система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ называется линейно независимой, если **только тривиальная линейная комбинация** этих векторов равна нулевому вектору:

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + ... + \lambda_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0} \qquad \forall \lambda_i = 0,\ i = 1, 2, ..., k.$$

Опр. 3.2.4. Система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называется линейно зависимой, если **существует нетривиальная линейная комбинация** этих векторов, равная нулевому вектору:

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + ... + \lambda_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}, \quad \exists \lambda_i \neq 0.$$

Для линейно зависимых векторов справедливы теоремы:

Теорема 3.2.1 (Критерий линейной зависимости системы векторов линейного пространства). Для того, чтобы векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы один из этих векторов был линейной комбинацией остальных.

Док-во. 1. Необходимость. Пусть векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ зависимы, т.е. существует набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ... \lambda_k$, из которых хотя бы одно не равно нулю, такой, что $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + ... + \lambda_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}$. Примем для простоты, что $\lambda_1 \neq 0$. Тогда из $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + ... + \lambda_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}$ получим

$\boldsymbol{x}_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \boldsymbol{x}_2 - \dfrac{\lambda_3}{\lambda_1} x_3 - ... - \dfrac{\lambda_k}{\lambda_1} \boldsymbol{x}_k$. Обозначим $\mu_i = -\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}$ ($i = 2, 3, ..., k$), тогда последнее равенство примет вид $\boldsymbol{x}_1 = \mu_2 \boldsymbol{x}_2 + \mu_3 \boldsymbol{x}_3 + ... + \mu_k \boldsymbol{x}_k$, т.е. вектор $\boldsymbol{x}_1$ равен линейной комбинации остальных векторов.

2. Достаточность. Пусть один из векторов, для определенности, $\boldsymbol{x}_k$, есть линейная комбинация остальных, т.е. $\boldsymbol{x}_k = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + ... + \lambda_{k-1} \boldsymbol{x}_{k-1}$. Перепишем это равенство в виде $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + ... + \lambda_{k-1} \boldsymbol{x}_{k-1} + (-1) \cdot \boldsymbol{x}_k = 0$. Мы получили нетривиальную (так как $\lambda_k = -1 \neq 0$) линейную комбинацию, равную **0**, т.е. система векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ действительно линейно зависима.

Теорема 3.2.2. Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то она является линейно зависимой.

Док-во. Пусть в системе векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ подсистема, состоящая из первых m ($m<k$) векторов, линейно зависима, т.е. $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + ... + \lambda_m \boldsymbol{x}_m = \mathbf{0}$ при нетривиальном наборе коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Тогда $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + ... + \lambda_m \boldsymbol{x}_m + 0 \cdot \boldsymbol{x}_{m+1} + 0 \cdot \boldsymbol{x}_{m+2} + ... + 0 \cdot \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}$, что означает линейную зависимость всей системы $x_1, x_2, \ldots, x_k$, так как набор

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m, \qquad \underbrace{0, 0, ... 0}_{k-m \text{ коэффициентов}} \qquad \text{тоже нетривиален.}$$

Теорема 3.2.3. Любая подсистема линейно независимой системы векторов является линейно независимой.

Эта теорема легко доказывается от противного на основе предыдущей теоремы.

Теорема 3.2.4. Система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой.

Док-во. Для системы $\mathbf{0}, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ существует нетривиальная нулевая линейная комбинация: $1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \boldsymbol{x}_2 + ... + 0 \cdot \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}$.

3.3. Базис и размерность линейного пространства. Разложение вектора по базису.

Опр. 3.3.1 размерности линейного пространства. Линейное пространство L называется ***n*-мерным**, если

1.В этом пространстве существует линейно независимая система $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, состоящая из n векторов;

2. Любая система, содержащая $n+1$ вектор, линейно зависима.

Обозначение размерности линейного пространства: $\dim L = n$.

Опр. 3.3.2 базиса линейного пространства. Базисом n-мерного линейного пространства называется любая упорядоченная линейно независимая система векторов этого пространства, содержащая n векторов.

В нулевом пространстве О = {**0**} не существует линейно независимых систем векторов, поэтому размерность этого пространства задается отдельным определением:

Опр. 3.3.3. Размерность нуль-пространства равна нулю.

Опр. 3.3.4. Если для любого числа n в пространстве L существует n линейно независимых векторов, то пространство L называется **бесконечномерным**.

Мы будем работать, в основном, с конечномерными пространствами.

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \dots, \boldsymbol{e}_n$ – некоторый базис n-мерного линейного пространства L и $\boldsymbol{x}$ - произвольный вектор этого пространства. Тогда система векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \dots, \boldsymbol{e}_n$ линейно зависима (так как содержит $n+1$ вектор), следовательно, существует их нетривиальная нулевая линейная комбинация $\lambda_0 x + \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \dots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n = 0$. Коэффициент λ_0 в этой комбинации не может быть равен нулю (в этом случае система $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ была бы линейно зависимой), поэтому вектор $\boldsymbol{x}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса:
$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\boldsymbol{e}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_0}\boldsymbol{e}_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0}\boldsymbol{e}_n$. Обозначим $x_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0},\ x_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_0},\ \dots,\ x_n = -\frac{\lambda_n}{\lambda_0}$, тогда вектор $\boldsymbol{x}$ представится в виде $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n$. Эта запись называется разложением вектора $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \dots, \boldsymbol{e}_n$; коэффициенты $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются координатами вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \dots, \boldsymbol{e}_n$.

Разложение вектора по базису определяется однозначно. Действительно, предположим, что имеется два разложения вектора $\boldsymbol{x}$ по базису: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{x} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + y_n\boldsymbol{e}_n$. Вычитая второе равенство из первого, получим $\boldsymbol{0} = (x_1 - y_1)\boldsymbol{e}_1 + (x_2 - y_2)\boldsymbol{e}_2 + \dots + (x_n - y_n)\boldsymbol{e}_n$, откуда, вследствие линейной независимости векторов базиса, получаем $x_1 - y_1 = 0, x_2 - y_2 = 0, \dots, x_n - y_n = 0$, или $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$. Мы доказали следующую теорему:

Теорема 3.3.1. Любой вектор n-мерного линейного пространства может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов произвольного базиса этого пространства.

Запишем формулу разложения вектора по базису в матричной форме. Базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \dots, \boldsymbol{e}_n$ представим в виде матрицы-строки: $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \dots, \boldsymbol{e}_n)$, координаты вектора – в виде матрицы-столбца: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$. Тогда $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}\,x$.

Теорема 3.3.2. о линейных операциях над векторами в координатной форме. Координаты суммы векторов в любом базисе равны суммам координат слагаемых; координаты произведения вектора на число равны произведениям координат вектора на это число.

Док-во. Пусть $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{E}\,x$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{E}\,y$. Тогда $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{E}\,x + \boldsymbol{E}\,y = \boldsymbol{E}\,(x + y)$; $\lambda\,\boldsymbol{x} = \lambda(\boldsymbol{E}\,x) = \boldsymbol{E}\,(\lambda\,x)$.

Примеры линейных пространств и базисов.

1. Нуль-пространство О = {**0**}, состоящее из одного нулевого вектора.
2. Векторные пространства V^1, V^2, V^3 свободных векторов, расположенных, соответственно, на прямой, на плоскости, в пространстве. Эти пространства изучены в разделе 1. **Алгебра векторов.**
3. Пространство R^n n-мерных арифметических векторов. Элементами этого пространства являются упорядоченные наборы из n действительных чисел:

$R^n = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) |\ a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in R\}$. Операции в этом пространстве выполняются покомпонентно: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) + (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n)$; $\alpha(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \dots, \alpha a_n)$. Нулевой элемент: $\boldsymbol{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$; противоположный элемент: $(-a_1, -a_2, -a_3, \dots, -a_n)$. Простейший базис в этом пространстве – набор из n векторов таких, что $e_i = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{i-1}, 1, 0, 0, ..., 0 \right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – называется стандартным.

4. Пространство R^{∞} бесконечных последовательностей действительных чисел $R^{\infty} = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots) | \, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \in R\}$. Операции, как и в предыдущем примере, определяются покомпонентно. Нулевой элемент: $\mathbf{0} = (0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$; противоположный элемент: $(-a_1, -a_2, -a_3, \ldots, -a_n, \ldots)$. Это пространство бесконечномерно, так как для любого натурального числа n существует линейно независимая система, состоящая из n векторов:

$$e_i = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{i-1}, 1, 0, 0, ..., 0, \mathbf{...} \right), \; i = 1, 2, \ldots, n .$$

5. Множество M_{mn} матриц одинаковой размерности $m \times n$ с действительными элементами и обычными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число. Размерность этого пространства равна $m \times n$. В качестве базиса может быть взят набор из $m \times n$ матриц, в которых равны нулю все элементы, кроме элемента a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

6. Линейными пространствами являются:

пространство $C([a, b])$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$;

пространство $C^1([a, b])$ функций, непрерывных и имеющих непрерывную производную на отрезке $[a, b]$; … ;

пространство $C^k([a, b])$ функций, k-ые производные которых непрерывны на отрезке $[a, b]$;

пространство $P_n(x) = \{p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\}$ многочленов степени не выше n.

Линейные операции на этих на этих пространствах определяются поточечно: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$; $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$. Все эти пространства бесконечномерны: для любого заданного числа n можно найти n линейно независимых элементов (например, набор $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{n-1}$).

3.4. Подпространства линейного пространства. Линейная оболочка и ранг системы векторов линейного пространства.

Опр. 3.4.1 подпространства линейного пространства. Пусть L – линейное пространство, M – подмножество множества L. M называется подпространством линейного пространства L, если это множество само является линейным пространством относительно определенных в L операций сложения элементов и умножения элемента на число.

Для того, чтобы подмножество М линейного пространства L было подпространством этого пространства, необходимо и достаточно, чтобы оно было **замкнуто** относительно определенных в L линейных операций, т.е. чтобы из $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ следовало, что $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in L$ и $\alpha \, \boldsymbol{x} \in L$ для любого числа α. Выполнение аксиом, описывающих свойства этих операций, наследуется от пространства L. Подпространствами любого пространства L является нуль-пространство $\{\mathbf{0}\}$и само пространство L; эти подпространства называются несобственными; все остальные подпространства называются собственными.

Примеры подпространств: пространства V^1и V^2 являются подпространствами пространства V^3; пространство $P_n(x)$ многочленов степени не выше n является подпространством пространства непрерывных функций; пространство решений однородной СЛАУ с n неизвестными является подпространством пространства R^n.

Опр. 3.4.2 линейной оболочки системы векторов линейного пространства. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ - система векторов линейного пространства L. Линейной оболочкой этих векторов называется множество их линейных комбинаций:

$$S(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k) = \{\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k\}, \forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathrm{R} .$$

Теорема 3.4.1 (основное свойство линейной оболочки). Линейная оболочка системы векторов линейного пространства L является минимальным подпространством, содержащим эти векторы.

Опр. 3.4.3 ранга системы векторов линейного пространства. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ - система векторов линейного пространства L. Рангом $r(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ называется максимальное количество линейно независимых векторов этой системы.

Ранг системы векторов линейного пространства равен размерности линейной оболочки этой системы векторов.

Теорема 3.4.2 (необходимое и достаточное условие линейной независимости системы векторов линейного пространства). Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейно независима тогда и только тогда, когда ранг этой системы равен количеству векторов.

Док-во непосредственно следует из определения ранга системы векторов.

Теорема 3.4.3 (о ранге системы векторов линейного пространства). Ранг системы векторов линейного пространства равен рангу матрицы, столбцами или строками которой являются координаты этих векторов в произвольном базисе.

Док-во непосредственно следует из определений рангов матрицы и системы векторов.

Следствием из этих теорем является следующее утверждение.

Система векторов линейного пространства линейно независима тогда и только тогда, когда ранг матрицы, столбцами или строками которой являются координаты этих векторов в произвольном базисе, равен количеству векторов этой системы.

3.5. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису.

3.5.1. Матрица перехода. Пусть в векторном n-мерном пространстве L даны два базиса: $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ и $\boldsymbol{E}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$. Запишем разложения векторов базиса $\boldsymbol{E}'$ (*нового* базиса) в базисе $\boldsymbol{E}$ (*старом* базисе):

$$\boldsymbol{e}'_1 = u_{11}\boldsymbol{e}_1 + u_{21}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + u_{n1}\boldsymbol{e}_n,$$

$$\boldsymbol{e}'_2 = u_{12}\boldsymbol{e}_1 + u_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + u_{n2}\boldsymbol{e}_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\boldsymbol{e}'_2 = u_{1n}\boldsymbol{e}_1 + u_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + u_{nn}\boldsymbol{e}_n.$$

В матричной форме эти разложения можно записать как

$$\left(\boldsymbol{e}'_1\ \boldsymbol{e}'_2\ \ldots\ \boldsymbol{e}'_n\right) = \left(\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \ldots\ \boldsymbol{e}_n\right)\cdot\begin{pmatrix} u_{11}\ u_{12} \ldots\ldots u_{1n} \\ u_{21}\ u_{22} \ldots\ldots u_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n1}\ u_{n2} \ldots\ldots u_{nn} \end{pmatrix},$$ или $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}\,U$, где матрица $$U = \begin{pmatrix} u_{11}\ u_{12} \ldots\ldots u_{1n} \\ u_{21}\ u_{22} \ldots\ldots u_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n1}\ u_{n2} \cdots u_{nn} \end{pmatrix},$$

столбцами которой являются координаты векторов нового $\boldsymbol{E}'$ базиса в старом базисе $\boldsymbol{E}$, называется **матрицей перехода** от базиса $\boldsymbol{E}$ к базису $\boldsymbol{E}'$.

Свойства матрицы перехода:

1. Матрица перехода невырождена и, следовательно, обратима.

Док-во: столбцы матрицы – координаты векторов базиса $\boldsymbol{E}'$ – линейно независимы, следовательно, $|U| \neq 0$.

2. Если переход от базиса $\boldsymbol{E}$ к базису $\boldsymbol{E}'$ описыается матрицей U, то обратный переход от базиса $\boldsymbol{E}'$ к базису $\boldsymbol{E}$ описывается обратной матрицей U^{-1}.

Док-во. $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}\,U \Rightarrow \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}'\,U^{-1}$. Таким образом, столбцами матрицы U^{-1} являются координаты старого $\boldsymbol{E}$ базиса в новом базисе $\boldsymbol{E}'$.

3. Если в n-мерном пространстве L дан базис $\boldsymbol{E}$, то для любой невырожденной матрицы U существует базис $\boldsymbol{E}'$ такой, что U является матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{E}$ к базису $\boldsymbol{E}'$.

Док-во. $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}\,U$.

4. Если в пространстве L даны базисы $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{E}''$, причем U - матрица перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\boldsymbol{E}'$, U_1 - матрица перехода от $\boldsymbol{E}'$ к $\boldsymbol{E}''$, то произведение этих матриц $U\,U_1$ будет матрицей перехода от $\boldsymbol{E}$ к $\boldsymbol{E}''$.

Док –во. $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}\,U$, $\boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{E}'\,U_1 \Rightarrow \boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{E}'\,U_1 = (\boldsymbol{E}\,U)\,U_1 = \boldsymbol{E}\,(U\,U_1)$.

3.5.2. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису. Пусть известны координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в старом базисе $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n =$

$= (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\ (x_1, x_2, \ \ldots\ x_n)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}\, x$, и в новом базисе

$\boldsymbol{E}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$: $\boldsymbol{x} = x'_1\, \boldsymbol{e}'_1 + x'_2\, \boldsymbol{e}'_2 + \ldots + x'_n\, \boldsymbol{e}'_n = \boldsymbol{E}'\, x'$. Установим связь между старыми и новыми координатами. Так как $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}\, U$, то $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{E}'\, x' = (\boldsymbol{E}\, U)\, x' = \boldsymbol{E}\, (U\, x')$. Сравнивая разложения $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{E}\, x$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{E}\, (U\, x')$, в силу единственности разложения вектора по базису, получаем

$$x = U\, x'.$$

Таким образом, **столбец координат вектора в «старом» базисе равен произведению матрицы перехода на столбец координат в «новом базисе»**.

Меняя местами «старый» и «новый» базисы, получим

$$x' = U^{-1}\, x.$$

Чтобы получить столбец координат вектора в «новом» базисе, надо столбец координат в «старом базисе» умножить слева на матрицу, обратную матрице перехода от «старого» базиса к «новому».

Пример. Пусть в трехмерном линейном пространстве в некотором базисе $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ даны векторы $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$: $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}'_2 = 2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}'_3 = -3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$. Образует ли набор векторов $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ базис?

Решение. Найдем ранг матрицы перехода: $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ранг матрицы перехода равен количеству векторов, следовательно, векторы $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ линейно независимы и система $\boldsymbol{E}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ может служить базисом пространства R^3.

Пусть, далее, даны векторы $\boldsymbol{a} = 3\, \boldsymbol{e}_1 - 2\, \boldsymbol{e}_2 + 4\, \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}' = -6\, \boldsymbol{e}'_1 + 5\, \boldsymbol{e}'_2 - 7\, \boldsymbol{e}'_3$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{E}'$ и координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в базисе $\boldsymbol{E}$.

Координаты вектора $\boldsymbol{b}$ в базисе $\boldsymbol{E}$ находятся по формуле $b = U\, b'$: $b = U \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+10+21 \\ 12+10-7 \\ -6-5+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ -4 \end{pmatrix}$. Таким образом, $\boldsymbol{b}' = 25\, \boldsymbol{e}_1 + 15\, \boldsymbol{e}_2 - 4\, \boldsymbol{e}_3$.

Для нахождения координат вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{E}'$ необходимо вычислить матрицу обратного перехода: $|U| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -3$, $A_{11} = -1$, $A_{12} = -1$, $A_{13} = 0$, $A_{21} = 5$,

$A_{22} = 2$, $A_{23} = 3$, $A_{31} = 8$, $A_{32} = 5$, $A_3 = 6$, $U^{-1} = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

$a' = U^{-1} \cdot a = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -3-10+32 \\ -3-4+20 \\ -6+24 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 19 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix}$. Таким образом,

$$\boldsymbol{a} = -\frac{19\boldsymbol{e}_1' + 13\boldsymbol{e}_2' + 18\boldsymbol{e}_3'}{3}.$$

3.6. Нормированные и евклидовы пространства.

3.6.1. Определение нормированного пространства. Линейное пространство N называется **нормированным**, если на этом пространстве определена **норма**, т.е. для каждого элемента $\boldsymbol{x} \in L$ определено вещественное число, называемое нормой элемента $\boldsymbol{x}$ и обозначаемое $\| \boldsymbol{x} \|$, удовлетворяющее аксиомам:

1. $\| \boldsymbol{x} \| \geq 0$, причем $\| \boldsymbol{x} \| = 0$ только в случае, когда $\boldsymbol{x} = 0$.
2. $\| \lambda \boldsymbol{x} \| = | \lambda | \, \| \boldsymbol{x} \|$,
3. $\| \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \| \leq \| \boldsymbol{x} \| + \| \boldsymbol{y} \|$ (неравенство треугольника).

Понятие нормы является обобщением понятия длины вектора, и приведенные аксиомы описывают характерные свойства длины.

Примеры нормы: в пространстве V^3 геометрических векторов можно определить норму вектора $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}$ как длину: $\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$; легко убедиться, что для определенной таким образом нормы все три свойства определения выполняются. Эту норму принято называть евклидовой. Однако можно определить норму по другому: $\| \boldsymbol{x} \|_1 = | x_1 | + | x_2 | + | x_3 |$, $\| \boldsymbol{x} \|_\infty = \max(x_1, x_2, x_3)$ (докажите, что для этих определений тоже выполняются все три аксиомы нормы). Все эти определения обобщаются еще одним определением нормы $\| \boldsymbol{x} \|_p = \left(x_1^p + x_2^p + x_3^p \right)^{\frac{1}{p}}$, где $p \geq 1$; норма $\| \boldsymbol{x} \|_\infty$ получается из этого соотношения предельным переходом при $p \to \infty$. Естественно, все эти определения нормы можно перенести на пространства R^n и $C([a, b])$.

3.6.2. Определение евклидова пространства. Линейное пространство E называется **евклидовым пространством**, если в этом пространстве определена операция **скалярного произведения** его элементов (т.е. каждой паре $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ ставится в соответствие вещественное число, называемое скалярным произведением эти элементов, обозначаемое $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (или просто $\boldsymbol{xy}$), удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$,
2. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$,
3. $(\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$,
4. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$, причем $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ только в случае, когда $\boldsymbol{x} = 0$.

(Произведение $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, как и в случае обычных геометрических векторов, называют скалярным квадратом элемента $\boldsymbol{x}$).

Примеры евклидовых пространств.

1. Линейное пространство геометрических векторов R^3 с обычным определением скалярного произведения $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = | \boldsymbol{x} | \, | \boldsymbol{y} | \cos\varphi$.

2. В пространстве $R^n = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_1, \ldots, x_n \in R \right)$ скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots. \\ x_n \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$ вводится соотношением $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x^T \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \ldots + x_ny_n = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} x_i y_i$.

3. В пространстве $C([a, b])$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$ скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ определяется формулой $(f, g) = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f(x) \cdot g(x) \, dx$.

Убедитесь, что во втором и третьем примерах выполняются все аксиомы скалярного произведения.

3.6.3. Неравенство Коши-Буняковского. Для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ евклидова пространства E выполняется неравенство $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \le (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$.

Док-во. При $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ неравенство выполняется, поэтому дальше будем считать, что $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Рассмотрим функцию $f(t) = (t\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$. По четвертой аксиоме скалярного произведения $f(t) \ge 0$ для любого t. По первым трем аксиомам $f(t) = t^2\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$-2 $t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$, т.е. $f(t)$ является неотрицательным квадратным трехчленом переменной t. Это возможно, только если дискриминант трехчлена неположителен, т.е. $4((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})) \le 0$.

Для пространства R^n неравенство Коши-Буняковского примет вид

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \ldots + x_ny_n)^2 \le (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2)\text{, или}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2\;;$$

для пространства C([a, b]) неравенство Коши-Буняковского запишется как

$$\left(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f(x)\cdot g(x)\,dx\right)^2 \le \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f^2(x)\,dx \cdot \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} g^2(x)\,dx\,.$$

Этот вариант неравенства Коши-Буняковского часто называют неравенством Шварца.

3.6.4. Нормированность евклидова пространства.

Скалярное произведение порождает в евклидовом пространстве норму:

Теорема 3.6.3.1. Любое евклидово пространство становится нормированным, если определить норму соотношением $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$.

Док-во. Мы должны доказать, что для определенной этим соотношением нормы выполняются все аксиомы определения нормы.

1. Так как $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \ge 0$, причем $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ только в случае, когда $\boldsymbol{x} = 0$, то $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} \ge 0$, причем $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ только если $\boldsymbol{x} = 0$.

2. $\|\lambda\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\lambda\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{x})} = \sqrt{\lambda^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} = |\lambda|\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} = |\lambda|\cdot|\boldsymbol{x}|$.

3. Перепишем неравенство Коши-Буняковского в терминах нормы: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \le (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \Rightarrow |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \le \|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|$. Тогда

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})} = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})} \le \sqrt{\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2} = \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|.$$

Итак, доказано, что в евклидовом пространстве соотношение $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ определяет норму (длину) элемента этого пространства, таким образом, любое евклидово пространство является нормированным. Неравенство Коши-Буняковского с применением обозначения нормы принимает вид $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \le \|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|$. Неравенство треугольника в R^n и C([a, b]) запишется как

$$\sqrt{\left(x_1^2 + y_1^2\right) + \left(x_2^2 + y_2^2\right) + \ldots + \left(x_n^2 + y_n^2\right)} \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}\,;$$

$$\sqrt{\int_a^b (f(x) + g(x))^2\,dx} \le \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx} + \sqrt{\int_a^b g(x)^2\,dx};$$

часто эти неравенства называют неравенствами Минковского.

3.6.5. Угол между векторами евклидова пространства. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что $\dfrac{|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|}{\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|} \le 1$. Этот факт позволяет определить угол между любыми ненулевыми элементами евклидова пространства.

Определение 3.6.5.1. Углом между векторами $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ евклидова пространства называется

$$\varphi = \arccos\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|} = \arccos\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\cdot\sqrt{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}}.$$

Если один из векторов равен **0**, будем считать, что угол, который он образует с любым другим вектором, не определяется однозначно, т.е. будем считать, что этот угол равен любому удобному нам значению.

3.6.6. Ортогональные и ортонормированные системы векторов.

Определение 3.6.6.1. Векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ евклидова пространства E называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Для обозначения ортогональности применяют обычный символ: $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \Leftrightarrow (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$. Нулевой вектор, согласно этому определения, ортогонален любому другому вектору.

Определение 3.6.6.2. Система векторов евклидова пространства называется ортогональной, если любые два вектора этой системы попарно ортогональны.

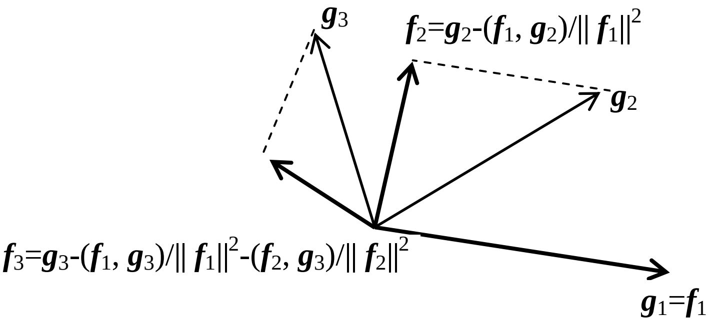
Теорема 3.6.6.1. Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Док-во. Пусть $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ – ортогональная система ненулевых векторов, т.е. $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = 0$ при $i \neq j$; $|\boldsymbol{x}_i| \neq 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Предположим, что для набора чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_k$ выполняется $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k = \mathbf{0}$. Умножим это равенство скалярно на $\boldsymbol{x}_1$:
$\boldsymbol{x}_1 \cdot (\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{x}_1 \cdot 0 = 0$. Раскроем скобки в левой части этого равенства, пользуясь аксиомами скалярного произведения: $\lambda_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) + \lambda_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) + \lambda_3(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) + \ldots + \lambda_1(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_k) = 0$. Здесь $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = |\boldsymbol{x}_1|^2 > 0$, остальные скалярные произведения равны нулю вследствие ортогональности векторов. Таким образом, $\lambda_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$. Умножая равенство $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k = \mathbf{0}$ на $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$, также получим $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \ldots, \lambda_k = 0$. Следовательно, только тривиальная линейная комбинация ортогональных векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ равна нулю, т.е. эти векторы линейно независимы.

Определение 3.6.6.3. Система векторов евклидова пространства $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ называется нормированной, если норма (длина) любого вектора этой системы равна единице.

Определение 3.6.6.4. Система векторов евклидова пространства $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ называется ортонормированной, если эти векторы попарно ортогональны, и норма любого вектора этой системы равна единице.

3.6.7. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Пусть дана система линейно независимых векторов $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_k$. Пошаговый (итерационный) процесс ортогонализации Грамма-Шмидта позволяет преобразовать эту систему в ортогональную систему $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_k$ так, что каждый из векторов $\boldsymbol{f}_i$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_i$.



1. Берем $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{g}_1$.

2. $\boldsymbol{f}_2$ ищем в виде $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{g}_2 - \alpha_{21}\boldsymbol{f}_1$, где коэффициент α_{21} выбираем так, чтобы $\boldsymbol{f}_2$ был ортогонален $\boldsymbol{f}_1$: $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = 0 \Rightarrow (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{g}_2 - \alpha_{21}\boldsymbol{f}_1) = 0 \Rightarrow (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{g}_2) - \alpha_{21}(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1) = 0 \Rightarrow$
$\alpha_{21} = \dfrac{(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{g}_2)}{(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)} = \dfrac{(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{g}_2)}{\|\boldsymbol{f}_1\|^2}$. Вектор $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{g}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{g}_2)}{\|\boldsymbol{f}_1\|^2}\boldsymbol{f}_1$ ортогонален вектору $\boldsymbol{f}_1$, т.е. $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = 0$.

3. $\boldsymbol{f}_3$ ищем в виде $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{g}_3 - \alpha_{31}\boldsymbol{f}_1 - \alpha_{32}\boldsymbol{f}_2$, где коэффициенты α_{31}, α_{32} выбираем так, чтобы $\boldsymbol{f}_3$ был ортогонален векторам $\boldsymbol{f}_1$и $\boldsymbol{f}_2$: $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_3) = 0 \Rightarrow (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{g}_3 - \alpha_{31}\boldsymbol{f}_1 - \alpha_{32}\boldsymbol{f}_2) = 0 \Rightarrow (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{g}_3) - \alpha_{31}(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1) - \alpha_{32}(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = 0 \Rightarrow$ (последнее слагаемое равно нулю) $\alpha_{31} = \dfrac{(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{g}_3)}{(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1)} = \dfrac{(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{g}_3)}{\|\boldsymbol{f}_1\|^2}$. Из равенства

$(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3) = 0$ аналогично получим $\alpha_{32} = \dfrac{(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_3)}{(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_2)} = \dfrac{(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_3)}{\|\boldsymbol{f}_2\|^2}$. Вектор $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{g}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{g}_3)}{\|\boldsymbol{f}_1\|^2}\boldsymbol{f}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_3)}{\|\boldsymbol{f}_2\|^2}\boldsymbol{f}_2$

ортогонален векторам $\boldsymbol{f}_1$и $\boldsymbol{f}_2$.

4. $\boldsymbol{f}_4$ ищем в виде $\boldsymbol{f}_4 = \boldsymbol{g}_4 - \alpha_{41}\boldsymbol{f}_1 - \alpha_{42}\boldsymbol{f}_2 - \alpha_{43}\boldsymbol{f}_3$,где коэффициенты α_{41}, α_{42}, α_{43} выбираем так,

чтобы $\boldsymbol{f}_4$ был ортогонален векторам $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ и $\boldsymbol{f}_3$. Из равенства нулю скалярных произведений $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_4)$, $(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_4)$, $(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4)$ получим значения коэффициентов α_{41}, α_{42}, α_{43}. Вектор

$$\boldsymbol{f}_4 = \boldsymbol{g}_4 - \frac{(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{g}_4)}{\|\boldsymbol{f}_1\|^2}\boldsymbol{f}_1 - \frac{(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_4)}{\|\boldsymbol{f}_2\|^2}\boldsymbol{f}_2 - \frac{(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{g}_4)}{\|\boldsymbol{f}_3\|^2}\boldsymbol{f}_3$$ ортогонален векторам $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ и $\boldsymbol{f}_3$.

5. Продолжая этот процесс при $i = 5, 6, \ldots, k$, получим векторы $\boldsymbol{f}_5, \boldsymbol{f}_6, \ldots, \boldsymbol{f}_k$.

Заметим, что мы можем не только ортогонализировать систему линейно независимых векторов $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_k$, но и ортонормировать ее. Для этого достаточно пронормировать систему полученных ортогональных векторов $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_k$: $\boldsymbol{f}_1^0 = \dfrac{\boldsymbol{f}_1}{\|\boldsymbol{f}_1\|}$, $\boldsymbol{f}_2^0 = \dfrac{\boldsymbol{f}_2}{\|\boldsymbol{f}_2\|}, \cdots,$ $\boldsymbol{f}_k^0 = \dfrac{\boldsymbol{f}_k}{\|\boldsymbol{f}_k\|}$. В результате будет получен ортонормированный базис линейной оболочки векторов $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_k$, или, что тоже самое, ортонормированный базис подпространства, натянутого на эти векторы.

3.6.8. Существование ортонормированного базиса в *n*-мерном евклидовом пространстве. Пусть $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n$ – произвольный базис n-мерного линейного пространства. Применяя процесс Грамма-Шмидта, мы можем преобразовать эту систему в ортонормированный базис пространства:

$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{g}_1,$ $\qquad$ $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{f}_1}{\|\boldsymbol{f}_1\|}$;

$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{g}_2 - (\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1,$ $\qquad$ $\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\boldsymbol{f}_2}{\|\boldsymbol{f}_2\|}$;

$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{g}_3 - (\boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}_2,$ $\qquad$ $\boldsymbol{e}_3 = \dfrac{\boldsymbol{f}_3}{\|\boldsymbol{f}_3\|}$;

………………………………………………………….. $\qquad$ ……………………………………………

$\boldsymbol{f}_n = \boldsymbol{g}_n - (\boldsymbol{g}_n, \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{g}_n, \boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}_2 - \ldots - (\boldsymbol{g}_n, \boldsymbol{e}_{n-1})\,\boldsymbol{e}_{n-1}.$ $\qquad$ $\boldsymbol{e}_n = \dfrac{\boldsymbol{f}_n}{\|\boldsymbol{f}_n\|}$.

Пример. В R^4 даны векторы $\boldsymbol{g}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\boldsymbol{g}_2 = (2, 1, -1, 1)$, $\boldsymbol{g}_3 = (1, 1, 0, 1)$, $\boldsymbol{g}_4 = (-2, 1, 2, 3)$. С помощью процесса Грамма-Шмидта ортонормировать эту систему векторов.

Решение. $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{g}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{f}_1}{\|\boldsymbol{f}_1\|} = \dfrac{(1,0,1,2)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2+2^2}} = \dfrac{(1,0,1,2)}{\sqrt{6}}$;

$\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{g}_2 - (\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1,$ $\quad$ $(\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{e}_1) = (2,1,-1,1)\cdot\dfrac{(1,0,1,2)}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\cdot1+1\cdot0+(-1)\cdot1+1\cdot2}{\sqrt{6}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$,

$$\boldsymbol{f}_2 = (2,1,-1,1) - \frac{3}{\sqrt{6}}\cdot\frac{(1,0,1,2)}{\sqrt{6}} = (2,1,-1,1) - \frac{1}{2}\cdot(1,0,1,2) = \frac{1}{2}(3,2,-3,0),$$

$$\|\boldsymbol{f}_2\| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2+2^2+(-3)^2+0^2} = \frac{1}{2}\sqrt{22},\ \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{f}_2}{\|\boldsymbol{f}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{22}}(3,2,-3,0);$$

$\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{g}_3 - (\boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}_2,$ $\quad$ $(\boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{e}_1) = (1,1,0,1)\cdot\dfrac{(1,0,1,2)}{\sqrt{6}} = \dfrac{1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1+1\cdot2}{\sqrt{6}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$,

$$(\boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{e}_2) = (1,1,0,1)\cdot\frac{(3,2,-3,0)}{\sqrt{22}} = \frac{1\cdot3+1\cdot2+0\cdot(-3)+0\cdot0}{\sqrt{22}} = \frac{5}{\sqrt{22}},$$

$$\boldsymbol{f}_3 = (1,1,0,1) - \frac{3}{\sqrt{6}}\cdot\frac{(1,0,1,2)}{\sqrt{6}} - \frac{5}{\sqrt{22}}\cdot\frac{(3,2,-3,0)}{\sqrt{22}} = (1,1,0,1) - \frac{1}{2}\cdot(1,0,1,2) - \frac{5}{22}\cdot(3,2,-3,0) =$$

$$= \frac{1}{22}(22-11-15, 22-0-10, 0-11+15, 22-22-0) = \frac{1}{22}(-4,12,4,0) = \frac{2}{11}(-1,3,1,0),$$

$$\|\boldsymbol{f}_3\| = \frac{2}{11}\sqrt{(-1)^2+3^2+1^2+0^2} = \frac{2}{11}\sqrt{11},\ \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{f}_3}{\|\boldsymbol{f}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}(-1,3,1,0);$$

$\boldsymbol{f}_4 = \boldsymbol{g}_4 - (\boldsymbol{g}_4, \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{g}_4, \boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}_2 - (\boldsymbol{g}_4, \boldsymbol{e}_3)\,\boldsymbol{e}_3,$

$(\boldsymbol{g}_4, \boldsymbol{e}_1) = (-2,1,2,3)\cdot\dfrac{(1,0,1,2)}{\sqrt{6}} = \dfrac{-2\cdot1+1\cdot0+2\cdot1+3\cdot2}{\sqrt{6}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}}$,

$(\boldsymbol{g}_4, \boldsymbol{e}_2) = (-2,1,2,3)\cdot\dfrac{(3,2,-3,0)}{\sqrt{22}} = \dfrac{-2\cdot3+1\cdot2+2\cdot(-3)+3\cdot0}{\sqrt{22}} = -\dfrac{10}{\sqrt{22}}$,

$(\boldsymbol{g}_4, \boldsymbol{e}_3) = (-2,1,2,3)\cdot\dfrac{(-1,3,1,0)}{\sqrt{11}} = \dfrac{-2\cdot(-1)+1\cdot3+2\cdot1+3\cdot0}{\sqrt{11}} = \dfrac{7}{\sqrt{11}}$,

$\boldsymbol{f}_4 = (-2,1,2,3) - \dfrac{6}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{(1,0,1,2)}{\sqrt{6}} + \dfrac{10}{\sqrt{22}}\cdot\dfrac{(3,2,-3,0)}{\sqrt{22}} - \dfrac{7}{\sqrt{11}}\cdot\dfrac{(-1,3,1,0)}{\sqrt{11}} = (-2,1,2,3)-(1,0,1,2)+$

$+\dfrac{10}{22}\cdot(3,2,-3,0) - \dfrac{7}{11}\cdot(-1,3,1,0) = \dfrac{1}{22}(-66+30+14, 22+20-42, 22-30-14, 22) =$

$= \dfrac{1}{22}(-22, 0, -22, 22) = (-1, 0, -1, 1)$;

$\|\boldsymbol{f}_4\| = \sqrt{(-1)^2+0^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{3}$, $\boldsymbol{e}_4 = \dfrac{\boldsymbol{f}_4}{\|\boldsymbol{f}_4\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,0,-1,1)$;

Ответ. $\boldsymbol{e}_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\boldsymbol{e}_2 = \left(\dfrac{3}{\sqrt{22}}, \dfrac{2}{\sqrt{22}}, -\dfrac{3}{\sqrt{22}}, 0\right)$, $\boldsymbol{e}_3 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{11}}, \dfrac{3}{\sqrt{11}}, \dfrac{1}{\sqrt{11}}, 0\right)$,
$\boldsymbol{e}_4 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3.6.9. Вычисления в ортонормированном базисе. Пусть $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n)$- произвольный базис евклидова пространства. Найдем скалярное произведение двух произвольных векторов

$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{E}\,x$ и $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + y_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{E}\,y$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$:

$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i, \sum\limits_{j=1}^{n} y_j\boldsymbol{e}_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i y_j(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_i y_j(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)$. Скалярное произведение произвольных векторов выражается через скалярные произведения векторов базиса. Симметричная матрица $\Gamma = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3) & \dots(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_n) \\ (\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) & \dots(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_n) \\ (\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3) & \dots(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_3) & \dots(\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}$, составленная из попарных скалярных произведений векторов базиса, называется матрицей Грама. С помощью матрицы Грама скалярное произведение запишется как $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x^{\mathrm{T}}\,\Gamma\,y$. Для ортонормированного базиса матрица Грама равна единичной матрице, поэтому формула для скалярного произведения существенно упрощается:
$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x^{\mathrm{T}}\,y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \dots + x_ny_n$. Соответственно, координаты вектора равны
$x_i = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)$; норма вектора равна $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} = \sqrt{x^{\mathrm{T}}\,x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$, косинус угла между векторами $\cos\varphi = \dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|}$ и т.д.

3.7. Линейные операторы.

3.7.1. Основные понятия.

3.7.7.1. Определение. Пусть L и L' – линейные пространства. **Оператором** A, действующим из L в L' называется отображение, ставящее в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x} \in L$ единственный элемент $\boldsymbol{y} \in L'$.

Обозначения: $A: L \to L'$; $\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x})$; или просто $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$.

3.7.7.2. Определение. Оператор A, действующий из линейного пространства L в линейное пространство L', называется **линейным**, если для $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in L$, $\forall \alpha \in R$ выполняются условия:

1. $A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = A(\boldsymbol{x}_1) + A(\boldsymbol{x}_2)$;
2. $A(\alpha \cdot \boldsymbol{x}_1) = \alpha \cdot A(\boldsymbol{x}_1)$.

Условия 1 и 2 можно объединить в одно: оператор A, называется **линейным**, если для $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in L$, $\forall \alpha, \beta \in R$ выполняется условие $A(\alpha \cdot \boldsymbol{x}_1 + \beta \cdot \boldsymbol{x}_2) = \alpha \cdot A(\boldsymbol{x}_1) + \beta \cdot A(\boldsymbol{x}_2)$; очевидно, что эти определения эквивалентны. Кроме того, определение не запрещает пространству L' совпадать с L, в этом случае говорят, что оператор действует в пространстве L.

Из определения непосредственно следует, что любого линейного оператора $\boldsymbol{A}: L \to L'$ нулевой элемент пространства L отображается в нулевой элемент пространства L': $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{A}(0 \cdot \boldsymbol{0}) = 0 \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{0}) = 0 \cdot \boldsymbol{0}' = \boldsymbol{0}'$.

Примеры линейных операторов.

1. 0-оператор – оператор, который $\forall \boldsymbol{x} \in L$ переводит в $\boldsymbol{0}' \in L'$: $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}'$.
2. Тождественный оператор E, который $\forall \boldsymbol{x} \in L$ переводит в $\boldsymbol{x}$: $E(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.
3. В пространствах V^2, V^3 преобразования поворота на фиксированный угол вокруг фиксированной точки или оси; сжатия или растяжения вектора с постоянным коэффициентом. Оператор сдвига на определенной вектор в этих пространствах не является линейным.
4. Оператор дифференцирования $\dfrac{d}{dx}: \mathrm{C}^{\mathrm{k}}([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]) \to \mathrm{C}^{\mathrm{k-1}}([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}])$.
5. Рассмотренный нами в разделе **3.5. переход к новому базису** может рассматриваться как линейное преобразование, если считать, что вектор $\boldsymbol{e}_i$ преобразуется в вектор $\boldsymbol{e}'_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

3.7.2. Матрица линейного оператора. Пусть линейный оператор действует в n– мерном линейном пространстве L: $A: L \to L'$. Преобразование $A: L \to L'$ полностью определяется действием оператора на векторы базиса. Действительно, пусть $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ – некоторый базис L, и $\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n \boldsymbol{e}_n = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}\, x$ – произвольный вектор L. Тогда $A(\boldsymbol{x}) = A(x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n \boldsymbol{e}_n) = x_1 A(\boldsymbol{e}_1) + x_2 A(\boldsymbol{e}_2) + \ldots + x_n A(\boldsymbol{e}_n)$. Таким образом, зная образы векторов базиса, мы можем найти образ любого вектора пространства.

Разложим образы векторов базиса $\boldsymbol{e}'_i = A(\boldsymbol{e}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ по исходному базису:

$$\boldsymbol{e}'_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n,$$
$$\boldsymbol{e}'_2 = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{n2}\boldsymbol{e}_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\boldsymbol{e}'_2 = a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n.$$

Определение. Матрицей линейного оператора $A(\boldsymbol{x})$, действующего в n– мерном линейном пространстве, называется квадратная матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$ размера n, столбцами которой являются координаты образов векторов базиса $\boldsymbol{e}'_i = A(\boldsymbol{e}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ в исходном базисе $\boldsymbol{e}_i$.

Это определение напоминает определение матрицы перехода к новому базису. Действительно, мы видели, что переход к новому базису можно рассматривать как линейное преобразование; разница в том, что матрица линейного преобразования может быть вырождена, т.е. векторы $\boldsymbol{e}'_i = A(\boldsymbol{e}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ могут быть линейно зависимыми.

Выведем формулу для преобразования координат образа произвольного вектора:

$A(\boldsymbol{x}) = A(x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n \boldsymbol{e}_n) = x_1 A(\boldsymbol{e}_1) + x_2 A(\boldsymbol{e}_2) + \ldots + x_n A(\boldsymbol{e}_n) =$

$= x_1(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n) + x_2(a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{n2}\boldsymbol{e}_n) + \ldots + x_n(a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n) =$

$= (a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)\boldsymbol{e}_1 + (a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)\boldsymbol{e}_2 + \ldots + (a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{nn}x_n)\boldsymbol{e}_n$.

Таким образом, столбец координат вектора $A(\boldsymbol{x})$ в базисе $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ равен

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax,$$

т.е. если $\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x})$, то $y = Ax$, где x, y – столбцы координат векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

Ввиду важности последней формулы выведем ее еще раз, в более компактной матричной форме. Образ базиса $A(\boldsymbol{E}) = A(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = (A(\boldsymbol{e}_1), A(\boldsymbol{e}_2), \ldots, A(\boldsymbol{e}_n))$, как и при переходе к новому базису, можно записать как $A(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E}\cdot A$, поэтому $A(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{E}\cdot x) = (A(\boldsymbol{E}))\cdot x = (\boldsymbol{E}\cdot A)\cdot x = \boldsymbol{E}\cdot (A\cdot x)$, т.е. столбец координат образа $A(\boldsymbol{x})$ равен Ax.

Из доказанного следует также, что для любой квадратной матрицы A размера n существует линейный оператор, матрица которого равна A. Именно, это оператор, который в некотором базисе $\boldsymbol{E}$ переводит вектор $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{E}x$ в вектор $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}\,(Ax)$. Естественно, если мы изменим базис, то получим другой линейный оператор с той же матрицей. В случае фиксированного базиса существует взаимно-однозначное соответствие между линейными операторами и квадратными матрицами, поэтому, в частности, оператор и его матрицу обычно обозначают одним и тем же символом.

3.7.3. Изменение матрицы линейного преобразования при переходе к новому базису. Пусть в n– мерном линейном пространстве L задан линейный оператор $A: L \to L'$ и два базиса $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ и $\boldsymbol{E}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$, связанные невырожденной матрицей перехода U: $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}\,U$. Пусть в базисе $\boldsymbol{E}$ матрица оператора равна A, докажем, что в базисе $\boldsymbol{E}'$ матрица оператора равна $A' = U^{-1} A\, U$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x})$, т.е. $y = Ax$, где x, y – столбцы координат векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ в базисе $\boldsymbol{E}$, и y' и x' – столбцы координат векторов $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{E}'$. Тогда $y = Uy'$, $x = Ux'$, и $Uy' = AUx'$, т.е. $y' = U^{-1}AUx'$, и так как в базисе $\boldsymbol{E}'$ координаты должны преобразовываться по формуле $y' = A'x'$, то $A' = U^{-1} A\, U$.

3.7.4. Подобные матрицы.

Определение. Квадратные матрицы A и B одинакового размера называются подобными, если существует невырожденная матрица такая, что $A = U^{-1} B\, U$.

Свойство подобных матриц, непосредственно следующее из определения: **определители подобных матриц равны** (док-во: $\det(U^{-1}BU) = \det(U^{-1}) \det(B) \det(U) = \det(B)$, так как $\det(U^{-1}) \det(U) = 1$).

Следствием из изложенного является **свойство инвариантности определителя матрицы линейного оператора относительно базиса**: определитель матрицы линейного оператора не меняется при переходе к другому базису базиса.

3.7.5. Действия с линейными операторами. Даны линейные операторы $A: L \to L'$, $B: L \to L'$, …

Определение. Оператор C называется суммой операторов A и B ($C = A + B$), если $C(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x}) + B(\boldsymbol{x})$.

Пусть операторы A и B имеют матрицы A и B соответственно: $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}\,(Ax)$, $B(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}\,(Bx)$, тогда $A(\boldsymbol{x}) + B(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}\,(Ax) + \boldsymbol{E}\,(Bx) = \boldsymbol{E}\,(Ax + Bx) = \boldsymbol{E}\,((A + B)\,x)$. Таким образом, матрица суммы операторов равна сумме матриц слагаемых.

Определение. Оператор D называется произведением действительного числа α и оператора A ($D = \alpha A$, если $D(\boldsymbol{x}) = \alpha A(\boldsymbol{x})$.

Как и для суммы, легко доказать матрица оператора αA равна αA.

Множество линейных операторов содержит нулевой оператор $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$; для каждого оператора $A(\boldsymbol{x})$ оператор $-A(\boldsymbol{x}) = (-1)\, A(\boldsymbol{x})$ можно рассматривать как противоположный; в результате ясно, что множество линейных операторов образует линейное пространство.

Определение. Оператор F называется произведением операторов A и B ($F = A\,B$), если $F(\boldsymbol{x}) = A(B(\boldsymbol{x}))$.

Матрица произведения операторов равна произведению матриц сомножителей: $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}\,(Ax)$, $B(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}\,(Bx) \Rightarrow A(B(\boldsymbol{x})) = A(\boldsymbol{E}\,(Bx)) = \boldsymbol{E}\,(A(Bx)) = \boldsymbol{E}\,((AB)\,x)$.

Если отображение $A: L \to L'$ взаимно однозначно, можно определить обратный оператор $A^{-1}: \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}$, если $A: \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} \in L$, $\boldsymbol{y} \in L'$. Матрица обратного оператора A^{-1} обратна матрице оператора A.

3.8. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Пусть в n–мерном линейном пространстве L действует линейный оператор $A: L \to L$.

Определение. Действительное число λ называется **собственным значением** (или **собственным числом**) линейного оператора A, если существует **ненулевой** вектор $\boldsymbol{x}$ такой, что $A(\boldsymbol{x}) = \lambda\, \boldsymbol{x}$. Вектор $\boldsymbol{x}$ называется собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ. Множество собственных значений оператора А называется **спектром** этого оператора.

Пусть A – матрица оператора A в некотором базисе $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, $\boldsymbol{x}$ – столбец координат собственного вектора x в том же базисе. Тогда равенство $A(\boldsymbol{x}) = \lambda\, \boldsymbol{x}$ запишется в форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Таким образом, относительно координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ собственного вектора $\boldsymbol{x}$ получена однородная система линейных уравнений, которая имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее матрица вырождена:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Более кратко то же равенство можно получить из определения собственных чисел и собственных векторов в матричной форме: $A(\boldsymbol{x}) = \lambda\, \boldsymbol{x} \Rightarrow A\, \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{E}\, \boldsymbol{x} \Rightarrow (A - \lambda \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \det(A - \lambda \boldsymbol{E}) = 0$, так как $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Относительно собственного числа λ выражение $\det(A - \lambda \boldsymbol{E})$ является многочленом степени n.

Определение. Выражение $\det(A - \lambda \boldsymbol{E})$ называется **характеристическим многочленом** линейного оператора A; уравнение $\det(A - \lambda \boldsymbol{E}) = 0$ называется **характеристическим уравнением** оператора A.

Мы ввели понятия собственного числа, собственного вектора, характеристического уравнения и характеристического многочлена применительно к линейному оператору. Однако мы установили, что при фиксированном базисе существует взаимно-однозначное соответствие между линейными операторами и квадратными матрицами, поэтому можно говорить о собственном числе, собственном векторе, характеристическом уравнении и характеристическом многочлене квадратной матрицы. Матрица линейного оператора меняется при изменении базиса, тем не менее сейчас мы докажем, что характеристический многочлен (и, как следствие, характеристическое уравнение) не зависит от выбора базиса.

Теорема об инвариантности характеристического многочлена линейного оператора относительно базиса. Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Док-во. Пусть в базисе $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ матрица оператора равна A, в базисе $\boldsymbol{E}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$ матрица равна A'; $A' = U^{-1} A\, U$, где U- невырожденная матрица перехода: $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}\, U$. Тогда $\det(A' - \lambda \boldsymbol{E}) = \det(A' - U^{-1} \lambda\, U \boldsymbol{E}) = \det(U^{-1} A\, U - U^{-1} \lambda\, \boldsymbol{E}\, U) = \det(U^{-1} (A - \lambda\, \boldsymbol{E})\, U) =$
$= \det(U^{-1}) \cdot \det(A - \lambda\, \boldsymbol{E}) \cdot \det(U) = \det(A - \lambda\, \boldsymbol{E})$, что и требовалось доказать.

Теорема. Для того, чтобы действительное число λ было собственным значением линейного оператора, необходимо и достаточно, чтобы оно было корнем характеристического многочлена этого оператора.

Док-во. Необходимость. Пусть λ – собственное число линейного оператора A, т.е. существует вектор $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ такой, что $A(\boldsymbol{x}) = \lambda\, \boldsymbol{x}$. Тогда $A\, \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{E}\, \boldsymbol{x} \Rightarrow (A - \lambda \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \det(A - \lambda \boldsymbol{E}) = 0$, так как $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, следовательно, λ – корень характеристического многочлена.

Достаточность. Пусть λ – корень характеристического многочлена, т.е. $\det(A - \lambda \boldsymbol{E}) = 0$. Матрица однородной СЛАУ вырождена, следовательно, эта СЛАУ имеет нетривиальное решение $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$: $(A- \lambda \boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow A\,\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{x} \Rightarrow A\,\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}$, т.е. λ – собственное число линейного оператора A, $\boldsymbol{x}$ – соответствующий собственный вектор.

Отметим еще несколько следствий из теоремы об инвариантности характеристического многочлена линейного оператора относительно базиса.

1. Спектр линейного оператора не зависит от выбора базиса.

2. Эта теорема означает, что коэффициенты многочлена

$$\det(A- \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

n –ой степени относительно λ не зависят от выбора базиса.

Найдем некоторые коэффициенты этого многочлена. Так, при $n = 2$

$$\det(A- \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)\,(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11}+ a_{22})\,\lambda + (a_{11}a_{22}- a_{12}a_{21}) =$$

$= \lambda^2 -$ Sp$(A)\,\lambda + \Delta$, где $\Delta = (a_{11}a_{22}- a_{12}a_{21})$ - определитель матрицы A, Sp$(A) = (a_{11}+ a_{22})$ – след матрицы (сумма элементов главной диагонали). При и $n = 3$

$$\det(A- \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) + a_{12}a_{23}\,a_{31} + a_{13}a_{21}\,a_{32} - a_{13}(a_{22} - \lambda)a_{31} -$$

$- (a_{11} - \lambda)a_{32}\,a_{23} - a_{22}\,a_{21}(a_{33} - \lambda) = - \lambda^3 + (a_{11}+ a_{22} + a_{33})\,\lambda^2 - (a_{11}a_{22}+ a_{11}a_{33}+ a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32})\,\lambda + (a_{11}a_{22}\,a_{33} + a_{12}a_{23}\,a_{31} + a_{13}a_{21}\,a_{32} - a_{13}a_{22}\,a_{31} - a_{12}a_{21}\,a_{33} - a_{11}a_{23}\,a_{32}) = - \lambda^3 +$ Sp$(A)\,\lambda^2 -$ $(a_{11}a_{22}+ a_{11}a_{33}+ a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32})\,\lambda + \Delta$.

В общем случае $\det(A- \lambda \boldsymbol{E}) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\,(a_{11} + a_{22} + \dots + \; + a_{nn})\,\lambda^{n-1} + \dots + \Delta$. Старший коэффициент многочлена равен $(-1)^n$, коэффициент при λ^{n-1} равен сумме элементов главной диагонали, т.е. следу матрицы, свободный член равен определителю матрицы Δ. То, что определитель матрицы линейного оператора не меняется при переходе к новому базису, мы доказали, когда рассматривали подобные матрицы, теперь мы установили, что и след матрицы не меняется при переходе к новому базису (другим словами, следы подобных матриц равны).

3.9. Свойства собственных векторов и собственных значений.

Определение. **3.9.1**. Подпространство L_1 линейного пространства L называется **инвариантным подпространством** линейного оператора A, если образ любого вектора подпространства L_1 принадлежит L_1: для $\forall \boldsymbol{x} \in L_1 \quad A\,\boldsymbol{x} \in L_1$.

Собственному значению λ соответствует бесконечное количество собственных векторов (если $\boldsymbol{x}$ – собственный вектор, соответствующий λ, то любой вектор $\beta\boldsymbol{x}$, $\beta \neq 0$, $\beta \in R$ – тоже собственный вектор, соответствующий λ: $\mathrm{A}(\beta\boldsymbol{x}) = \beta\mathrm{A}(\boldsymbol{x}) = \beta(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(\beta\boldsymbol{x})$). Множество собственных векторов, соответствующих одному и тому же собственному значению λ, не может образовывать подпространство линейного пространства L, так как оно не содержит нулевого вектора (собственный вектор, по определению, не равен $\boldsymbol{0}$), однако, если дополнить его нулевым вектором, получится подпространство линейного пространства L:

Теорема 3.9.1. Множество собственных векторов линейного оператора A, соответствующих одному и тому же собственному значению λ, пополненное нулевым вектором, является инвариантным подпространством оператора A.

Док-во. Обозначим это множество $S(A, \lambda)$. Если $\boldsymbol{x} \in S(A,\lambda)$, $\quad \boldsymbol{y} \in S(A,\lambda)$, то $A(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) =$ $= A(\alpha\boldsymbol{x}) + A(\beta\boldsymbol{y}) = \alpha A(\boldsymbol{x}) + \beta A(\boldsymbol{y}) = \alpha(\lambda\,\boldsymbol{x}) + \beta(\lambda\,\boldsymbol{y}) = \lambda\,(\alpha\,\boldsymbol{x} + \beta\,\boldsymbol{y})$, т.е. $\alpha\,\boldsymbol{x} + \beta\,\boldsymbol{y} \in S(A,\lambda)$, что и т.д.

Другими примерами инвариантных подпространств являются линейные оболочки любого набора собственных векторов линейного оператора и весь образ линейного оператора $\{\boldsymbol{y} | \boldsymbol{y} = A\,\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in L\}$.

Теорема 3.9.2. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ - попарно различные собственные числа линейного оператора A. Тогда система $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_r$ соответствующих им собственных векторов линейно независима.

Док-во проведем по методу математической индукции. При $r = 1$ утверждение справедливо,

так как собственный вектор, по определению, не равен $\mathbf{0}$. Пусть теорема справедлива при $r = r_0$, докажем, что она справедлива при $r = r_0+1$. Предположим, что некоторая линейная комбинация дает нулевой вектор: $\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_{r0+1}\boldsymbol{x}_{r0+1} = \mathbf{0}$. Подействуем на это равенство оператором A:
$\alpha_1 A(\boldsymbol{x}_1) + \alpha_2 A(\boldsymbol{x}_2) + \ldots + \alpha_{r0+1}A(\boldsymbol{x}_{r0+1}) = \mathbf{0}$, или, с учетом собственности векторов,
$\alpha_1 \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_{r0+1} \lambda_{r0+1}\boldsymbol{x}_{r0+1} = \mathbf{0}$. Вычтем из этого равенства равенство
$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_{r0+1}\boldsymbol{x}_{r0+1} = \mathbf{0}$, умноженное на λ_{r0+1}:
$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{r0+1})\, \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_{r0+1})\, \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_{r0} (\lambda_{\kappa} - \lambda_{r0+1})\boldsymbol{x}_{r0} = \mathbf{0}$.
Векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{r0}$ линейно независимы, поэтому последняя линейная комбинация обязана быть тривиальной: $\alpha_\kappa (\lambda_\kappa - \lambda_{r0+1})$, $\kappa = 1, 2, \ldots, r_0$, и, так как $\lambda_\kappa \neq \lambda_{r0+1}$ (собственные числа попарно различны), то все $\alpha_\kappa = 0$, $\kappa = 1, 2, \ldots, r_0$. Теперь равенство $\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_{r0+1}\boldsymbol{x}_{r0+1} = \mathbf{0}$ сведется к $\alpha_{r0+1}\boldsymbol{x}_{r0+1} = \mathbf{0}$, откуда и $\alpha_{r0+1} = 0$, так как $\boldsymbol{x}_{r0+1} \neq \mathbf{0}$. Таким образом, только тривиальная линейная комбинация векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{r0+1}$ дает нулевой вектор, т.е. эти векторы линейно независимы.

Теорема 3.9.3. Матрица линейного оператора $A: L \to L$ в некотором базисе является диагональной тогда и только тогда, когда все векторы базиса являются собственными векторами оператора.

Док-во. Столбцами матрица линейного оператора являются координаты образов векторов базиса. Если матрица диагональна, $A = \begin{pmatrix} a_1\ 0\ 0 \ldots 0 \\ 0\ a_2\ 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ 0 \ldots a_n \end{pmatrix}$, то $A\boldsymbol{e}_j = a_j\boldsymbol{e}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, т.е. $\boldsymbol{e}_j$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению a_j.

Обратно, если все векторы базиса являются собственными векторами оператора, то действие оператора на каждый из этих векторов сводится к его умножению на соответствующее собственное число, в результате матрица оператора диагональна.

Понятно, что наиболее простой вид, который может иметь матрица линейного оператора – диагональный, поэтому дальше мы будем исследовать вопрос о том, существует ли базис, в котором матрица оператора диагональна. Одно достаточное условие следует из уже доказанных теорем.

Теорема 3.9.4. Если характеристическое уравнение оператора, действующего в n–мерном линейном пространстве, имеет n попарно различных действительных корней, то существует базис из собственных векторов, т.е. базис, в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Другими словами, если характеристическое уравнение квадратной матрицы n–го порядка , имеет n попарно различных действительных корней, то эта матрица подобна некоторой диагональной матрице.

Корни характеристического уравнения не обязательно должны быть действительными и попарно различными; некоторые корни могут совпадать или быть комплексными. Понятно, что если характеристическое уравнение имеет комплексные корни, то базиса, в котором матрица оператора диагональна, не существует. Чтобы рассмотреть случай кратных (совпадающих) корней, введем понятия алгебраической и геометрической кратности собственного числа линейного оператора.

Определение 3.9.2. Алгебраической кратностью собственного значения λ_0 линейного оператора называется кратность λ_0 как корня характеристического многочлена $\det(A - \lambda\boldsymbol{E})$.

Напомним, что число λ_0 называется корнем многочлена $\det(A - \lambda\boldsymbol{E})$ кратности k, если $\det(A - \lambda\boldsymbol{E}) = (\lambda - \lambda_0)^k P_1(\lambda)$, где многочлен $P_1(\lambda)$ степени $n - k$ удовлетворяет условию $P_1(\lambda_0) \neq 0$.

Определение 3.9.3. Геометрической кратностью собственного значения λ_0 линейного оператора называется максимальное количество линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_0.

Другими словами, геометрическая кратность собственного значения λ_0 равна размерности инвариантного подпространства, соответствующего λ_0.

Теорема 3.9.5. Геометрическая кратность собственного значения λ_0 линейного оператора A не превосходит его алгебраической кратности.

Док-во. Пусть k - алгебраическая кратность собственного значения λ_0 линейного оператора A, т.е. $\det(A - \lambda\boldsymbol{E}) = (\lambda - \lambda_0)^k P_1(\lambda)$, $P_1(\lambda_0) \neq 0$; l - геометрическая кратность λ_0, т.е. имеется l линейно

независимых собственных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_l$, соответствующих l. Пополним эту систему до полного базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_l, \boldsymbol{e}_{l+1}, \boldsymbol{e}_{l+2}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства L. В этом базисе матрица оператора имеет вид
$$A=\begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_0 \; 0 \; 0 \ldots 0}^{l} & a_{1\,l+1} & a_{1\,l+2} & \ldots & a_{1n} \\ 0 \; \lambda_0 \; 0 \ldots 0 & a_{2\,l+1} & a_{2\,l+2} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & & \\ 0 \; 0 \; 0 \ldots \lambda_0 & a_{l\,l+1} & a_{l\,l+2} & \ldots & a_{ln} \\ 0 \; 0 \; 0 \ldots 0 & a_{l+1\,l+1} & a_{l+1\,l+2} & \ldots & a_{l+1\,n} \\ \ldots & & & & \\ 0 \; 0 \; 0 \ldots 0 & a_{n\,l+1} & a_{n\,l+2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$
и характеристический многочлен равен
$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} \overbrace{\lambda_0-\lambda \;\; 0 \;\; 0 \;\ldots 0}^{l} & a_{1\,l+1} & a_{1\,l+2} & \ldots & a_{1n} \\ 0 \;\; \lambda_0-\lambda \;\; 0 \ldots 0 & a_{2\,l+1} & a_{2\,l+2} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & & \\ 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \lambda_0-\lambda & a_{l\,l+1} & a_{l\,l+2} & \ldots & a_{ln} \\ 0 \;\; 0 \;\; 0 \ldots 0 & a_{l+1\,l+1}-\lambda & a_{l+1\,l+2} & \ldots & a_{l+1\,n} \\ \ldots & & & & \\ 0 \;\; 0 \;\; 0 \ldots 0 & a_{n\,l+1} & a_{n\,l+2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda_0-\lambda)^l \cdot \begin{vmatrix} a_{l+1\,l+1}-\lambda & a_{l+1\,l+2} & \ldots & a_{l+1\,n} \\ \ldots & & & \\ a_{n\,l+1} & a_{n\,l+2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =$$
(определитель разлагается, последовательно, по первому, затем по второму и т.д. вплоть до –го столбцам) $= (\lambda - \lambda_0)^l P_2(\lambda)$, где $P_2(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{l+1\,l+1}-\lambda & a_{l+1\,l+2} & \ldots & a_{l+1\,n} \\ \ldots & & & \\ a_{n\,l+1} & a_{n\,l+2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$. Далее есть две возможности. Если $P_2(\lambda_0) \neq 0$, то, сравнивая представления $\det(A- \lambda\boldsymbol{E}) = (\lambda - \lambda_0)^k P_1(\lambda)$, $P_1(\lambda_0) \neq 0$ и $\det(A- \lambda\boldsymbol{E}) = (\lambda - \lambda_0)^l P_2(\lambda)$, $P_2(\lambda_0) \neq 0$, в силу единственности (с точностью до порядка сомножителей) разложения многочлена на множители, делаем вывод, что $k = l$. Если $P_2(\lambda_0) = 0$, то из сравнения этих представлений делаем вывод, что $k > l$. В обоих случаях $l \leq k$, что и т.д.

Окончательный вывод:

Теорема 3.9.6. В линейном пространстве существует базис из собственных векторов линейного оператора A тогда и только тогда, когда все корни характеристического уравнения вещественны и у всех собственных значений этого оператора алгебраические кратности равны их геометрическим кратностям.

В матричных терминах это означает, что при сформулированных условиях квадратная матрица приводима преобразованием подобия к диагональному виду.

Пример 1. Пусть в некотором базисе матрица оператора имеет вид $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Существует ли базис, в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид? В случае положительного ответа найти этот базис и указать матрицу перехода.

Решение. 1. Находим характеристический многочлен: $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=$

$= (1 - \lambda)^3 - 9(1 - \lambda) = (1 - \lambda)(1 - 2\lambda + \lambda^2 - 9) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = (1 - \lambda)(\lambda - 4) (\lambda + 2)$. Характеристическое уравнение $\det(A- \lambda\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{0}$ имеет три различных корня $\lambda_1= 1$, $\lambda_2= -2$, $\lambda_3= 4$, соответствующие собственные векторы по теореме 3.9.2 должны быть линейно независимы, следовательно, матрица диагонализируема.

2. Ищем собственные векторы. $\lambda_1 = 1$. Матричное уравнение для собственного вектора $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ имеет вид $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = 0$; в данном случае $\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & 3 \\ 2 & 1-\lambda_1 & 2 \\ 3 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$,

или $\begin{cases} 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = c, \\ x_3 = 0. \end{cases}$ Пространство решений однородной вырожденной СЛАУ, как и следует ожидать, оказалось одномерным (геометрическая кратность в случае простого корня обязана совпадать с алгебраической), берем $c = 1$, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = -2$. В этом случае $\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 0 & 3 \\ 2 & 1-\lambda_2 & 2 \\ 3 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, или

$\begin{cases} 3x_1 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -c. \end{cases}$ И в этом случае пространство решений одномерно, при $c = 1$ получаем $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = 4$. В этом случае $\begin{pmatrix} 1-\lambda_3 & 0 & 3 \\ 2 & 1-\lambda_3 & 2 \\ 3 & 0 & 1-\lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, или

$\begin{cases} 3x_1 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c, \\ x_2 = \frac{4}{3}c, \\ x_3 = c. \end{cases}$ При $c = 3$ получаем $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

В базисе $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ матрица оператора должна иметь диагональный вид $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, убедимся в этом. Матрица перехода составляется из координат векторов нового базиса: $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, тогда $U^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, и $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Те же вопросы, что и в предыдущем примере.

1. $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1 - \lambda) + 2 + 2 + 2\lambda + 2\lambda - (1 - \lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3$. Характеристическое уравнение $-\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$ является кубическим, поэтому один корень надо угадать. Перебирая делители свободного члена, убеждаемся, что $\lambda = -1$ является корнем. Делим многочлен $-\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3$ на $\lambda + 1$ (например, столбиком), получаем $-\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 =$

$=(\lambda + 1)(-\lambda^2 + 2\lambda + 3)$. Корни квадратного трехчлена во второй скобке равны -1 и 3, поэтому $-\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^2$. Корень $\lambda_1 = 3$ имеет кратность 1, корень $\lambda_2 = -1$ имеет (алгебраическую) кратность 2.

2. $\lambda_1 = 3$. Для координат собственного вектора получаем систему $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$ Решим эту систему с помощью элементарных преобразований: $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Свободная переменная $x_3 = c$, $x_2 = c/2$, $x_1 = c/2$, взяв $c = 2$, получим

$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = -1$. Для координат собственного вектора получаем систему $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ Пространство решений двумерно, взяв $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, получим $x_3 = -c_1 - c_2$. Геометрическая кратность этого корня совпадает с алгебраической, следовательно, матрица диагонализируема; два линейно независимых вектора получим, взяв наборы ($c_1 = 1$, $c_2 = 0$) и ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$): $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. В базисе ($\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$) матрица оператора имеет вид $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, матрица перехода

$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Пример 3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Те же вопросы, что и в предыдущих примерах.

1. $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -2 \\ 3 & -3-\lambda & 6 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-1 - \lambda)(-3 - \lambda)(4 - \lambda) + 12 + 12 + 4(-3 - \lambda) - 3(4 - \lambda) +$

$+ 12(-1 - \lambda) = (\lambda^2 + 4\lambda + 3)(4 - \lambda) - 13\lambda - 12 = -\lambda^3$. Характеристическое уравнение $-\lambda^3 = 0$ имеет единственный корень $\lambda_1 = 0$ алгебраической кратности 3.

2. $\lambda_1 = 0$. Для координат собственного вектора получаем систему $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

Пространство решений двумерно ($x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$, получим $x_1 = c_1 - 2c_2$). Геометрическая кратность корня меньше алгебраической, следовательно, матрица не диагонализируема.

Пример 3. $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Те же вопросы, что и в предыдущих примерах.

1. $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & -3 \\ 2 & 3-\lambda & 6 \\ -1 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda)(3 - \lambda)(4 - \lambda) + 12 + 12 - 3(3 - \lambda) + 4(4 - \lambda) +$

$+ 12(-2 - \lambda) = (\lambda^2 - \lambda - 6)(4 - \lambda) - 13\lambda + 7 = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 11\lambda - 17$. Разложение характеристического многочлена на множители имеет вид $\det(A - \lambda E) = (\lambda + 1)(-\lambda^2 + 6\lambda - 17)$. Квадратный трехчлен в последней скобке не имеет действительных корней, поэтому, как и в предыдущем примере, матрица не диагонализируема.

3.10. Линейные операторы в евклидовых пространствах.

A – линейный оператор, действующий в n–мерном евклидовом пространстве E^n: $A: E^n \to E^n$.

3.10.1. Сопряженный оператор и его матрица.

3.10.1.1. Определение сопряженного оператора. Оператор $A^*: E^n \to E^n$ называется **сопряженным** к линейному оператору $A: E^n \to E^n$, если для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ выполняется равенство $(A(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^*(\boldsymbol{y}))$.

Теорема 3.10.1.1. Если A – линейный оператор, то оператор A^*, определенный равенством $(A(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^*(\boldsymbol{y}))$, тоже является линейным.

Док-во. $(\boldsymbol{x}, A^*(\alpha \boldsymbol{y}_1 + \beta \boldsymbol{y}_2)) = (A(\boldsymbol{x}), (\alpha \boldsymbol{y}_1 + \beta \boldsymbol{y}_2)) = \alpha (A(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}_1) + \beta(A(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}_2) = \alpha (\boldsymbol{x}, A^*(\boldsymbol{y}_1)) +$ $+\beta(\boldsymbol{x}, A^*(\boldsymbol{y}_2))$.

Теорема 3.10.1.2. Для любого линейного оператора $A: E^n \to E^n$ существует единственный сопряженный линейный оператор $A^*: E^n \to E^n$. Матрицей оператора A^* в произвольном ортонормированном базисе $\boldsymbol{E}$ является матрица A^{T} - транспонированная матрица оператора A.

Док-во. Выше мы доказали, что в фиксированном базисе существует взаимно однозначное соответствие между линейными операторами и матрицами n –го порядка. Теорема будет доказана, если мы докажем, что для матрицы A^* сопряженного оператора выполняется $A^* = A^{\mathrm{T}}$. Пусть

$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n \boldsymbol{e}_n = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}\, x$, $\boldsymbol{y} = y_1 \boldsymbol{e}_1 + y_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n \boldsymbol{e}_n =$

$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}\, y$, тогда $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = x^{\mathrm{T}} \cdot y$ (x, y – столбцы координат векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ в базисе $\boldsymbol{E}$), $A(\boldsymbol{x}) = A\, x$, $(A(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (Ax)^{\mathrm{T}} \cdot y = x^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \cdot y$ (по свойству транспонирования); соответственно, $(\boldsymbol{x}, A^*(\boldsymbol{y})) = x^{\mathrm{T}} \cdot A^* y$, и определение сопряженного оператора в матричной форме запишется как $x^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \cdot y = x^{\mathrm{T}} \cdot A^* y$. Преобразуем это равенство: $x^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \cdot y = x^{\mathrm{T}} \cdot A^* y \Rightarrow x^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \cdot y - x^{\mathrm{T}} \cdot A^* y = \mathbf{0} \Rightarrow$ $\Rightarrow x^{\mathrm{T}} (A^{\mathrm{T}} - A^*) y = \mathbf{0}$. Таким образом, для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ выполняется $x^{\mathrm{T}} (A^{\mathrm{T}} - A^*) y = \mathbf{0}$. Это возможно, только если $A^{\mathrm{T}} - A^* = 0$ (доказать), или $A^{\mathrm{T}} = A^*$.

Пример. Пусть в V^3 дан фиксированный вектор $\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$. Оператор A переводит произвольный вектор $\boldsymbol{x}$ в векторное произведение $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}]$: $A(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}]$. Доказать, что А – линейный оператор. Найти сопряженный оператор.

3.10.1.2. Свойства сопряженных операторов следуют из свойств операции транспонирования.

1. Если I – тождественный оператор ($I(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$), то $I^* = I$.

2. $0^* = 0$ (0-оператор – оператор, который $\forall \boldsymbol{x} \in L$ переводит в **0**').

3. $(A + B)^* = A^* + B^*$. **4**. $(\alpha A)^* = \alpha A^*$.

5. $(A^*)^* = A$. **6**. $(AB)^* = B^* A^*$.

3.10.2. Самосопряженные операторы и их матрицы.

3.10.2.1. Определение самосопряженного оператора. Оператор A: $E^n \to E^n$ называется **самосопряженным**, если $A^* = A$, т.е. любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ выполняется равенство
$(A(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A(\boldsymbol{y}))$.

Теорема 3.10.2.1 о симметричности матрицы самосопряженного оператора. Линейный оператор A: $E^n \to E^n$ самосопряжен тогда и только тогда, когда его матрица в произвольном ортонормированном базисе симметрична.

Док-во непосредственно следует из **теоремы 3.10.1.2**: $A^* = A^{\mathrm{T}} = A$.

3.10.2.2. Свойства собственных векторов и собственных значений самосопряженного оператора.

Теорема 3.10.2.2.1. Все собственные значения самосопряженного оператора действительны.

Теорема 3.10.2.2.2. Собственные векторы самосопряженного оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Док-во. Пусть $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ – собственные векторы, $\boldsymbol{x}_1 \neq 0$, $\boldsymbol{x}_2 \neq 0$, $A(\boldsymbol{x}_1) = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$, $A(\boldsymbol{x}_1) = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда $(A(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{x}_2) = (\lambda_1 \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \lambda_1 (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$; $(\boldsymbol{x}_1, A(\boldsymbol{x}_2)) = (\boldsymbol{x}_1, \lambda_2 \boldsymbol{x}_2) = \lambda_2 (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$; для самосопряженного оператора $(A(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{x}_2) = (\boldsymbol{x}_1, A(\boldsymbol{x}_2))$, т.е. $\lambda_1 (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \lambda_2 (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0 \Rightarrow (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ (так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$), т.е. $\boldsymbol{x}_1 \perp \boldsymbol{x}_2$.

Теорема 3.10.2.2.3. Если λ_0 - собственное значение самосопряженного оператора, то алгебраическая и геометрическая кратности этого корня совпадают.

Другими словами, если λ_0 – корень характеристического многочлена кратности k, то существует k линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_0.

Теорема 3.10.2.2.4. Любой самосопряженный линейный оператор A: $E^n \to E^n$ имеет ортонормированный базис из собственных векторов.

Док-во этой теоремы следует из предыдущих теорем. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ – собственные числа самосопряженного оператора A: $E^n \to E^n$, имеющие алгебраические и совпадающие с ними геометрические кратности $k_1, k_2, \ldots, k_p$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$. Все пространство E^n распадается на p инвариантных подпространств, соответствующих собственным значениям. Векторы каждого из этих подпространств ортогональны векторам любого другого подпространства (**Теорема 3.10.2.2.2**). Геометрическая кратность каждого из подпространств совпадает с его алгебраической кратностью (**Теорема 3.10.2.2.3**), т.е. в j-ом подпространстве существует система из k_j линейно независимых собственных векторов. Эта система может быть ортонормирована (с помощью, например, процесса Грамма-Шмидта). Объединение этих систем дает ортонормированный базис из собственных векторов.

Окончательный вывод:

Теорема 3.10.2.2.5. Любой самосопряженный линейный оператор имеет ортонормированный базис, в котором его матрица диагональна.

Переформулируем доказанные теоремы в матричных терминах.

Теорема 3.10.2.2.6. Все собственные значения симметрической матрицы действительны.

Теорема 3.10.2.2.7. Собственные векторы симметрической матрицы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Теорема 3.10.2.2.8. Любой симметрическая матрица подобна некоторой диагональной матрице.

3.11. Ортогональные матрицы и ортогональные преобразования.

3.11.1. Определение ортогональной матрицы. Квадратная матрица называется **ортогональной**, если ее обратная и транспонированная матрицы равны: $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$.

3.11.2. Свойства ортогональной матрицы.

1. Для того, чтобы квадратная матрица была ортогональной, необходимо и достаточно, чтобы система столбцов этой матрицы была ортонормированной, т.е чтобы скалярный квадрат каждого столбца был равен 1, а скалярное произведение каждого столбца на любой другой столбец было равно 0.

Док-во следует из того, что в произведении $A^{-1} \cdot A = A^{\mathrm{T}} \cdot A$ элемент, стоящий на пересечении i-ой стороки и j-го столбца, равен произведению i-го и j-го столбцов матрицы A:
$\left(A^{\mathrm{T}} \cdot A\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{\mathrm{T}} \cdot a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot a_{kj}$ (символом a_{ik}^{T} обозначен элемент матрицы A^{T}, стоящий на пе-

ресечении i–ой стороки и j-го столбца, $a_{ik}^{\mathrm{T}} = a_{ki}$ по определению транспонированной матрицы).

Если это произведение равно единичной матрице, то $\left(A^{\mathrm{T}} \cdot A\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot a_{kj} = e_{kj} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ что и означает ортонормированность системы столбцов Обратно, если система столбцов ортонормирована, то это произведение равно единичной матрице.

2. Такое же свойство для системы строк: для того, чтобы квадратная матрица была ортогональной, необходимо и достаточно, чтобы система строк этой матрицы была ортонормированной, т.е чтобы скалярный квадрат каждой строки был равен 1, а скалярное произведение каждой строки на любую другую строку было равно 0, доказывается исходя из равенства $A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{\mathrm{T}} = E$.

3. Определитель ортонормированной матрицы может принимать только значения ± 1.

Док-во. $A^{-1} \cdot A = A^{\mathrm{T}} \cdot A = E \Rightarrow \det(A^{\mathrm{T}}) \cdot \det(A) = 1 \Rightarrow \det^2(A) = 1 \Rightarrow \det^2(A) = \pm 1$.

4. Матрица, транспонированная к ортогональной, тоже ортогональна.

5. Матрица, обратная к ортогональной, тоже ортогональна.

Свойства 4, 5 доказать самостоятельно.

3.11.3. Определение ортогонального оператора (ортогонального преобразования евклидова пространства). Линейный оператор A: $E^n \to E^n$ называется **ортогональным оператором** (или **ортогональным преобразованием евклидова пространства**), если под действием этого оператора любой ортонормированный базис пространства преобразуется в ортонормированный базис.

3.11.4. Свойства ортогонального оператора.

1. Линейный оператор в евклидовом пространстве ортогонален тогда и только тогда, когда его матрица в любом ортонормированном базисе ортогональна.

Док-во. Необходимость. Пусть $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ и $\boldsymbol{E}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3, \dots, \boldsymbol{e}'_n)$ – два ортонормированных базиса пространства E, связанные матрицей перехода U: $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}\, U$,

$U = \begin{pmatrix} u_{11}\; u_{12} \;\dots u_{1n} \\ u_{21}\; u_{22} \;\dots u_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ u_{n1}\; u_{n2} \;\dots u_{nn} \end{pmatrix}$. Докажем, что U - ортогональная матрица. Найдем скалярное произведение векторов $\boldsymbol{e}'_i$ и $\boldsymbol{e}'_j$: $(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_j) = (\boldsymbol{e}_1 \cdot u_{1i} + \boldsymbol{e}_2 \cdot u_{2i} + \dots + \boldsymbol{e}_n \cdot u_{ni}) \cdot (\boldsymbol{e}_1 \cdot u_{1j} + \boldsymbol{e}_2 \cdot u_{2j} + \dots + \boldsymbol{e}_n \cdot u_{nj}) =$

$= u_{1i} \cdot u_{1j} + a\, u_{2i} \cdot u_{2j} + \dots + u_{ni} \cdot u_{nj} = \sum_{k=1}^{n} u_{ki} \cdot u_{kj} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ так как $\boldsymbol{E}'$ - ортонормированный базис.

Система столбцов матрицы U ортонормированна, следовательно, U – ортогональная матрица.

Достаточность. Пусть U – ортогональная матрица, т.е. $U^{\mathrm{T}} = U^{-1}$, и базис $\boldsymbol{E}'$ получен из базиса $\boldsymbol{E}$ преобразованием U: $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}\, U$. Тогда

$(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_j) = (\boldsymbol{e}_1 \cdot u_{1i} + \boldsymbol{e}_2 \cdot u_{2i} + \dots + \boldsymbol{e}_n \cdot u_{ni}) \cdot (\boldsymbol{e}_1 \cdot u_{1j} + \boldsymbol{e}_2 \cdot u_{2j} + \dots + \boldsymbol{e}_n \cdot u_{nj}) = u_{1i} \cdot u_{1j} + a\, u_{2i} \cdot u_{2j} + \dots + u_{ni} \cdot u_{nj}$

$= \sum_{k=1}^{n} u_{ki} \cdot u_{kj} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ т.е. базис $\boldsymbol{E}'$ ортонормирован.

2. Любое ортогональное преобразование сохраняет скалярное произведение в евклидовом пространстве, т.е. $(A(\boldsymbol{x}), A(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Док-во. $(A(\boldsymbol{x}), A(\boldsymbol{y})) = (Ax)^{\mathrm{T}} \cdot Ay = (x^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}) \cdot Ay = x^{\mathrm{T}} (A^{\mathrm{T}} \cdot A)\, y = = x^{\mathrm{T}} \cdot y = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, так как $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$.

3. Любое ортогональное преобразование сохраняет нормы (длины) векторов и углы между векторами.

Док-во. Это свойство следует из предыдущего: $\|A(\boldsymbol{x})\| = \sqrt{(A(\boldsymbol{x}), A(\boldsymbol{x}))} = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \|\boldsymbol{x}\|$,

$\cos\varphi = \dfrac{(A(\boldsymbol{x}), A(\boldsymbol{y}))}{\|A(\boldsymbol{x})\| \cdot \|A(\boldsymbol{y})\|} = \dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|}$.

4. Верны и обратные утверждения: если оператор сохраняет скалярные произведения или нормы векторов, то он ортогонален.

3.11.5. Приведение симметрической матрицы к диагональному виду ортогональным

преобразованием. В разделе **3.10.1. Сопряженный оператор и его матрица** мы доказали, что любая симметрическая матрица (матрицы самосопряженного оператора) подобна диагональной матрице, диагональные элементы которой являются собственными числами матрицы. Преобразование подобия $A' = U^{-1} A\, U$ при переходе от одного ортонормированного базиса к другому описывается ортогональной матрицей U, для которой $U^{-1} = U^{\mathrm{T}}$, поэтому $A' = U^{\mathrm{T}} A\, U$. Поэтому для любой симметрической матрицы A существует такая ортогональная матрица U, которая преобразованием $A' = U^{\mathrm{T}} A\, U$ переводит A в диагональную матрицу, диагональными элементами которой являются собственные значения матрицы A, взятые столько раз, какова их кратность. Такое преобразование принято называть ортогональным преобразованием матрицы A.

Процедура ортогонального преобразования обычно выполняется по следующему алгоритму:

1. Находятся собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ матрицы и их кратности $k_1, k_2, \ldots, k_p$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$ (для симметрической матрицы алгебраические и геометрические кратности совпадают);

2. Находятся собственные векторы. Собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны. Если корень λ_j кратен ($k_j > 1$), в инвариантном подпространстве, соответствующем λ_j, ищется система из k_j линейно независимых собственных векторов.

3. В каждом из в инвариантных подпространств, соответствующем кратным λ_j, системы из собственных векторов ортогонализируется.

4. В результате шагов 1-3 будет найдена система из n попарно ортогональных собственных векторов. Пронормировав эту систему, получаем ортонормированный базис, переход к которому диагонализирует матрицу. Столбцы координат векторов этого базиса дают матрицу перехода U.

Пример. Ортогональным преобразованием привести к диагональному виду симметрическую матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3 - 8 - 8 - 4(1 - \lambda) - 4(1 - \lambda) - 4(1 - \lambda) = (1 - \lambda)^3 - 6 - 12(1 - \lambda) =$

$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = -\lambda^2(\lambda - 3) + 9(\lambda - 3) = -(\lambda - 3)(\lambda^2 - 9) = -(\lambda + 3)(\lambda - 3)^2$. Корни характеристического многочлена: $\lambda_1 = -3$ (простой) и $\lambda_{2,3} = 3$ (кратности 2).

2. $\lambda_1 = -3$. Для координат собственного вектора получаем систему $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$ Решим эту систему с помощью элементарных преобразований: $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Свободная переменная $x_3 = c$, $x_2 = -c$, $x_1 = -c$, взяв $c = -1$, получим вектор

$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Нормируя этот вектор, получим $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. $\lambda_{2,3} = 3$. Для координат собственных векторов получаем систему $\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$ Пространство решений двумерно, взяв $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, получим $x_3 = c_1 + c_2$. Геометрическая кратность этого корня, как и должно быть, совпадает с алгебраической, следовательно, матрица диагонализируема; два линейно независимых вектора получим, взяв наборы ($c_1 = 1$, $c_2 = 0$) и ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$):

$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, каждый из этих векторов ортогонален вектору $\boldsymbol{x}_1$. Однако система $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_2$ не ортогональна, поэтому мы должны ортономировать ее: $\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{x}_2}{|\boldsymbol{x}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{x}'_3 = \boldsymbol{x}_3 - (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 = = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{x}'_3}{|\boldsymbol{x}'_3|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ $\boldsymbol{e}_3$ образуют ортонормированный базис из собственных векторов. Матрица перехода

$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ действительно ортогональна:

$U \cdot U^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = E$, и $U^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Заметим, что при решении этой задачи мы могли обойти процесс ортогонализации. Выбрав $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, можно найти $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$ из условия $\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_3 = 0$: $c_1 + c_1 + c_2 = 0$, и при $c_1 = -1$ получаем $c_2 = 2$, т.е. тот же (с точность до коэффициента) вектор $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Можно найти $\boldsymbol{x}_3$ также как векторное произведение векторов $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$: $\boldsymbol{x}_3 = [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.