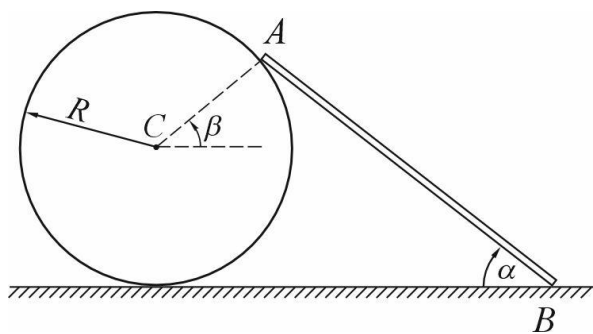


C1 (7 баллов)



Однородные диск и тонкий стержень покоятся, касаясь друг друга и горизонтальной поверхности. Коэффициенты трения скольжения во всех точках контакта одинаковые.

Определить минимальное значение этого коэффициента, если угол $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Трением качения пренебречь.

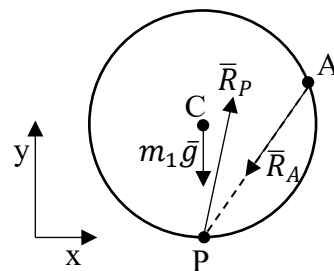
1. Геометрический способ.

Воспользуемся физическим смыслом коэффициента трения как тангенса угла между реакцией в точке контакта и местной нормалью к поверхности $f = \text{tg}(\angle(\bar{R}, \bar{n}))$.

- 1) Рассмотрим отдельно диск: система сил $\{m_1\bar{g}, \bar{R}_P, \bar{R}_A\} \sim \{0\}$

$m_1\bar{g}$ сведем по линии в точку P, тогда две силы в точках A и P должны иметь общую линию действия: $\bar{R}_A \parallel \overline{AP} \parallel (\bar{R}_P + m\bar{g})$

Т.к. $\triangle ACP$ равнобедренный, то угол при точке A равен 30°
 $\angle(\bar{R}_A, \overline{AC}) = \angle(\bar{R}_A, \bar{n}) = 30^\circ \Rightarrow f_A = \text{tg } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$



- 2) $(\bar{R}_P + m\bar{g}) \parallel \overline{AP} \Rightarrow \frac{[\bar{R}_P + m\bar{g}]_x}{[\bar{R}_P + m\bar{g}]_y} = \text{tg } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$[\bar{R}_P + m\bar{g}]_x = R_P^x;$$

$$[\bar{R}_P + m\bar{g}]_y = R_P^y - mg < R_P^y$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{R_P^x}{R_P^y - mg} > \frac{R_P^x}{R_P^y} = \text{tg}(\angle(\bar{R}_P, \bar{n})) = f_P \Rightarrow f_P < \frac{1}{\sqrt{3}} = f_A.$$

- 3) Рассмотрим отдельно равновесие стержня:

Система сил $\{\bar{R}'_A, m_2\bar{g}, \bar{R}_B\} \sim \{0\}$.

$\bar{R}'_A \perp \overline{AB}$ т.к. $\angle CAB = 120^\circ$, $\angle(\bar{R}_A, \overline{AC}) = 30^\circ$.

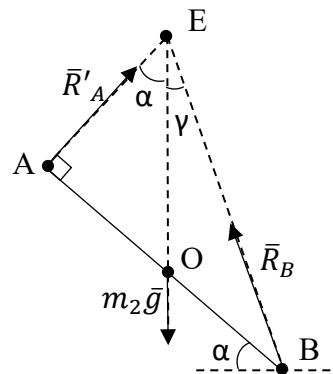
По теореме о трёх силах: линии $\bar{R}'_A, m_2\bar{g}$ и \bar{R}_B сходятся в точке E.
 $\angle AEO = \alpha$; $\angle BEO = \gamma$, $\text{tg } \gamma = f_B$.

Докажем, что $\gamma < \alpha$:

EO – медиана $\triangle AEB \Rightarrow S_{AEO} = AE \cdot EO \cdot \sin \alpha = S_{BEO} = BE \cdot EO \cdot \sin \gamma$
 $AE < BE$ как катет и гипотенуза $\Rightarrow \sin \alpha > \sin \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$.

$$\text{Отсюда } f_B = \text{tg } \gamma < \text{tg } \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = f_A$$

$$\text{Ответ: } f_{\min}^{ck} = f_A = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



2. Аналитический способ

Аналитический способ решения более громоздкий и предполагает решение системы из 5-6 уравнений равновесия. Принцип возможных перемещений не дает явного преимущества при решении задачи, поскольку система имеет 3 степени свободы и требует вычисления работ трех неидеальных связей. Дополнительно при решении нужно учесть геометрические ограничения, вытекающие из условия соприкосновения: $l \cdot \sin \alpha = R + R \cdot \cos \beta \Rightarrow l = 3R$.

Далее см. на обороте:

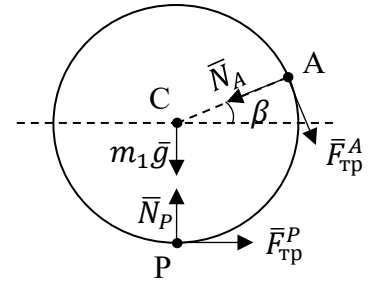
Можно предложить следующие 5 уравнений:

- 1) Отдельно для диска вычисляем сумму моментов относительно точки P:

$$\sum M_P = 0$$

$$N_A R \cos \beta = F_{\text{тр}}^A (R \sin \beta + R)$$

$$f_A = \frac{F_{\text{тр}}^A}{N_A} = \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

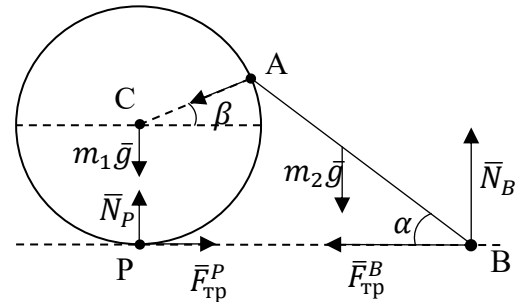


- 2) Для всей системы вычисляем сумму моментов относительно точки P:

$$\sum M_P = 0$$

$$N_B (l \cos \alpha + R \cos \beta) = m_2 g \left(\frac{l}{2} \cos \alpha + R \cos \beta \right)$$

$$N_B = \frac{m_2 g \left(\frac{l}{2} + R \right)}{l + R} = \frac{5}{8} m_2 g$$



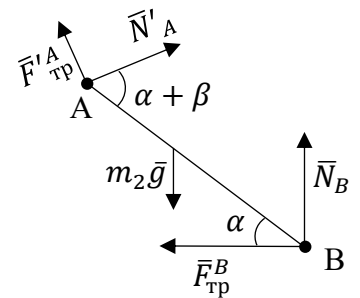
- 3) Отдельно для стержня вычисляем сумму моментов относительно точки A.

$$\sum M_A = 0$$

$$N_B l \cos \alpha - m_2 g \frac{l}{2} \cos \alpha - f_B N_B l \sin \alpha = 0$$

$$f_B = \text{ctg} \alpha - \frac{m_2 g}{2 N_B} \text{ctg} \alpha$$

$$\text{Из 2): } f_B = \sqrt{3} \left[1 - \frac{m_2 g (l+R)}{2 m_2 g \left(\frac{l}{2} + R \right)} \right] = \sqrt{3} \left(1 - \frac{l+R}{l+2R} \right) = \sqrt{3} \left(1 - \frac{4}{5} \right) = \frac{\sqrt{3}}{5}$$



- 4) Для всей системы вычисляем сумму моментов относительно точки B.

$$\sum M_B = 0$$

$$(m_1 g - N_P) (R \cos \beta + l \cos \alpha) + m_2 g \frac{1}{2} \cos \alpha = 0$$

$$N_P = g \left(\frac{3}{8} m_2 + m_1 \right)$$

- 5) Отдельно для диска вычисляем сумму моментов относительно точки A.

$$\sum M_A = 0$$

$$(m_1 g - N_P) R \cos \beta + f_P N_P (R + R \sin \beta) = 0$$

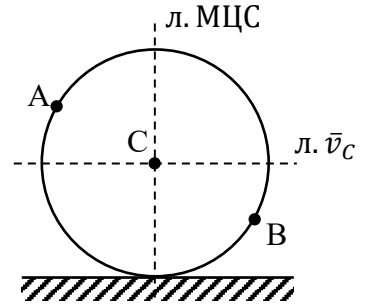
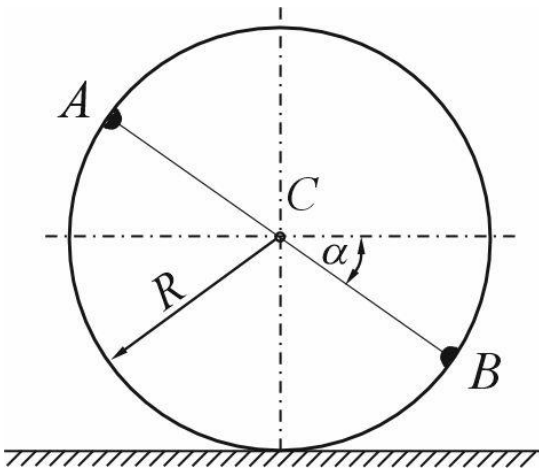
$$f_P = \frac{(N_P - m_1 g) \frac{\sqrt{3}}{2} R}{N_P \cdot \frac{3}{2} R} = \frac{m_1 g + \frac{3}{8} m_2 g - m_1 g}{\sqrt{3} g \left(m_1 + \frac{3}{8} m_2 \right)} = \frac{\frac{3}{8} m_2}{m_1 + \frac{3}{8} m_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Ответ: } f_{\text{ск}}^{\text{min}} = \max\{f_A, f_B, f_P\} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

К1 (10 баллов)

Диск радиуса R катится по горизонтальной поверхности. Точки A и B лежат на концах диаметра, находящегося под углом $\alpha=45^\circ$ к поверхности. В данный момент $v_B = \sqrt{2} \cdot v_A$.

Определить в текущем положении высоту МЦС диска над уровнем поверхности, если известно, что он находится вне диска.



- 1) Линия \bar{v}_C параллельна неподвижной поверхности. МЦС лежит на перпендикуляре к ней, проходящем через точку C .
 $v_A < v_B \Rightarrow \rho(A, P) < \rho(B, P) \Rightarrow P$ находится выше C

- 2) Кинематический метод.

Пусть, для определенности, угловая скорость направлена против часовой стрелки. (не влияет на решение задачи так как v_{CP} , v_{AC} и v_{BC} вместе изменяют направление при смене направления вращения)

$$\begin{aligned} \bar{v}_A &= \bar{v}_C + \bar{v}_{AC} \\ \bar{v}_B &= \bar{v}_C + \bar{v}_{BC} \\ v_A^2 &= v_C^2 + v_{AC}^2 + 2\bar{v}_C \cdot \bar{v}_{AC} \\ v_B^2 &= v_C^2 + v_{BC}^2 + 2\bar{v}_C \cdot \bar{v}_{BC} \\ v_{AC}^2 &= \omega^2 R^2 = v_{BC}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} v_A^2 = v_C^2 + \omega^2 R^2 - \sqrt{2}v_C\omega R \\ v_B^2 = v_C^2 + \omega^2 R^2 + \sqrt{2}v_C\omega R \end{cases} : \omega^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{v_A^2}{\omega^2} = PC^2 + R^2 - \sqrt{2}PC \cdot R \\ \frac{v_B^2}{\omega^2} = PC^2 + R^2 + \sqrt{2}PC \cdot R \end{cases}$$

$$\frac{v_B^2}{v_A^2} = 2 = \frac{\frac{v_B^2}{\omega^2}}{\frac{v_A^2}{\omega^2}} = \frac{PC^2 + R^2 + \sqrt{2}PC \cdot R}{PC^2 + R^2 - \sqrt{2}PC \cdot R} \Rightarrow PC^2 + R^2 - 3\sqrt{2}PC \cdot R = 0$$

$$PC_{1,2} = \frac{3\sqrt{2}R \pm \sqrt{18R^2 - 4R^2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}R \pm \frac{\sqrt{14}}{2}R$$

$$PC_2 = \frac{R}{2}(\sqrt{18} - \sqrt{14}) < R \Rightarrow y(P) = R + PC_1 = R + \frac{R}{2}(\sqrt{18} + \sqrt{14})$$

- 3) Геометрический метод.

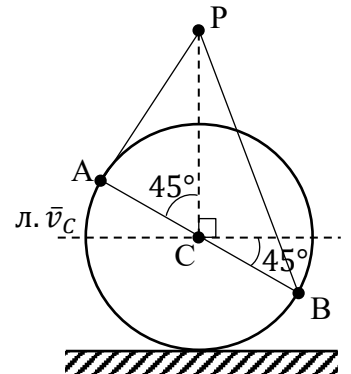
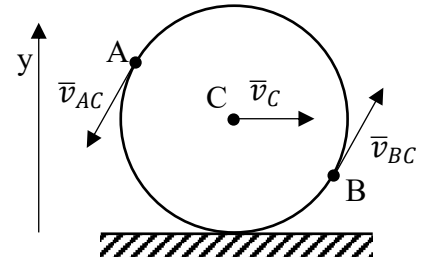
$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{PB}{PA} = \sqrt{2}$$

По теореме косинусов для ΔAPC и ΔBPC

$$AP^2 = PC^2 + R^2 - 2R \cdot PC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

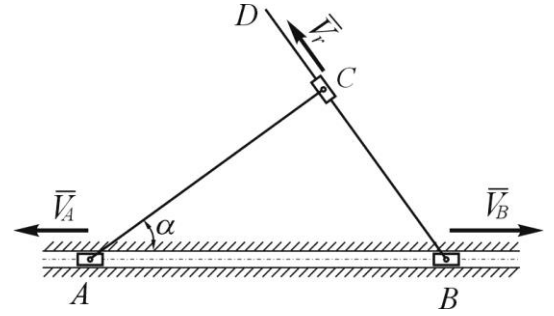
$$BP^2 = PC^2 + R^2 + 2R \cdot PC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решение системы идентично кинематическому методу.



К2 (8 баллов)

Ползуны на концах стержней AC и BD в точках A и B скользят вдоль одной направляющей с постоянными скоростями $V_A = 1 \text{ м/с}$ и $V_B = 3 \text{ м/с}$. Ползун C на конце стержня AC движется вдоль стержня BD с постоянной относительной скоростью $V_r = 5 \text{ м/с}$.



Определить угловые скорости и угловые ускорения стержней в тот момент, когда стержни перпендикулярны друг другу, а наклон стержня AC к горизонтальной направляющей равен $\alpha = 30^\circ$. $AC = 3 \text{ м}$.

Запишем скорость точки C стержня AC и геометрически совпадающий с ней точки C' стержня BD .

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \vec{v}_A + \vec{v}_{CA} \\ \vec{v}_{C'} &= \vec{v}_B + \vec{v}_{C'B} \end{aligned}$$

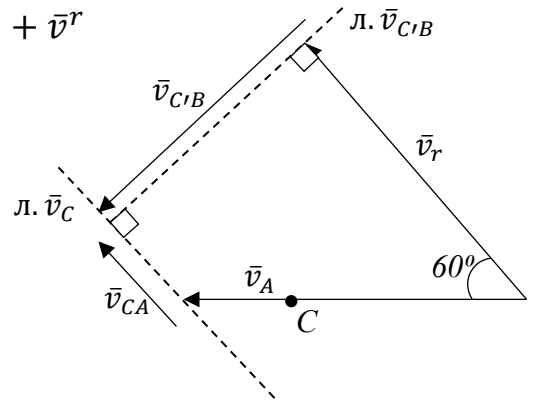
Свяжем подвижную систему отсчёта с телом BD и рассмотрим движение точки C как сложное.

$$\vec{v}_A + \vec{v}_{CA} = \vec{v}_B + \vec{v}_{C'B} + \vec{v}^r$$

Из многоугольника скоростей:

$$\begin{aligned} v_{C'B} &= (v_A + v_B) \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \text{ м/с} \\ v_{CA} &= v_r - (v_A + v_B) \sin 30^\circ = 3 \text{ м/с} \end{aligned}$$

$$\omega_{AC} = \frac{v_{CA}}{AC} = 1 \frac{1}{c}, \quad \omega_{BD} = \frac{v_{C'B}}{C'B} = \frac{2\sqrt{3}}{AC \cdot \tan \alpha}, \quad \omega_{BD} = 2 \frac{1}{c}$$



Рассмотрим ускорения точек C и C' в плоском движении их тел, а также ускорение точки C в ее сложном движении:

$$\begin{aligned} \vec{a}_C &= \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^\tau + \vec{a}_{CA}^n & \vec{a}_{C'} &= \vec{a}_B + \vec{a}_{C'B}^\tau + \vec{a}_{C'B}^n \\ \vec{a}_C &= \vec{a}^e + \vec{a}^r + \vec{a}^k & \vec{a}^e &= \vec{a}_{C'} \end{aligned}$$

Учтем, что ускорение точек A и B равно нулю. А также, равно нулю относительное ускорение точки C .

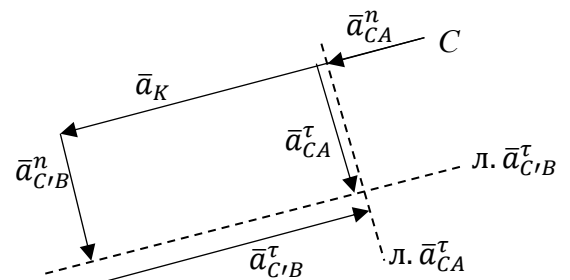
$$\vec{a}_{CA}^\tau + \vec{a}_{CA}^n = \vec{a}_{C'B}^\tau + \vec{a}_{C'B}^n + \vec{a}^k$$

$$a_{CA}^n = \omega_{AC}^2 AC = 3 \text{ м/с}^2; \quad a_{C'B}^n = \omega_{BD}^2 BC' = 4\sqrt{3} \text{ м/с}^2; \quad a_k = 2\omega_{BD} v_r = 20 \text{ м/с}^2$$

Из многоугольника ускорений:

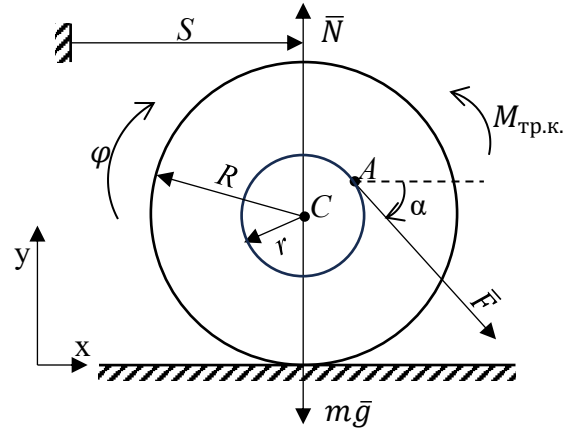
$$\begin{aligned} a_{CA}^\tau &= a_{C'B}^n = 4\sqrt{3} \text{ м/с}^2 \\ a_{C'B}^\tau &= a_k - a_{CA}^n = 17 \text{ м/с}^2 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{AC} = \frac{a_{CA}^\tau}{AC} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{c^2}, \quad \varepsilon_{BD} = \frac{a_{C'B}^\tau}{AC \cdot \tan \alpha} = \frac{17\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{c^2}$$



Д1 (7 баллов)

Двухступенчатый каток массы m начинает движение по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы F , направленной вдоль троса, сходящего с поверхности катка под постоянным углом α . Определить зависимость скорости центра катка от его перемещения $v_c(s)$, предполагая, что движение начинается из состояния покоя, а качение происходит без проскальзывания. Радиус инерции катка относительно оси, проходящей через его центр – ρ . Коэффициент трения качения равен δ .



1) Рассмотрим теорему об изменении количества движения в проекции на ось Y.

$$\begin{aligned} m a_C^y &= 0 = N - mg - F \sin \alpha \\ N &= mg + F \sin \alpha \\ M_{\text{тр.к.}} &= \delta N = \delta (mg + F \sin \alpha) \end{aligned}$$

2) Рассмотрим теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме.

$$\begin{aligned} T_K - T_H &= \sum A(\vec{F}), \quad T_H = 0, \\ T_K &= \frac{m v_C^2}{2} + \frac{I_{CZ} \omega^2}{2} \quad \begin{cases} I_{CZ} = m \rho^2 \\ \omega^2 = \frac{v_C^2}{R^2} \end{cases} \\ T_K &= \frac{m}{2} v_C^2 \left[1 + \frac{\rho^2}{R^2} \right] \end{aligned}$$

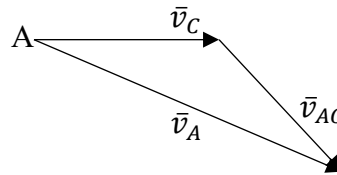
3) Определяем работу сил

Работу совершают только сила F и момент трения качения.

$$M_{\text{тр.к.}} = \text{const} \Rightarrow A(M_{\text{тр.к.}}) = \int_0^{\varphi_k} (-\delta N) d\varphi = -\delta (mg + F \sin \alpha) \frac{S}{R}, \quad \varphi = \frac{S}{R}$$

Рассмотрим элементарное перемещение точки A.

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{v}_C + \vec{v}_{AC} \Rightarrow d\vec{r}_A = d\vec{r}_C + \vec{v}_{AC} dt \\ v_{AC} dt &= r \dot{\varphi} dt = r d\varphi \\ \vec{v}_{AC} &\parallel \vec{F} \end{aligned}$$



Элементарная работа силы F не зависит от текущего перемещения и может быть посчитана интегрально.

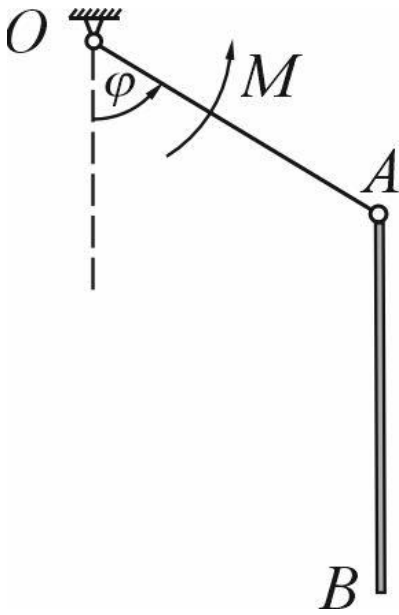
$$d'A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r}_A = F dS \cdot \cos \alpha + F r d\varphi = F dS \left(\cos \alpha + \frac{r}{R} \right)$$

Тогда после подстановки в теорему об изменении кинетической энергии:

$$\frac{m v_C^2}{2} \left[1 + \frac{\rho^2}{R^2} \right] - 0 = \left[F \left(\cos \alpha + \frac{r}{R} \right) - \frac{\delta}{R} (mg + F \sin \alpha) \right] S$$

$$v_C = \sqrt{\frac{2S}{m} \left[F \left(\cos \alpha + \frac{r}{R} \right) - \frac{\delta}{R} (mg + F \sin \alpha) \right]} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + \rho^2}}$$

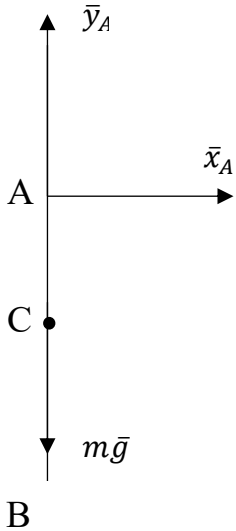
Д2 (10 баллов)



Система, состоящая из невесомого стержня OA длины l и однородного стержня AB массы m , приводится в движение парой сил с моментом M из вертикального нижнего положения. Начальная угловая скорость стержня OA : $\omega_{OA} = \omega_0$. Начальная угловая скорость стержня AB равна 0 . Определить зависимость момента пары сил от угла поворота стержня OA : $M(\varphi)$, если момент постоянно обеспечивает поступательное движение стержня AB .

Решение: Задача может быть решена разными способами. Механическая система имеет две степени свободы, и в общем, решение потребует записи как минимум двух общих теорем динамики (или уравнений Лагранжа).

На первом этапе определим уравнение изменения угла φ , записав уравнения движения для AB .



Из условия $\omega_{AB} \equiv 0$ следует, что

$$1) \frac{dK_{Cz}}{dt} = I_{Cz} \varepsilon_z = 0 \Rightarrow \sum M_{Cz}(\bar{F}^{(e)}) = 0 \Rightarrow |\bar{X}_A| = 0$$

$$2) \frac{dQ_x}{dt} = \dot{x}_A = 0 \Rightarrow Q_x = const$$

$$3) Q_x = mv_C^x = mv_A^x = m \frac{d}{dt}(OA \sin \varphi) = mOA \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$4) Q_x = Q_x^0 \Rightarrow \dot{\varphi} \cos \varphi = \omega_0$$

На втором этапе определим значение момента, соответствующего подобным изменения угла поворота стержня OA . Запишем для всей системы теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.

$$5) dT = \sum d'A, \quad T = T_{OA} + T_{AB} = 0 + \frac{mv_A^2}{2} = \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2}, \quad v_A = l\dot{\varphi}$$

$$d'A(M) = Md\varphi,$$

$$d'A(m\bar{g}) = -mgdy_C = -mgdy_A = -mgd(-l \cos \varphi) = -mgl \sin \varphi d\varphi$$

$$6) dT = ml^2 \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = (M - mgl \sin \varphi) d\varphi, \quad M = ml^2 \dot{\varphi} \cdot \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} + mgl \sin \varphi$$

Из 4) определяем, что $\dot{\varphi} = \frac{\omega_0}{\cos \varphi}$; $\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{\omega_0 \cdot \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$.

$$\text{Тогда } M = \frac{ml^2 \omega_0^2 \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} + mgl \sin \varphi = ml \sin \varphi \left(g + \frac{\omega_0^2 l}{\cos^3 \varphi} \right)$$