

Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана

В.С. Зарубин, Г.Е. Маркелов

**ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАМ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Учебное пособие

Москва
Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана
2010

УДК 517.1
ББК 30в6
3-35

Рецензенты: *О.С. Мажорова, С.Б. Ткачев*

Зарубин В.С., Маркелов Г.Е.

3-35 Лекции по основам математического
моделирования: Учебное пособие. — М.: Изд-во
МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2010. — с.,
ил. 107. табл. 7. библиогр. 190 назв.

ISBN

В учебном пособии кратко излагается курс «Основы математического моделирования», читаемый в МГТУ им. Н.Э. Баумана. Оно посвящено применению математики к решению прикладных задач, возникающих в различных областях техники.

Учебное пособие предназначено для студентов технических университетов и может быть полезно аспирантам, инженерам и преподавателям.

Ил. 107. Табл. 7. Библиогр. 190 назв.

**УДК 517.1
ББК 30в6**

ISBN

© МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2010

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ТЕХНИКЕ

1.1. Математическое моделирование как основной способ исследования

С общих позиций математическое моделирование можно рассматривать как метод познания реального мира. Под математическим моделированием в технике понимают адекватную замену исследуемого технического устройства или процесса соответствующей математической моделью и ее последующее изучение известными методами.

Математическое моделирование как научное направление сформировалось в 70-х годах XX века. Его становление и развитие обусловлено появлением электронно-вычислительных машин (ЭВМ), используемых при изучении математической модели (ММ).

Так развитие сверхзвуковой авиации, возникновение ракетно-космической техники, и ряда быстро развивающихся наукоемких отраслей машиностроения и приборостроения привели к усложнению разрабатываемых и эксплуатируемых технических устройств и систем в 50-х годах XX века. Их экспериментальная отработка стала требовать все больших затрат времени и материальных ресурсов, а в ряде случаев ее проведение в полном объеме превратилось в проблему, не имеющую приемлемого решения. В этих условиях существенно возросло значение расчетно-теоретического анализа характеристик таких устройств и систем. Этому способствовал и прорыв в совершенствовании вычислительной техники, приведший к появлению ЭВМ с большим объемом памяти и высокой скоростью выполнения арифметических операций в 60-х годах XX века. В результате возникла материальная база для становления и быстрого развития математического моделирования, появились реальные предпосылки для использования вычислительного эксперимента не только в качестве расчетно-теоретического сопровождения на стадии отработки технического устройства, но и при его проектировании, подборе и оптимизации его эксплуатационных режимов, анализе его надежности и прогнозировании отказов и аварийных ситуаций, а также при оценке возможностей форсирования характеристик и модернизации технического устройства. Известны примеры математического моделирования условий, возникающих при автомобильных авариях и крупных техногенных катастрофах. Так на основе математической модели биосферы Земли составлен прогноз последствий ядерных взрывов при возможном военном конфликте, приводящих к так называемой “ядерной зиме”.

Изучение ММ с использованием средств вычислительной техники при помощи вычислительно-логических алгоритмов получило название вычислительного эксперимента, поскольку такое изучение ММ можно рассматривать как проведение эксперимента на ЭВМ. Термин “вычислительный эксперимент” часто используют как синоним термина “математическое моделирование”.

Отметим, что определенные предпосылки к широкому применению математического моделирования и вычислительного эксперимента в технике были созданы благодаря разработке методов аналогового моделирования. Основу большинства этих методов составляло использование электрических моделей-аналогов для исследования процессов в механических, тепловых и гидравлических системах. Это приводит к тому, что одна и та же ММ используется в различных предметных областях и возникает “родство” между различными отраслями знаний, приводящее к ускорению их совместного развития.

В настоящее время можно утверждать, что вычислительный эксперимент наряду с физическим и натурными экспериментами является основным способом исследования и получения новых знаний в различных областях естествознания.

Следует ожидать, что роль математического моделирования в дальнейшем будет возрастать, хотя оно не заменит физический или натурный эксперимент, так как опыт всегда останется основой исследования. Активное использование математического моделирования в различных областях человеческой деятельности обусловлено многими причинами, основными среди которых являются следующие:

- усложнение исследований, для которых необходимо использовать сложные экспериментальные установки или модельные объекты;
- большие финансовые, энергетические и другие затраты на обслуживание экспериментов;

- необходимость решения экологических, социальных и других сопутствующих исследованию проблем;
- невозможность проведения физического или натурного эксперимента в ряде областей исследования.

К перечисленным выше причинам активного использования математического моделирования следует добавить возможность сокращения сроков исследования, а также возможность их многократного и быстрого повторения, уточнения и хранения результатов исследования и т.п.

Практическая реализация возможностей математического моделирования и вычислительного эксперимента существенно повышает эффективность инженерных разработок особенно при создании принципиально новых, не имеющих прототипов машин и приборов, материалов и технологий, что позволяет сократить затраты времени и средств на использование в технике передовых достижений физики, химии, механики и других фундаментальных наук. Использование математического моделирования позволяет повысить производительность труда и уменьшить влияние субъективного “человеческого фактора” при принятии решений.

Таким образом, математическое моделирование становится основным способом исследования и получения новых знаний. Поэтому дисциплина “Основы математического моделирования” является одной из основных при подготовке инженеров-математиков по специальности “Прикладная математика”. Можно сказать, что математическое моделирование — это то, чем занимаются прикладные математики.

Возможности, которые открывает математическое моделирование, являются перспективными и заслуживают детального рассмотрения.

1.2. Основные этапы математического моделирования

Для рассмотрения основных этапов математического моделирования целесообразно предварительно рассмотреть условную схему (рис. 1), определяющую последовательность проведения этих этапов.

Исходной позицией любого исследования является объект исследования — носитель неизвестных свойств и качеств, подлежащих изучению. Он выбирается согласно целям и задачам исследования. Далее под объектом исследования будем понимать *технический объект* (ТО), т.е. техническое устройство, его узел¹, агрегат² или систему³ устройств, процесс, явление или отдельную ситуацию в устройстве или системе.

На **первом этапе** осуществляют неформальный переход от рассматриваемого (разрабатываемого или существующего) ТО к его *расчетной схеме* (РС). Под РС следует понимать условное описание ТО, которое должно учитывать особенности и количественные характеристики объекта, существенные для рассматриваемого случая. При этом обосновывают допущения и упрощения, позволяющие не учитывать в РС те особенности ТО, влияние которых предполагают несущественным. Иногда вместо РС используют термин *содержательная модель* ТО, а в некоторых случаях — *концептуальная модель*.

Успешное проведение первого этапа в значительной мере зависит от профессионального уровня инженера, его творческого потенциала и интуиции. Полнота и правильность учета в РС свойств ТО, существенных с точки зрения поставленной цели исследования, являются основной предпосылкой получения в дальнейшем достоверных результатов математического моделирования.

¹ Узел — часть машины, механизма, установки и т.п., которая состоит из нескольких более простых элементов (деталей).

² Агрегат — несколько машин, механизмов, работающих в комплексе (от латинского слова *aggrego* — присоединяю).

³ Система — множество элементов, находящихся в отношениях, связанных друг с другом, образующих некоторую целостность (от греческого слова *sysntema* — целое, составленное из частей; соединение).

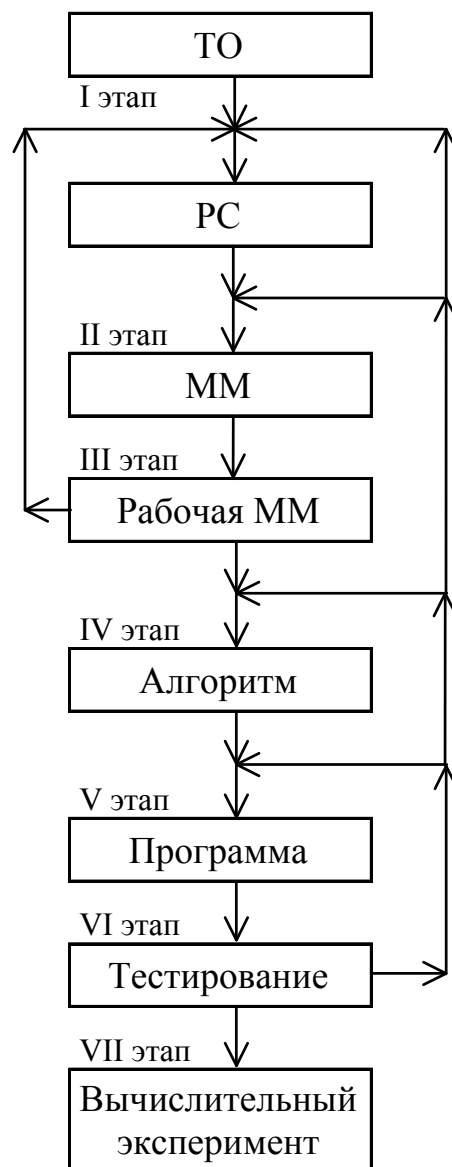


Рис. 1. Условная схема взаимосвязи этапов математического моделирования

Содержание **второго этапа** состоит, по существу, в формальном, математическом описании РС. Это описание в виде совокупности математических понятий и соотношений, выраженных при помощи системы математических символов и обозначений и устанавливающих связь между параметрами, характеризующими РС ТО, и называют *математической моделью* (ММ).

Надо сказать, что для некоторых типовых РС существуют банки ММ, что упрощает проведение второго этапа. Более того, одна и та же ММ может соответствовать РС из различных предметных областей, т.е. ММ обладает свойством *универсальности*.

В большинстве случаев полезно построить упрощенный вариант ММ, который позволял бы получить точное решение или привлечь известное решение. Это решение затем можно использовать для сравнения при тестировании результатов на последующих этапах.

На **третьем этапе** проводят качественный и оценочный количественный анализ построенной ММ. При этом могут быть выявлены противоречия, ликвидация которых потребует уточнения или пересмотра РС.

В некоторых случаях удастся построить несколько ММ для одного и того же ТО, отличающихся уровнем упрощения. В этом случае говорят об иерархии ММ. Сравнение результатов исследования различных ММ может существенно расширить представления об этом ТО. Кроме

того, такое сравнение позволяет наилучшим образом выбрать рабочий вариант ММ для детального количественного анализа.

Итог анализа на рассматриваемом этапе — это обоснованный выбор рабочей ММ.

На **четвертом этапе** формулируют вычислительную задачу, анализируя результаты решения которой можно получить ответы на интересующие вопросы, осуществляют обоснованный выбор или построение численного метода.

Как правило, численный метод содержит только принципиальную схему решения вычислительной задачи, не включающую многие детали, без которых становится невозможным использование средств вычислительной техники для реализации этого метода. Тут необходима подробная детализация всех этапов вычислений, для того чтобы получить реализуемый алгоритм вычислительного эксперимента.

Разработка эффективного алгоритма вычислительного эксперимента является итогом четвертого этапа математического моделирования.

Пятый этап математического моделирования состоит в создании работоспособной программы, реализующей этот алгоритм средствами вычислительной техники.

Получаемые на **шестом этапе** (в итоге работы программы) результаты вычислений должны прежде всего пройти тестирование. Тестирование может выявить недочеты как в программе, так и в алгоритме и потребовать доработки программы или же модификации и алгоритма и программы. Анализ результатов вычислений и их инженерная интерпретация могут вызвать необходимость корректировки РС и соответствующей ММ.

После устранения всех выявленных недочетов приступают к проведению вычислительного эксперимента, что составляет содержание завершающего **седьмого этапа** математического моделирования. Результаты вычислительного эксперимента справедливы при тех же условиях, при которых адекватна рабочая ММ. В связи с этим обоснование достоверности полученных результатов может привести к необходимости изменения РС и соответствующей ММ.

Итогом выполнения седьмого этапа является достижение поставленных целей и решение задач исследования.

Представленная последовательность этапов имеет общий и универсальный характер, хотя в некоторых конкретных случаях она может и несколько видоизменяться.

1.3. Математические модели в инженерных дисциплинах

Осуществление отдельных этапов математического моделирования, рассмотренных выше, требует определенных знаний, навыков и практической подготовки. Если первый, седьмой и частично шестой этапы применительно к моделированию ТО типичны для инженера, то второй, третий и четвертый этапы предполагают наличие серьезной математической подготовки, а пятый – навыков в разработке и отладке ЭВМ-программ. Поэтому к математическому моделированию сложных ТО приходится привлекать и инженеров, и математиков, и программистов. Однако для координации их усилий необходимы специалисты, способные осуществить каждый из рассмотренных этапов на высоком профессиональном уровне.

Подготовка таких специалистов составляет одну из ключевых проблем, от успешного решения которой зависит эффективное использование возможностей математического моделирования при создании технических устройств и их систем. Решение этой проблемы, вероятно, по силам ряду созданных в последние годы технических университетов.

Успех в решении указанной проблемы в значительной степени зависит от укрепления междисциплинарных связей между курсами высшей математики, физики, теоретической механики, химии, информатики и инженерными дисциплинами. Связующим звеном при этом могут быть ММ явлений и процессов, являющихся предметом изучения в дисциплинах естественнонаучного цикла и лежащих в основе функционирования ТО в конкретных областях техники. Эта связь может обеспечить методическое единство и преемственность циклов математической, естественнонаучной и специальной подготовки будущего инженера.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

Из последовательности основных этапов математического моделирования следует, что определяющую роль в нем играет ММ изучаемого ТО. Поэтому далее рассмотрим вопросы, связанные с понятием ММ и ее структурой. Затем уделим внимание основным свойствам ММ и требованиям к ней, а также классификации ММ.

2.1. Понятие математической модели

В широком смысле под термином “математическая модель” понимают совокупность математических понятий и соотношений, выраженных при помощи системы математических символов и обозначений и отражающих некоторые свойства изучаемого объекта.

Реальный ТО может иметь несколько ММ. Это, прежде всего, связано с необходимостью рассмотрения различных РС, отличающихся различным уровнем упрощения.

Но даже принципиально разные ММ рассматриваемого объекта могут появляться при рассмотрении одной и той же РС. Так, например, известно, что процесс продольных свободных колебаний линейно упругого стержня описывается одномерным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $u(t, x)$ — продольное смещение в момент времени t поперечного сечения с координатой x от своего положения равновесия; $a = \sqrt{E/\rho}$; E — модуль упругости материала стержня (модуль Юнга); ρ — плотность материала стержня.

Заменим стержень длиной l дискретной системой, состоящей из n материальных точек массы m , последовательно расположенных с некоторым шагом $h = l/n$ и соединенных невесомыми пружинами жесткостью c . В качестве m естественно взять массу соответствующего элемента стержня, т.е. $m = \rho Sh$, где S — площадь поперечного сечения стержня. Жесткость c выберем такой, чтобы в обеих моделях относительному удлинению ε отвечала одинаковая величина P упругой силы. Тогда в соответствии с законом Гука запишем равенство

$$P = \varepsilon ES = \varepsilon hc,$$

откуда $c = ES/h$.

Применяя к каждой материальной точке второй закон Ньютона, получим систему ОДУ

$$\begin{cases} m \frac{d^2 u_1}{dt^2} = c(u_2 - u_1), \\ m \frac{d^2 u_i}{dt^2} = c(u_{i+1} - u_i) - c(u_i - u_{i-1}), \quad 1 < i < n, \\ m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -c(u_n - u_{n-1}), \end{cases}$$

где $u_i(t)$ — продольное смещение i -ой материальной точки от своего положения равновесия в момент времени t . Эта система уравнений после простых преобразований приобретает вид

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_1}{dt^2} = a^2 \frac{u_2 - u_1}{h^2}, \\ \frac{d^2 u_i}{dt^2} = a^2 \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, \quad 1 < i < n, \\ \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -a^2 \frac{u_n - u_{n-1}}{h^2}. \end{cases}$$

Таким образом, приходим к системе ОДУ, которая также описывает процесс продольных свободных колебаний линейно упругого стержня.

Для сложного ТО сравнение результатов исследования, полученных с использованием различных ММ, может обогатить познание о нем, а также повысить достоверность полученных результатов.

Одни и те же ММ могут использоваться в различных приложениях. Действительно, рассмотрим модель, которая содержит уравнение Лапласа

$$\Delta u(M) = 0,$$

где Δ — дифференциальный оператор Лапласа, а $u(M)$ — искомая функция положения точки M в некоторой области. С использованием такой ММ можно изучать установившиеся процессы потенциального течения несжимаемой жидкости и распространения теплоты при отсутствии тепловых источников и стоков, распространение какой-либо примеси в воздухе при отсутствии источников и стоков примеси. В каждой из перечисленных задач функция $u(M)$ приобретает свой смысл. Так в случае установившегося потенциального течения несжимаемой жидкости функция $u(M)$ является потенциалом скорости, т.е. $\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} u$. В случае установившегося процесса распространения теплоты в материале под $u(M)$ следует понимать температуру материала в точке M , а в случае установившегося процесса распространения какой-либо примеси в воздухе — концентрацию примеси в точке M рассматриваемого объема.

2.2. Структура математической модели

При изучении ТО следует выделять внешние, внутренние и выходные параметры, под которыми подразумевают следующее. Параметры внешние — совокупность величин, характеризующих влияние на функционирование ТО внешних условий и других объектов. Параметры внутренние — совокупность величин, характеризующих свойства рассматриваемого ТО и составляющих его элементов. Параметры выходные — совокупность величин, характеризующих воздействие ТО на другие объекты.

Одни и те же физические, механические или другие характеристики ТО могут играть роль как внешних или внутренних, так и выходных параметров. Например, сила электрического тока, протекающего через резистор, может выступать в роли внешнего параметра, а падение электрического напряжения на резисторе будет его выходным параметром, или, наоборот, в зависимости от электрической цепи, в которой используется резистор.

При создании ТО значения выходных параметров, диапазоны их возможного изменения оговаривают в техническом задании на разработку ТО, тогда как внешние параметры характеризуют условия его функционирования.

В сравнительно простом случае ММ объекта может представлять собой соотношения

$$\begin{aligned} z_1 &= f_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m); \\ z_2 &= f_2(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m); \\ &\dots \dots \\ z_n &= f_n(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m), \end{aligned}$$

где $x_1, \dots, x_k$ — внешние параметры; $y_1, \dots, y_m$ — внутренние параметры; $z_1, \dots, z_n$ — выходные параметры. В этом случае легко вычислять выходные параметры по задаваемым значениям внешних и внутренних параметров, т.е. решать так называемую прямую задачу. В инженерной практике решение прямой задачи часто называют поверочным расчетом.

При создании ТО возникает необходимость решать более сложную так называемую обратную задачу, т.е. по значениям внешних и выходных параметров, которые определены в техническом задании на проектирование ТО, найти его внутренние параметры. В инженерной практике решению обратной задачи соответствует так называемый проектировочный расчет.

Обычно при построении ММ заранее неизвестна взаимосвязь между внешними, внутренними и выходными параметрами. И такую взаимосвязь предстоит установить. Это наиболее сложная так называемая задача идентификации (от латинского слова *identifico* — отождествляю, которому в данном случае придают смысл “распознаю”). Задача идентификации может быть решена путем математической обработки информации о ряде таких состояний ТО, для каждого из кото-

рых известны (например, измерены экспериментально) значения выходных, внутренних и внешних параметров. Один из таких способов связан с применением регрессионного анализа. Если информация о внутренних параметрах отсутствует или же внутреннее устройство рассматриваемого объекта слишком сложно, то ММ такого ТО строят по принципу черного ящика, т.е. устанавливают зависимости между внешними и выходными параметрами путем исследования реакции ТО на внешние воздействия.

2.3. Свойства математических моделей

Использование модели будет эффективным, если она обладает определенными свойствами. Рассмотрим основные из этих свойств.

Полнота ММ позволяет в достаточной мере отразить именно те характеристики и особенности ТО, которые представляют интерес с точки зрения поставленной цели математического моделирования.

Например, модель может достаточно полно описывать протекающие в объекте процессы, но не отражать его габаритные, массовые или стоимостные показатели. Так, ММ резистора может быть представлена в виде хорошо известной формулы

$$U = IR$$

закона Ома, где U и I — падение электрического напряжения на резисторе и сила тока соответственно; R — сопротивление резистора. Такая модель обладает свойством полноты лишь с точки зрения установления связи между падением электрического напряжения U на резисторе, его сопротивлением R и протекающим через него током силой I , но не дает никакой информации о размерах, массе, стоимости и других характеристиках резистора, по отношению к которым она не является полной.

Точность ММ обеспечивает приемлемое совпадение значений выходных параметров ТО и значений этих параметров, найденных с использованием ММ. Пусть $z_1, \dots, z_n$ — значения выходных параметров ТО, найденные с использованием ММ, например, в результате проведения вычислительного эксперимента, а $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$ — истинные значения выходных параметров, найденные при фиксированных внешних и внутренних параметрах рассматриваемого ТО. Тогда относительная погрешность значения i -го выходного параметра будет равна

$$\varepsilon_i = \left| \frac{\tilde{z}_i - z_i}{\tilde{z}_i} \right|, \text{ где } i = 1, 2, \dots, n.$$

В качестве количественной характеристики точности модели можно принять какую-либо норму вектора $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, например

$$\varepsilon = \max_{1 \leq i \leq n} |\varepsilon_i| \quad \text{или} \quad \varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}.$$

Поскольку выходные параметры ТО связаны с его внешними и внутренними параметрами, то ε , как количественная характеристика точности модели этого ТО, будет в общем случае зависеть от этих параметров.

Адекватность ММ. В общем случае под этим свойством понимают правильное качественное и достаточно точное количественное описание именно тех характеристик ТО, которые важны при проведении математического моделирования. Модель, адекватная при выборе одних характеристик, может быть неадекватной при выборе других характеристик того же ТО.

В технике под адекватностью ММ обычно понимают способность описывать характеристики ТО, которые важны при проведении исследования, с относительной погрешностью не более заданного значения δ . Тогда при фиксированных значениях внутренних параметров можно построить множество

$$X = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \varepsilon \leq \delta\},$$

где ε является количественной характеристикой точности модели рассматриваемого ТО. Множество упорядоченных значений внешних параметров $x_1, \dots, x_k$, для которых при фиксированных значениях его внутренних параметров ММ обеспечивает описание выходных параметров с относительной погрешностью не более заданного значения δ называют *областью адекватности* ММ. Чем больше δ , тем шире область адекватности ММ, т.е. такая ММ применима в более широком диапазоне возможного изменения внешних параметров ТО.

В ряде прикладных областей, еще недостаточно подготовленных к применению количественных математических методов, под адекватностью ММ естественно понимать лишь правильное качественное описание поведения изучаемых объектов или их систем. Эта ситуация типична, например, для биологической и социальной сфер, в которых количественные закономерности еще не всегда поддаются строгой математической формализации.

Экономичность ММ оценивают затратами на ресурсы, необходимые для изучения ММ, например, это свойство ММ не требовать при проведении вычислительного эксперимента больших затрат машинного времени и памяти. Очевидно, что требования экономичности, высокой точности и достаточно широкой области адекватности ММ противоречивы и на практике могут быть удовлетворены лишь на основе разумного компромисса. Свойство экономичности ММ часто связывают с ее простотой.

Робастность ММ (от английского слова robust — крепкий, устойчивый) характеризует ее устойчивость по отношению к погрешностям исходных данных и способность не допускать их чрезмерного влияния на результаты вычислительного эксперимента.

Причинами низкой робастности ММ могут быть необходимость вычитания близких друг к другу приближенных значений величин или деления на малую по модулю величину при количественном анализе ММ, а также использование функций, быстро изменяющихся в промежутке, где значение аргумента известно с невысокой точностью. Иногда стремление увеличить полноту ММ приводит к снижению ее робастности вследствие введения дополнительных параметров, известных с невысокой точностью или входящих в приближенные соотношения.

Продуктивность ММ связана с возможностью использовать достаточно достоверные исходные данные. Если они являются результатом измерений, то точность их измерения должна быть выше, чем для тех параметров, которые получаются при использовании ММ. В противном случае ММ будет непродуктивной, и ее применение теряет смысл. Этому не всегда уделяется достаточное внимание, что существенно снижает прикладную значимость многих исследований.

Некоторые исходные величины или зависимости иногда невозможно установить с требуемой точностью, например, при неконтролируемых измерениях свойств материала в результате старения или износа, при рассмотрении атмосферных явлений и т.п. В этом случае возникает необходимость в использовании случайных величин или случайных функций. Если необходимые характеристики случайных величин или случайных функций не поддаются определению, то следует разработать другую ММ, может быть менее точную, но и менее требовательную к точности исходных данных.

Наглядность ММ — желательное свойство, под которым понимают ясный содержательный смысл компонент ММ. Это желаемое, но необязательное свойство. Тем не менее, использование ММ и ее последующие модификация упрощаются, если ее составляющие (например, отдельные члены уравнений) имеют ясный содержательный смысл. Это обычно расширяет возможности качественного анализа модели и облегчает контроль правильности результатов вычислительного эксперимента.

2.4. Фундаментальные принципы построения математических моделей

Рассмотренные ранее свойства позволяют сформулировать требования, предъявляемые к ММ. Такие требования противоречивы и на практике могут быть удовлетворены на основе разумного компромисса, достижение которого возможно с помощью принципов построения моделей. Далее приведены фундаментальные принципы. Они стали итогом обобщения практического опыта построения различных моделей.

1. Отказ от построения ММ с широкой областью адекватности. В начале исследования обычно неизвестен необходимый диапазон изменения параметров ТО. Чем шире диапазон изме-

нения параметров ТО, тем обычно сложнее становится ММ. Например, если ММ рассматриваемого ТО является линейной, то расширение диапазона изменения параметров ТО может стать причиной возникновения нелинейности, что приведет к замене линейной ММ нелинейной, изучение которой является более сложным.

Построение и дальнейшее изучение модели с более широкой областью адекватности требует дополнительных затрат времени и средств, причем может оказаться, что в данном исследовании такая ММ не нужна. Потому разумно отказываться от построения ММ с широкой областью адекватности и осуществлять выбор области адекватности, используя следующий принцип.

2. Принцип постепенного усложнения ММ. Этот принцип достаточно прост. Действительно, не имеет смысла начинать с построения сложной ММ, так как может оказаться, что в такой ММ нет необходимости, и она вырождается в более простую, поскольку таковы свойства ТО. Однако время и средства, затраченные дополнительно на построение и изучение такой модели, вернуть уже нельзя.

Согласно данному принципу построение модели рассматриваемого ТО необходимо начинать с простейших ММ и проверки их пригодности. Если модель признают пригодной, то ее используют на последующих этапах математического моделирования. Если же она непригодна, то необходимо осуществить следующий цикл модификации модели, который приведет к построению более сложной ММ и проверке ее пригодности и т.д. до тех пор, пока не будет получена пригодная ММ. В этом случае удастся построить целую совокупность моделей одного и того же ТО.

Сравнение результатов, полученных с использованием различных ММ, может не только существенно обогатить познание о рассматриваемом ТО, но и повысить достоверность этих результатов.

При использовании этого принципа весьма важным становится вопрос о пригодности ММ. Проверку пригодности модели разумно основывать на следующем принципе.

3. Принцип согласованности. Точность ММ должна быть согласована с погрешностью исходных данных. Это означает, что при прочих равных условиях, повышая погрешность исходных данных, получаем менее точную ММ, а с уменьшением погрешности исходных данных модель может быть более точной.

Если погрешность исходных данных выше значения количественной характеристики точности модели, то модель не будет отвечать требованию продуктивности и ее использование теряет всякий смысл. Если погрешность исходных данных намного меньше значения количественной характеристики точности модели, то модель может быть недостаточно точной, в частном случае она может не отвечать требованию полноты.

Основываясь на принципе согласованности и применяя следующий принцип, можно обосновать необходимость получения более точных исходных данных или аргументированно отказаться от их использования.

4. Принцип перехода к стохастической ММ. Некоторые величины или зависимости, используемые при построении модели, иногда невозможно или затруднительно установить с требуемой точностью. Тогда возникает потребность в случайных величинах или случайных функциях, что приводит к появлению стохастической ММ.

Основная трудность при анализе стохастической ММ обычно связана с тем, что необходимые характеристики случайных величин или случайных функций часто неизвестны или известны с невысокой точностью. Это означает, что модель не удовлетворяет требованию продуктивности. Тогда в соответствии с принципом согласованности следует использовать модель, менее точную по сравнению со стохастической, но зато в большей мере удовлетворяющую свойству робастности.

Сформулированные принципы носят общий и универсальный характер. Построение ММ с использованием в совокупности этих четырех принципов может уменьшить влияние субъективного фактора при принятии решений на некоторых этапах математического моделирования, сократить затраты времени и средств на проведение исследования. Очевидно, что применение сформулированных принципов позволит рационально использовать возможности математического моделирования.

2.5. Классификация математических моделей

По способу отражения в ММ тех или иных особенностей ТО выделяют *структурные*, *функциональные* и *структурно-функциональные* ММ.

Если ММ отображает устройство ТО и связи между составляющими его элементами, то ее называют *структурной* ММ. Если же ММ описывает функционирование ТО или отражает происходящие в ТО физические, химические или какие-нибудь другие процессы, то ее относят к *функциональным* моделям. Могут существовать и комбинированные ММ, которые описывают как функционирование, так и устройство ТО. Такие ММ называют *структурно-функциональными*.

Структурные ММ делят на *топологические* и *геометрические*. Топологические ММ отображают состав ТО и связи между его элементами. Такие модели представляют в виде графов, матриц, таблиц, списков и т.п. Их целесообразно применять на начальной стадии исследования сложного по структуре ТО, состоящего из большого числа элементов, прежде всего для уяснения и уточнения их взаимосвязи.

Геометрическая ММ содержит сведения о форме и размерах ТО и его элементах, об их взаимном расположении. В геометрическую ММ обычно входят совокупность уравнений линий и поверхностей и алгебраические соотношения, определяющие принадлежность областей пространства телу ТО или его элементам. Такую ММ иногда задают координатами некоторого множества точек, по которым интерполированием можно построить ограничивающие область линии или поверхности. Границы области задают и кинематическим способом: линию — как траекторию движения точки, а поверхность — как результат перемещения линии. Возможно, представление формы и размеров области совокупностью типовых фрагментов достаточно простой конфигурации. Геометрические ММ находят применение при разработке технической документации и при осуществлении технологических процессов изготовления деталей (например, на станках с числовым программным управлением).

Функциональные ММ обычно состоят из соотношений, связывающих между собой различные параметры ТО. Функционирование сложных ТО нередко удается описать, изучив совокупность его реакций на некоторые известные (или заданные) входные воздействия (сигналы), т.е. в этом случае ТО рассматривают как черный ящик. Такую разновидность функциональной модели обычно называют *имитационной* ММ, имея в виду, что она лишь описывает внешние проявления функционирования ТО, не раскрывая существа протекающих в нем процессов. Имитационные ММ нашли широкое применение, например, в технической кибернетике. Если связь между входными и выходными параметрами ТО удастся описать лишь в форме алгоритма, пригодного для реализации в виде программы для ЭВМ, то представленная имитационная ММ является примером *алгоритмической* ММ. По этому признаку к алгоритмическим моделям относят как функциональные, так и структурные ММ.

Если связи между параметрами ТО можно выразить в аналитической форме, то говорят об *аналитической* ММ. При построении иерархии моделей одного и того же ТО обычно стремятся к тому, чтобы упрощенный вариант модели был представлен в аналитической форме, допускающей точное решение, которое можно было бы использовать при тестировании результатов, полученных при помощи более полных и поэтому более сложных моделей рассматриваемого ТО.

По способу получения ММ делят на *теоретические* и *эмпирические*. Первые получают в результате использования теоретических сведений о свойствах ТО, а вторые являются итогом обработки результатов наблюдения проявлений этих свойств.

Один из способов построения *эмпирических* ММ заключается в проведении экспериментальных исследований, и в последующем представлении результатов этих исследований в алгоритмической форме или в виде аналитических зависимостей. Поэтому эмпирическая ММ по форме представления может содержать признаки как алгоритмической, так и аналитической модели.

При построении *теоретических* ММ прежде всего стремятся использовать известные фундаментальные законы сохранения таких субстанций, как масса, электрический заряд, энер-

гия, количество движения и момент количества движения. Кроме того, привлекают определяющие соотношения (соотношения, связывающие между собой параметры, характеризующие состояние или эволюцию ТО). В роли таких соотношений могут выступать так называемые феноменологические законы. Эти законы устанавливают взаимосвязь между параметрами, характеризующими состояние или эволюцию изучаемого объекта, путем непосредственных наблюдений над происходящим явлением (феноменом). Примерами таких законов являются закон Ома о связи силы тока в проводнике и падения электрического напряжения, закон Гука о связи деформации и механического напряжения в линейно упругом материале, закон Фурье о связи градиента температуры в теле с плотностью теплового потока и т.п.

Сочетание теоретических соображений качественного характера с обработкой результатов наблюдения внешних проявлений свойств изучаемого ТО приводит к смешанному типу ММ, называемых *полуэмпирическими*.

2.5.1. Особенности функциональных моделей

Одной из характерных особенностей функциональной модели является возможность использования при ее построении случайных величин или случайных функций. В этом случае ММ называют *стохастической*, а в противном случае — *детерминированной*.

Появление стохастических ММ обусловлено тем, что далеко не все величины или зависимости реальных ТО можно установить с требуемой точностью. Поэтому ММ таких ТО, строго говоря, следует отнести к стохастическим. Например, если изучаемый ТО является изделием массового производства, то его внутренние параметры могут принимать случайные значения в пределах допусков, установленных относительно номинальных значений. Случайными могут быть значения внешних параметров, которые характеризуют воздействие на ТО каких-то случайных явлений, например, порывы ветра, атмосферные явления и т.п. Если значения внутренних или внешних параметров изучаемого ТО являются случайными, то и выходные параметры этого ТО могут быть случайными величинами.

Для анализа стохастических ММ необходимо использовать методы теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов. Однако основная трудность их применения обычно связана с тем, что необходимые характеристики случайных величин или случайных функций часто неизвестны или известны с невысокой точностью, т.е. ММ не удовлетворяет требованию продуктивности. В таких случаях можно использовать ММ, более грубую по сравнению со стохастической, но и в большей мере удовлетворяющую свойству робастности.

Пример. Пусть на поверхности тела с однородной по объему, но меняющейся во времени t температурой $T(t)$ происходит теплообмен с окружающей средой, имеющей постоянную температуру T_c (рис. 2).

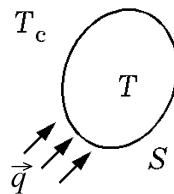


Рис. 2. Расчетная схема теплообмена твердого тела с окружающей средой

Пусть плотность q теплового потока, передаваемого от окружающей среды к телу, пропорциональна разности температур $T_c - T$, т.е.

$$q = \alpha(T_c - T),$$

где α — коэффициент теплоотдачи. Тогда подводимый от окружающей среды к телу тепловой поток равен

$$Q = qS = \alpha(T_c - T)S, \quad (1)$$

где S — площадь поверхности тела.

Количество тепловой энергии, переданное телу, вызывает приращение внутренней энергии u тела, которое пропорционально приращению температуры этого тела, а коэффициентом пропорциональности служит полная теплоемкость C_T тела, измеряемая в Дж/К и равная количеству тепловой энергии, необходимой для повышения температуры тела на 1 К. Таким образом

$$du = C_T dT(t) = Q dt. \quad (2)$$

Для построения ММ, которая описывает изменение температуры $T(t)$ тела во времени t , подставим (1) в (2) и получим ОДУ первого порядка

$$C_T \frac{dT(t)}{dt} = \alpha(T_c - T)S. \quad (3)$$

При постоянных значениях C_T , α , T_c и известной начальной температуре T_0 тела в момент времени $t = 0$ это ОДУ имеет решение, которое можно записать в следующем виде

$$T(t) = T_c - (T_c - T_0) \exp\left(-\frac{\alpha S}{C_T} t\right). \quad (4)$$

Очевидно, что при вполне определенном значении α такую ММ следует считать детерминированной.

Но реальный процесс теплообмена является довольно сложным, а его интенсивность зависит от большого числа факторов. Некоторые из этих факторов носят либо случайный характер, либо не поддаются или поддаются с трудом контролю и учету. Поэтому коэффициент теплоотдачи, вообще говоря, нельзя считать достоверно известным и постоянным во времени. Его следует рассматривать как некоторую случайную функцию времени t . Если такую функцию ввести в ОДУ (3), то вместо детерминированной ММ получим стохастическую. Использовать такую ММ имеет смысл лишь в том случае, если располагать необходимыми характеристиками случайной функции.

Однако часто удается установить границы возможного изменения значений α и определить влияние погрешностей задания величин в уравнении (4) на точность определяемой температуры тела.

Такая задача возникает всякий раз, когда задана дифференцируемая в рассматриваемой области функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$, вычисление которой осуществляется при приближенных значениях ее аргументов $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$. Важно знать, какова верхняя граница погрешности вычисляемого значения y , если в действительности вычисляется значение $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$. Для этого можно воспользоваться следующей формулой

$$\bar{\delta}(\tilde{y}) = \sum_{i=1}^n \frac{|\tilde{x}_i|}{|f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)|} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \right| \bar{\delta}(\tilde{x}_i),$$

которая позволяет определить верхнюю границу относительной погрешности величины y , где $\bar{\delta}(\tilde{x}_i)$ — верхняя граница относительной погрешности величины $\tilde{x}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Если влияние погрешности задания коэффициента теплоотдачи на точность определяемой температуры тела не велико по сравнению с влиянием погрешности других величин в уравнении (4), то разумно использовать детерминированную модель.

Существенным признаком классификации модели является ее способность описывать изменение во времени параметров ТО, которые представляют интерес. Такую ММ называют *нестационарной* (или *эволюционной*). Так, рассмотренная в примере модель, учитывает такое изменение, и ее относят к нестационарным (или эволюционным) ММ.

Если ММ не учитывает изменение во времени параметров ТО, которые представляют интерес, то такую модель называют *стационарной*. Например, рассмотрим математический маятник, совершающий периодические колебания. ММ этого ТО является стационарной по отношению к периоду и полуразмаху колебаний, хотя материальная точка перемещается во времени относительно положения равновесия.

Если интересующие нас параметры ТО изменяются медленно и таким изменением можно пренебречь, то говорят о *квазистационарной* ММ. При описании некоторых процессов нестационарная ММ может быть преобразована в квазистационарную соответствующим выбором системы координат. Например, при дуговой электросварке температурное поле в свариваемых стальных листах в окрестности движущегося с постоянной скоростью электрода в неподвижной системе координат описывает нестационарная ММ, а в подвижной системе координат, связанной с электродом, — квазистационарная ММ.

При математическом моделировании реального ТО полезно иметь в виду ситуации, когда его параметры остаются постоянными при постоянных внешних воздействиях, т.е. когда ТО находится в *состоянии равновесия*. Если ММ описывают ТО в состоянии равновесия, то ее называют *статической*. Если изменение параметров ТО происходит столь медленно, что этим изменением можно пренебречь, то говорят о *квазистатической* ММ. Например, в медленно протекающих механических процессах можно пренебречь инерционными силами, а при медленно изменяющейся силе тока в электрической цепи — индуктивностью элементов этой цепи.

Важным с точки зрения последующего анализа свойством ММ является ее линейность. В *линейной* ММ изучаемого объекта его параметры связаны линейными соотношениями. Это означает, что при изменении какого-либо внешнего (или внутреннего) параметра ТО линейная ММ предсказывает линейное изменение зависящего от него выходного параметра, а при изменении двух или более параметров — сложение их влияний, т.е. такая ММ обладает свойством *суперпозиции* (от латинского слова *superpositio* — наложение). Если ММ не обладает свойством суперпозиции, то ее называют *нелинейной*. Для количественного анализа линейных ММ разработано большое число математических методов, тогда как возможности анализа нелинейных ММ связаны в основном с методами вычислительной математики.

Иногда для исследования нелинейной ММ ее нелинейные соотношения между параметрами заменяют приближенными линейными и получают так называемую *линеаризованную* ММ рассматриваемого ТО. Так как линеаризация связана с внесением дополнительных погрешностей, то к результатам анализа линеаризованной модели следует относиться с определенной осторожностью. Дело в том, что линеаризация ММ может привести к утрате или существенному искажению реальных свойств ТО.

Каждый параметр ТО может быть двух типов — непрерывно изменяющимся в некотором промежутке своих значений или принимающим только некоторые дискретные значения. Возможна и промежуточная ситуация, когда в одной области параметр принимает все возможные значения, а в другой — только дискретные. В связи с этим выделяют *непрерывные*, *дискретные* и *смешанные* ММ. В процессе анализа ММ этих типов они могут быть преобразованы одна в другую, но при таком преобразовании следует контролировать выполнение требования адекватности ММ рассматриваемому ТО.

2.6. Иерархия математических моделей

При математическом моделировании достаточно сложного ТО обычно применяют *принцип декомпозиции*. Он состоит в условном разбиении ТО на отдельные более простые блоки и элементы, допускающие их независимое исследование с последующим учетом взаимного влияния. Принцип декомпозиции можно применить и к каждому выделенному блоку вплоть до уровня достаточно простых элементов. В таком случае возникает иерархия ММ связанных между собой блоков и элементов. Под *иерархией* ММ подразумевают совокупность ММ одного и того же ТО, отличающихся уровнем упрощения в описании этого объекта и упорядоченных по степени их сложности и полноты.

Иерархические уровни выделяют и для отдельных типов ММ. Например, среди структурных ММ к более высокому уровню иерархии относят топологические ММ, а к более низкому уровню, характеризующемуся большей детализацией ТО, — геометрические модели.

Среди функциональных ММ иерархические уровни отражают степень детализации описания процессов, протекающих в ТО. С этой точки зрения обычно выделяют три основных уровня: микро, макро и мета.

В ММ *микроуровня* параметры, характеризующие состояние ТО, зависят от пространственных координат и могут зависеть от времени. ММ микроуровня называют *одномерной*, *двумерной* или *трехмерной*, если искомые параметры зависят от одной, двух или трех пространственных координат соответственно. Два последних типа ММ объединяют в *многомерные* ММ микроуровня.

В ММ *макроуровня* параметры, характеризующие состояние ТО, могут зависеть от времени, но не зависят от пространственных координат.

ММ микроуровня описывают процессы в системах с распределенными параметрами (в *континуальных системах*), а ММ макроуровня — в системах с сосредоточенными параметрами (в *дискретных системах*).

Если в ММ макроуровня число параметров, характеризующих состояние ТО, велико, то количественный анализ такой ММ становится громоздким и требует значительных затрат вычислительных ресурсов. В таком случае путем объединения и укрупнения элементов сложного ТО стремятся уменьшить число этих параметров. Такой подход характерен при построении ММ *метауровня*.

ММ метауровня обычно относят к высшему уровню иерархии, ММ макроуровня — к среднему, а ММ микроуровня — к низшему.

В рамках этого курса ограничимся рассмотрением ММ микроуровня и макроуровня.

2.7. Введение в теорию размерностей

Теория размерностей устанавливает взаимосвязь между физическими величинами, характеризующими изучаемый объект, путем анализа размерности этих величин. Такой анализ позволяет установить зависимость между безразмерными комбинациями, составленными из этих величин и, как следствие этого, позволяет определить структуру модели ТО.

Пусть в некоторой системе единиц измерения физических величин установлены некоторые *основные единицы* для измерения основных физических величин. Так, в Международной системе единиц (СИ) в качестве основных приняты следующие единицы измерения: длины — метр (м), массы — килограмм (кг), времени — секунда (с), силы электрического тока — ампер (А), температуры — кельвин (К), силы света — кандела (кд) (от латинского слова *candela* — свеча), количества вещества — моль. Дополнительными (безразмерными) единицами являются радиан¹ (рад) для измерения плоского угла истерадиан² (ср) для измерения телесного угла³.

Единицы измерения других величин, например, определяемых с помощью физических формул и законов, выражают через основные единицы. Такие единицы измерения называют *производными* и в связи с этим вводят понятие *размерности* величины.

Формулой размерности или просто *размерностью* какой-либо физической величины B называют выражение:

$$[A_1]^{n_1} [A_2]^{n_2} \dots [A_k]^{n_k},$$

где k — число основных единиц; $n_1, n_2, \dots, n_k$ — рациональные числа, которые называют *показателями размерности* основных единиц $[A_1], [A_2], \dots, [A_k]$ соответственно. Формулы размерности имеют вид степенных одночленов, которые определяют взаимосвязь между единицей измерения $[B]$ величины B и основными единицами $[A_1], [A_2], \dots, [A_k]$ данной системы, т.е.

$$[B] = [A_1]^{n_1} [A_2]^{n_2} \dots [A_k]^{n_k}.$$

Например, размерность ускорения a записывают в виде

$$[a] = [L]^{n_1} [T]^{n_2} = \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

где $[L] = \text{м}$ и $[T] = \text{с}$ — единицы измерения длины и времени соответственно, $n_1 = 1$, $n_2 = -2$ — показатели.

Если все показатели размерности $n_1, n_2, \dots, n_k$ равны нулю, то величину B называют *безразмерной*, приписывая ей размерность 1.

Вычисление размерностей облегчается правилами нахождения размерности произведения или отношения двух физических величин. Согласно этим правилам $[A \cdot B] = [A] \cdot [B]$ и $[A/B] = [A]/[B]$.

Пример 1. Запишем размерности скорости v и кинетической энергии w в Международной системе единиц (СИ).

1. Исходя из определения скорости, получим $[v] = [L]/[T] = [L][T]^{-1} = \text{м/с}$.

2. В соответствии с определяющей формулой кинетической энергии $w = \frac{1}{2}mv^2$, имеем

$$[w] = \left[\frac{1}{2} \right] \cdot [m] \cdot [v]^2 = 1 \cdot [M] \cdot ([L][T]^{-1})^2 = [M] \cdot [L]^2 \cdot [T]^{-2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2},$$

где $[M] = \text{кг}$ — размерность массы.

¹ Радиан — угол, расположенный вершиной в центре окружности единичного радиуса и вырезающий дугу окружности, длина которой равна единице.

² Стерadian — телесный угол, расположенный вершиной в центре сферы единичного радиуса и вырезающий участок ее поверхности единичной площади (полная сфера образует телесный угол, равный 4π стерадиан).

³ Угол телесный — часть пространства, ограниченная некоторой конической поверхностью, единицей измерения такого угла является стерадиан.

Теория размерности накладывает определенные ограничения на возможные функциональные зависимости между размерными величинами. Так если две величины A и B связаны равенством $A = B$, то $[A] = [B]$. Равенство размерностей означает сохранение равенства величин при изменении масштабов основных единиц измерения. Если величины A , B и C связаны равенством $A = B + C$, то размерности всех трех величин должны быть одинаковыми, т.е. $[A] = [B] = [C]$.

Отметим, что для принятой системы основных единиц измерения размерность любой величины может быть представлена лишь единственным образом. Итак, существенное предположение теории размерностей состоит в том, что размерность любой рассматриваемой величины B_j единственным образом можно представить в виде степенного одночлена

$$[B_j] = \prod_{i=1}^k [A_i]^{\alpha_{ij}}, \quad (5)$$

где k — число основных единиц измерения $[A_1], [A_2], \dots, [A_k]$; α_{ij} — показатели размерности основных единиц измерения.

Наименьшую совокупность размерных и безразмерных величин, необходимых и достаточных для однозначного описания изучаемого ТО, в теории размерностей называют *определяющими параметрами*. Величины, зависящие от определяющих параметров, называют *определяемыми параметрами*. Определяющие и определяемые параметры образуют совокупность *основных параметров* данного ТО.

Пусть рассматриваемый ТО характеризуют n основных параметров $B_1, B_2, \dots, B_n$, для каждого из которых справедливо (5). Рассмотрим степенной одночлен

$$\Pi = \prod_{j=1}^n B_j^{x_j},$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — показатели степени основных параметров, тогда

$$[\Pi] = \prod_{j=1}^n [B_j]^{x_j}. \quad (6)$$

Найдем число s таких безразмерных степенных одночленов при условии, что они являются независимыми, т.е. ни один из них нельзя представить произведением других, возведенных в некоторую степень отличную от нуля. Используя уравнения (5) и (6), получим

$$[\Pi] = \prod_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^k [A_i]^{\alpha_{ij}} \right)^{x_j} = \prod_{i=1}^k [A_i]^{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j}.$$

Условием равенства единице размерности степенного одночлена Π является выполнение k равенств

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (7)$$

Матрицу (α_{ij}) однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (7) называют *матрицей размерности*. Очевидно, что ранг этой матрицы может принять значение $r \leq k$.

Известно, что однородная СЛАУ относительно n неизвестных x_j , $j = 1, 2, \dots, n$, с матрицей размерности ранга r имеет набор из $n - r$ линейно независимых решений, образующих фундаментальную систему решений¹ этой СЛАУ. Таким решениям соответствуют ровно $s = n - r$ независимых степенных одночленов Π_q , $q = 1, 2, \dots, s$, размерность которых равна единице. Показатели степени x_j любого другого степенного одночлена Π являются решениями

¹ Фундаментальной системой решений однородной СЛАУ называется любой набор из $n - r$ линейно независимых решений этой СЛАУ, где n — количество неизвестных в системе, а r — ранг ее матрицы.

СЛАУ (7) и могут быть представлены линейной комбинацией решений из фундаментальной системы, а это означает, что Π можно выразить через степенные одночлены $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_s$, т.е.

$$\Pi = \prod_{q=1}^s \Pi_q^{y_q},$$

где $y_1, y_2, \dots, y_s$ — показатели степени.

Таким образом, приходим к следующей формулировке *пи-теоремы* (П-теоремы): если между n параметрами, характеризующими изучаемый объект, существует зависимость, имеющая физический смысл, то ее можно представить в виде зависимости между $s = n - r$ их безразмерными комбинациями, где r — ранг матрицы размерности. При этом s определяет число независимых (не выражаемых друг через друга) безразмерных комбинаций.

Например, пусть объект исследования характеризуют n основных параметров $B_1, B_2, \dots, B_n$ и для него установлена имеющая физический смысл зависимость $B_1 = f(B_2, B_3, \dots, B_n)$, где B_1 — определяемый параметр, $B_2, B_3, \dots, B_n$ — определяющие параметры, f — функция многих переменных. Тогда такую зависимость всегда можно привести к эквивалентной зависимости

$$\Pi_1 = F(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-r}),$$

где $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}$ — безразмерные комбинации или безразмерные степенные одночлены, причем только Π_1 содержит определяемый параметр; r — ранг матрицы размерности; F — функция многих переменных.

Рассмотрим некоторые следствия из П-теоремы:

1. если $n - r = 0$, то уравнение $B_1 = f(B_2, B_3, \dots, B_n)$ составлено неверно, и его нельзя привести к безразмерному виду, так как нарушены ограничения, накладываемые на возможные функциональные зависимости;
2. если $n - r = 1$, то имеет место только одна безразмерная комбинация Π_1 , причем $\Pi_1 = \text{const}$.

Проиллюстрируем применение П-теоремы следующим примером.

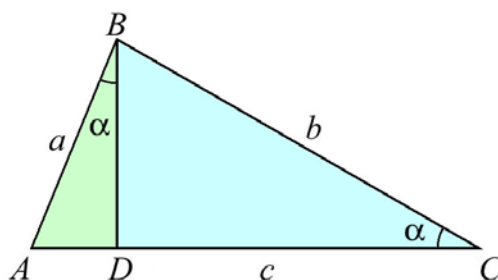


Рис. 3. Прямоугольный треугольник

Пример 2. Пусть задан прямоугольный треугольник, покажем, что теорема Пифагора является следствием П-теоремы.

Прямоугольный треугольник (рис. 3) полностью определяется заданием длины гипотенузы c и угла α . Поэтому и его площадь S зависит от этих определяющих параметров, т.е.

$$S = f(c, \alpha).$$

Единицами измерения трех основных параметров S , c и α являются соответственно м^2 , м и рад . Следовательно, размерности основных параметров можно выразить только через основную единицу измерения длины — метр. Тогда получим матрицу размерностей

$$\begin{matrix} & S & c & \alpha \\ \text{м} & (2 & 1 & 0). \end{matrix}$$

Она имеет три столбца и только одну строку, так как количество основных параметров $n = 3$, а число основных единиц измерения $k = 1$.

Очевидно, что ранг такой матрицы равен единице. Поэтому согласно П-теореме основные параметры образуют только две независимые безразмерные комбинации $\Pi_1 = S/c^2$ и $\Pi_2 = \alpha$, между которыми установлена зависимость $\Pi_1 = F(\Pi_2)$ или $S = c^2 F(\alpha)$, где F — функция угла α . То же самое относится к площадям S_{ABD} и S_{BCD} двух прямоугольных треугольников ABD и BCD на рис. 3, для которых роль гипотенуз играют катеты исходного треугольника ABC . Поэтому $S_{ABD} = a^2 F(\alpha)$ и $S_{BCD} = b^2 F(\alpha)$. Но так как $S = S_{ABD} + S_{BCD}$, то $c^2 F(\alpha) = a^2 F(\alpha) + b^2 F(\alpha)$ или $c^2 = a^2 + b^2$. Таким образом, применяя П-теорему, доказали, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Для успешного применения П-теоремы к построению моделей ТО необходимо располагать полным набором параметров, описывающих изучаемый объект, причем аргументированный выбор этих параметров должен опираться на тщательный анализ тех свойств и особенностей ТО, влияние которых существенно в данном конкретном случае. Отметим, что такой анализ необходим при любом способе построения ММ, и покажем это на следующем примере.

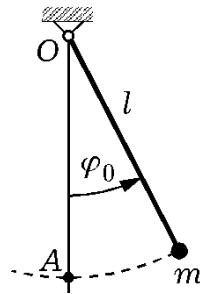


Рис. 4. Расчетная схема математического маятника

Пример 3. Рассмотрим математический маятник (рис. 4), состоящий из невесомого стержня длины l и материальной точки массой m . Пусть стержень может без трения и сопротивления окружающей среды поворачиваться в вертикальной плоскости вокруг точки O на любой угол. Если маятник отклонить на угол φ_0 от его положения равновесия OA , то он будет совершать колебания, которые в силу закона сохранения энергии являются незатухающими.

Установим зависимость периода T колебаний маятника от определяющих параметров: m , l , φ_0 и g , где g — ускорение свободного падения.

Единицами измерения пяти основных параметров T , m , l , φ_0 и g являются соответственно с, кг, м, рад и м/с². Следовательно, размерности основных параметров можно выразить через основные единицы измерения: массы — килограмм, длины — метр, времени — секунда. Тогда получим матрицу размерностей

$$\begin{matrix} & T & m & l & \varphi_0 & g \\ \begin{matrix} \text{кг} \\ \text{м} \\ \text{с} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Она имеет пять столбцов и три строки, так как количество основных параметров $n = 5$, а число основных единиц измерения $k = 3$.

Очевидно, что ранг такой матрицы равен трем. Поэтому в силу П-теоремы из пяти основных параметров можно составить только две независимые безразмерные комбинации, причем угол φ_0 образует одну из них. В другую безразмерную комбинацию не удастся включить массу m материальной точки, поскольку единица измерения массы не входит в размерности других основных параметров. Следовательно, величина m не является аргументом искомой зависимости и ее можно исключить из числа основных параметров.

После исключения параметра m количество основных параметров $n = 4$, а число основных единиц измерения $k = 2$. Тогда матрица размерностей имеет четыре столбца и две строки

$$\begin{matrix} & T & l & \varphi_0 & g \\ \text{м} & \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \text{с} & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \end{matrix} .$$

Ранг такой матрицы равен двум. Согласно П-теореме основные параметры образуют две независимые безразмерные комбинации $\Pi_1 = \frac{g}{l}T^2$ и $\Pi_2 = \varphi_0$. Таким образом, искомую зависимость можно искать в виде

$$\Pi_1 = F(\Pi_2) \quad \text{или} \quad T = \tilde{F}(\varphi_0) \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (8)$$

где F и $\tilde{F}$ — некоторые функции угла φ_0 , для которых справедливо $\tilde{F}(\varphi_0) = \sqrt{F(\varphi_0)}$. Установить вид этих функций в рамках теории размерностей нельзя. Для этого необходимо, например, провести эксперимент и обработать его результаты с целью установления функциональной зависимости безразмерной комбинации $\frac{g}{l}T^2$ от угла φ_0 . Но даже при неизвестных функциях $F(\varphi_0)$ или $\tilde{F}(\varphi_0)$ при помощи (8) можно получить полезные результаты. Например, если известно значение периода T колебаний для некоторого маятника длиной l при фиксированных значениях g и φ_0 , то для маятника длиной l_1 период колебаний будет равен $T_1 = T \sqrt{\frac{l_1}{l}}$.

Замечание. Отметим, что П-теорему используют не только для построения полуэмпирических ММ. Применение П-теоремы позволяет сократить число параметров, характеризующих изучаемый ТО. Это упрощает качественный анализ модели и позволяет еще до проведения количественного анализа оценить влияние отдельных факторов. Кроме того, безразмерная форма модели дает возможность представить результаты ее количественного анализа в более компактном виде.

Пример 4. Пусть поток несжимаемой жидкости обтекает длинное цилиндрическое тело с круглым поперечным сечением радиуса R (рис. 5).

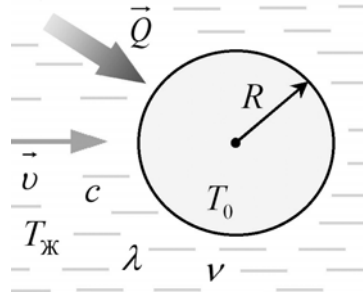


Рис. 5. Расчетная схема теплообмена твердого тела с несжимаемой жидкостью

Скорость v и температура $T_{\text{ж}}$ жидкости на достаточно большом расстоянии от тела сохраняют постоянные значения. Температуру T_0 этого тела поддерживают постоянной, причем $T_0 < T_{\text{ж}}$. Необходимо при установившемся процессе теплообмена твердого тела с несжимаемой жидкостью рассмотреть в качестве определяемого параметра величину Q *теплового потока* от жидкости к телу, т.е. количество теплоты, передаваемое в единицу времени от жидкости к телу.

Процесс теплопередачи локализован у поверхности тела и зависит не только от перечисленных выше параметров, но и от удельной объемной теплоемкости¹ c и коэффициента теплопроводности² λ жидкости, поскольку эти параметры характеризуют соответственно способность жидкости накапливать тепловую энергию и передавать ее путем теплопроводности.

Подвод тепловой энергии к телу также зависит от распределения скорости жидкости у его поверхности. В случае идеальной (невязкой) жидкости оно однозначно определено положением тела относительно вектора скорости, а для вязкой жидкости зависит еще и от *кинематического коэффициента вязкости*³ ν , который характеризует свойство среды оказывать сопротивление при перемещении одной части среды относительно другой или относительно поверхности твердого тела. Единицей измерения кинематического коэффициента вязкости является $\text{м}^2/\text{с}$.

Предположим, что тепловой поток зависит от разности температур $\Delta T = T_{\text{ж}} - T_0$. Это справедливо, например, при достаточно близких значениях температур $T_{\text{ж}}$ и T_0 . За характерный размер l цилиндрического тела примем величину, равную $2R$.

Тогда в случае идеальной жидкости имеем шесть основных параметров: $Q, l, v, \Delta T, c, \lambda$, единицами измерения которых являются

$$[Q] = \text{Вт} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3}, \quad [l] = \text{м}, \quad [\nu] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}},$$

$$[\Delta T] = \text{К}, \quad [c] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{К}}, \quad [\lambda] = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}}.$$

¹ Удельная объемная теплоемкость — величина, равная количеству теплоты, сообщаемой единице объема среды при единичном повышении температуры.

² Коэффициент теплопроводности — величина, характеризующая свойство среды передавать теплоту путем теплопроводности. Эта величина является коэффициентом пропорциональности между плотностью теплового потока и абсолютным значением градиента температуры.

³ Кинематический коэффициент вязкости — величина, характеризующая свойство вязкости среды (жидкости или газа) и равная отношению динамического коэффициента вязкости среды к ее плотности.

Динамический коэффициент вязкости — величина, характеризующая свойство вязкости среды (жидкости или газа). Эта величина численно равна касательному напряжению вязкого трения на поверхности твердого тела при единичном абсолютном значении на этой поверхности градиента скорости движения среды относительно твердого тела.

Следовательно, размерности основных параметров можно выразить через основные единицы измерения: длины — метр, времени — секунда, массы — килограмм, температуры — кельвин. Тогда получим матрицу размерностей

$$\begin{matrix} & Q & l & \nu & \Delta T & c & \lambda \\ \begin{matrix} \text{м} \\ \text{с} \\ \text{кг} \\ \text{К} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Она имеет шесть столбцов и четыре строки, так как количество основных параметров $n = 6$, а число основных единиц измерения $k = 4$.

Очевидно, что ранг такой матрицы равен четырем. Поэтому в силу П-теоремы из шести основных параметров можно составить только две независимые безразмерные комбинации, например, $\Pi_1 = \frac{Q}{l \lambda \Delta T}$ и $\Pi_2 = \frac{\nu l c}{\lambda}$. Таким образом, искомую зависимость можно представить в виде

$$\Pi_1 = F(\Pi_2) \quad \text{или} \quad \frac{Q}{l \lambda \Delta T} = F\left(\frac{\nu l c}{\lambda}\right), \quad (9)$$

где F — некоторая функция одного аргумента.

Отношение Q/S является *плотностью q теплового потока*, усредненного по площади S поверхности тела. Так как для геометрически подобных тел $l^2/S = C = \text{const}$, то (9) можно представить в виде

$$\text{Ki} = C \cdot F(\text{Pe}), \quad (10)$$

где $\text{Ki} = \frac{ql}{\lambda \Delta T}$ — *тепловой критерий Кирпичева*, $\text{Pe} = \frac{\nu l c}{\lambda}$ — *критерий Пекле*.

Интенсивность теплообмена на поверхности тела обычно характеризуют усредненным *коэффициентом теплоотдачи* $\alpha = q/\Delta T$. Тогда вместо (10) получим

$$\text{Nu} = C \cdot F(\text{Pe}), \quad (11)$$

где $\text{Nu} = \frac{\alpha l}{\lambda}$ — *критерий Нуссельта*.

Вид функции F в (9)–(11) установить в рамках теории размерностей нельзя и его приходится определять путем обработки результатов экспериментов, хотя в некоторых простых случаях удается построить и теоретические ММ процесса теплообмена.

В случае вязкой жидкости число основных параметров возрастет на единицу, т.е. $n = 7$, количество k основных единиц измерения размерности этих параметров не изменится, а ранг r матрицы размерности, очевидно, равен $k = 4$. Тогда число независимых безразмерных комбинаций равно $n - r = 3$. Следовательно, к рассмотренным выше безразмерным комбинациям необходимо добавить еще одну, включающую новый параметр ν . Эту комбинацию можно выбрать, например, в виде

$$\text{Re} = \frac{\nu l}{\nu} \quad \text{или} \quad \text{Pr} = \frac{c \nu}{\lambda}.$$

где Re — *критерий Рейнольдса*, Pr — *критерий Прандтля*. В итоге вместо (11) получим

$$\text{Nu} = F_1(\text{Pe}, \text{Re}), \quad \text{или} \quad \text{Nu} = F_2(\text{Pe}, \text{Pr}).$$

Так как $\text{Pe} = \text{Re} \cdot \text{Pr}$, то в случае вязкой жидкости критерий Нуссельта может быть представлен функцией любых двух из трех аргументов Pe , Re , Pr .

Ясно, что при наличии трех и более безразмерных комбинаций параметров построение полуэмпирической ММ существенно усложняется. В этом случае обычно выделяют так называемый *определяемый критерий*. В рассмотренном выше примере определяемым критерием является K_i или Nu , а остальные критерии относят к *определяющим* и проводят несколько серий экспериментальных измерений для установления функциональной зависимости определяемого критерия от двух или более определяющих, рассматриваемых в качестве аргументов искомой функции. В рассмотренном примере это функции F_1 или F_2 . В каждой серии измерений размерные параметры изменяют таким образом, чтобы изменялось значение лишь одного из определяющих критериев. Тогда обработка результатов такой серии измерений позволяет выявить функциональную зависимость определяемого критерия от одного из аргументов при фиксированных значениях остальных. В итоге в некоторой области изменения значений определяющих критериев удастся построить искомую функцию и решить задачу идентификации.

Пример 5. Закрепленная неподвижно конструкция, изготовленная из однородного и изотропного линейно упругого материала с модулем упругости на растяжение E , коэффициентами Пуассона ν , линейного расширения β и теплопроводности λ , удельной массовой теплоемкостью c и плотностью ρ , подвержена воздействию силы P и теплового потока Q , изменяющихся во времени t по заданным законам $P(t)$ и $Q(t)$ соответственно. На поверхности конструкции с характерным линейным размером l происходит теплообмен, характеризуемый коэффициентом теплоотдачи α , с окружающей средой, которая имеет температуру T_0 , совпадающую с начальной температурой конструкции в момент времени $t = 0$. Возникающие в конструкции поле температуры $T(t, x_1, x_2, x_3)$ и поле вектора $\vec{u}(t, x_1, x_2, x_3)$ перемещения зависят от времени t и координат x_1, x_2, x_3 прямоугольной декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$.

Пусть температура T конструкции и проекции u_i вектора перемещения на оси координат являются определяемыми параметрами. Их сразу можно представить в безразмерном виде: $\vartheta = T/T_0$, $\delta_i = u_i/l$, где $i = 1, 2, 3$.

Если ввести безразмерные координаты $\xi_i = x_i/l$, где $i = 1, 2, 3$, как аргументы искомых функций, то безразмерные координаты можно и не учитывать при построении матрицы размерности, так как добавление или отбрасывание столбцов, состоящих из нулевых элементов, не изменяет ранга матрицы размерностей. Аналогично можно поступить и с коэффициентом Пуассона ν . Важно лишь на заключительной стадии формирования безразмерных комбинаций определяющих параметров не забыть включить безразмерные координаты и коэффициент Пуассона в число аргументов искомых функций.

Таким образом, имеем пятнадцать определяющих параметров: $E, \nu, \beta, \lambda, c, \rho, P, Q, t, l, \alpha, T_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$, которые за исключением безразмерных величин ν, ξ_1, ξ_2, ξ_3 используем при составлении матрицы размерности. При формировании такой матрицы можно не использовать и безразмерные определяемые параметры $\vartheta = T/T_0$, $\delta_i = u_i/l$, где $i = 1, 2, 3$.

Итак, единицами измерения одиннадцати параметров $E, \beta, \lambda, c, \rho, P, Q, t, l, \alpha, T_0$ являются

$$\begin{aligned} [E] &= \text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}, & [\beta] &= \frac{1}{\text{К}}, & [\lambda] &= \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}}, \\ [c] &= \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{К}}, & [\rho] &= \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, & [P] &= \text{Н} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}, \\ [Q] &= \text{Вт} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3}, & [t] &= \text{с}, & [l] &= \text{м}, \\ [\alpha] &= \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}}, & [T_0] &= \text{К}. \end{aligned}$$

Следовательно, размерности основных параметров можно выразить через основные единицы измерения: длины — метр, массы — килограмм, времени — секунда, температуры — кельвин. Тогда получим матрицу размерностей

$$\begin{matrix} & E & \beta & \lambda & c & \rho & P & Q & t & l & \alpha & T_0 \\ \text{м} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{кг} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{с} & \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & -2 & 0 & -2 & -3 & 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{К} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

которая имеет одиннадцать столбцов и четыре строки. Очевидно, что ранг такой матрицы равен четырем. Поэтому в силу П-теоремы из одиннадцати параметров можно составить семь независимых безразмерных комбинаций.

Если число безразмерных комбинаций велико, то для их нахождения целесообразно использовать процедуру получения фундаментальной системы решений однородной СЛАУ. При этом для сохранения логической связи между переменными в безразмерных комбинациях следует стремиться к выбору такой системы решений, которая бы позволяла включить каждый определяемый параметр не более чем в одну безразмерную комбинацию. Это же требование желательно выполнить и по отношению к каждому из определяющих параметров, которые не являются постоянными, например, время и пространственные координаты, когда они входят в число определяющих параметров. Для выполнения этого требования удобно располагать столбцы матрицы размерностей в соответствии с такой последовательностью расположения основных параметров: определяемые параметры; изменяемые определяющие параметры; неизменяемые определяющие параметры.

Тогда переставляя столбцы, представим матрицу размерности в следующем виде

$$\begin{matrix} & t & P & Q & \beta & c & \alpha & \lambda & T_0 & E & \rho & l \\ \text{м} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{кг} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{с} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{К} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

В каждой безразмерной комбинации показатели степени $x_1, x_2, \dots, x_{11}$, соответствующие основным параметрам $t, P, Q, \beta, c, \alpha, \lambda, T_0, E, \rho, l$, удовлетворяют однородной СЛАУ, которую представим в следующем виде

$$\begin{cases} \begin{matrix} -x_9 & -3x_{10} & +x_{11} \\ x_9 & +x_{10} \\ -2x_9 \\ x_8 \end{matrix} & = & \begin{matrix} -x_2 & -2x_3 & & -2x_5 & & -x_7, \\ -x_2 & -x_3 & & & -x_6 & -x_7, \\ -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & +2x_5 & +3x_6 & +3x_7, \\ x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7, \end{matrix} \end{cases}$$

где x_8, x_9, x_{10}, x_{11} — базисные неизвестные, $x_1, x_2, \dots, x_7$ — свободные неизвестные. Учитывая структуру этой системы, путем несложных преобразований приведем ее к следующему виду

$$\begin{cases} \begin{matrix} x_{11} \\ x_{10} \\ x_9 \\ x_8 \end{matrix} & = & \begin{matrix} -x_1 & -2x_2 & -2x_3 & & -x_7, \\ -\frac{1}{2}x_1 & & +\frac{1}{2}x_3 & x_5 & +\frac{1}{2}x_6 & +\frac{1}{2}x_7, \\ \frac{1}{2}x_1 & -x_2 & -\frac{3}{2}x_3 & -x_5 & -\frac{3}{2}x_6 & -\frac{3}{2}x_7, \\ x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7. \end{matrix} \end{cases}$$

Значения свободных неизвестных в правых частях этих равенств можно выбрать произвольно. Выбирая эти значения, так, чтобы одно из них равнялось единице, а остальные нулю, получим из записанных равенств значения показателей степени, с которыми соответствующие им параметры входят в безразмерную комбинацию. При этом будет сохранена логическая связь между параметрами в безразмерных комбинациях, так как каждый параметр, соответствующий показателям степени $x_1, x_2, \dots, x_7$, войдет не более чем в одну безразмерную комбинацию.

Итак, для нахождения семи независимых безразмерных комбинаций $\tilde{\Pi}_1, \tilde{\Pi}_2, \dots, \tilde{\Pi}_7$ составим следующую таблицу из нормальной фундаментальной системы решений однородной СЛАУ.

	t	P	Q	β	c	α	λ	T_0	E	ρ	l
$\tilde{\Pi}_1$	1	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
$\tilde{\Pi}_2$	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	-2
$\tilde{\Pi}_3$	0	0	1	0	0	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2
$\tilde{\Pi}_4$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
$\tilde{\Pi}_5$	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	1	0
$\tilde{\Pi}_6$	0	0	0	0	0	1	0	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tilde{\Pi}_7$	0	0	0	0	0	0	1	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1

При помощи этой таблицы запишем выражения для безразмерных комбинаций:

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_1 &= \frac{t\sqrt{E}}{l\sqrt{\rho}}, & \tilde{\Pi}_2 &= \frac{P}{El^2}, & \tilde{\Pi}_3 &= \frac{Q\sqrt{\rho}}{\sqrt{E^3}l^2}, & \tilde{\Pi}_4 &= \beta T_0, \\ \tilde{\Pi}_5 &= \frac{c\rho T_0}{E}, & \tilde{\Pi}_6 &= \frac{\alpha T_0\sqrt{\rho}}{\sqrt{E^3}}, & \tilde{\Pi}_7 &= \frac{\lambda T_0\sqrt{\rho}}{\sqrt{E^3}l}.\end{aligned}$$

Обычно при исследовании упругих конструкций, одновременно подверженных механическому и тепловому воздействиям, используют несколько видоизмененную систему независимых безразмерных комбинаций:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \frac{\tilde{\Pi}_1\tilde{\Pi}_7}{\tilde{\Pi}_5} = \frac{\lambda t}{c\rho l^2}, & \Pi_2 &= \tilde{\Pi}_2 = \frac{P}{El^2}, & \Pi_3 &= \frac{\tilde{\Pi}_3\tilde{\Pi}_4}{\tilde{\Pi}_7} = \frac{Q\beta}{\lambda l}, & \Pi_4 &= \tilde{\Pi}_4 = \beta T_0, \\ \Pi_5 &= \frac{\tilde{\Pi}_4}{\tilde{\Pi}_5} = \frac{E\beta}{c\rho}, & \Pi_6 &= \frac{\tilde{\Pi}_6}{\tilde{\Pi}_7} = \frac{\alpha l}{\lambda}, & \Pi_7 &= \frac{\tilde{\Pi}_4^2}{\tilde{\Pi}_7^2} = \frac{E^3\beta^2 l^2}{\lambda^2 \rho}.\end{aligned}$$

Первую безразмерную комбинацию Π_1 называют *критерием Фурье* и обозначают $Fo = \frac{\lambda t}{c\rho l^2}$.

Вторую безразмерную комбинацию Π_2 , как правило, называют *механическим критерием Кирпичева*, а безразмерные комбинации Π_3 и Π_5 — термомеханическими критериями подобия. Безразмерную комбинацию Π_6 называют *критерием Био* и обозначают $Bi = \frac{\alpha l}{\lambda}$. По своей структуре этот критерий напоминает число Нуссельта, однако в отличие от него содержит коэффициент теплопроводности конструкции и имеет иной физический смысл.

В итоге, учитывая коэффициент Пуассона ν и введенные ранее безразмерные координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 , искомые зависимости безразмерных температуры и проекций вектора перемещения можно представить в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= F_0(Fo, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \nu, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, Bi, \Pi_7); \\ \delta_i &= F_i(Fo, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \nu, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, Bi, \Pi_7), \quad i = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Учитывая, что $\mathcal{G} = T/T_0$ и $\delta_i = u_i/l$, полученные соотношения можно записать также в следующем виде

$$\begin{aligned}T &= T_0 \cdot F_0(Fo, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \nu, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, Bi, \Pi_7); \\ u_i &= l \cdot F_i(Fo, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \nu, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, Bi, \Pi_7), \quad i = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

2.8. Представление математической модели в безразмерной форме

При проведении исследований важным является понятие *подобных* процессов. Два процесса называют подобными, если они подчиняются одним и тем же физическим законам, а составленные из определяющих параметров одного процесса безразмерные независимые комбинации совпадают с комбинациями, составленными из определяющих параметров другого процесса, причем такие комбинации называют *критериями подобия*. Понятие подобных процессов можно распространить на ТО.

Если два ТО являются подобными, то они подчиняются одним и тем же физическим законам и для всех величин $B_1, B_2, \dots, B_n$, характеризующих один ТО, справедливо

$$B_j = c_j \cdot D_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где $D_1, D_2, \dots, D_n$ — величины, характеризующие другой ТО, причем B_j и D_j должны иметь одинаковые размерности и физический смысл; $c_1, c_2, \dots, c_n$ — постоянные числа, которые называют *константами подобия*.

Размерные физические параметры B_j и D_j , входящие в критерии подобия, могут принимать для подобных ТО сильно различающиеся значения как, например, размеры лабораторных моделей и натурных конструкций. Но сами критерии подобия в таких системах должны быть одинаковыми. Если между критериями подобия установлена зависимость, то она будет справедлива и для всех подобных процессов. Это свойство подобных систем используется при экспериментальном исследовании ТО в лабораторных условиях.

Целесообразно представлять в безразмерной форме ММ, полученные теоретическим путем. Такая форма упрощает качественный и количественный анализ ММ, позволяет в удобном виде представить результаты ее количественного исследования, при этом результаты исследования будут справедливы и для всех подобных ТО.

Рассмотрим этапы приведения к безразмерной форме довольно сложной ММ микроуровня, описывающей процесс взаимодействия вязкой сжимаемой среды и твердого тела, движущегося с постоянной скоростью.

Итак, пусть в вязкой сжимаемой среде (газе) движется с постоянной скоростью твердое тело, имеющее характерный размер l , например, шар, диаметр которого равен l .

Движение твердого тела с постоянной скоростью v относительно газа равносильно обтеканию неподвижного тела потоком газа, имеющим на достаточно большом расстоянии от тела скорость $v_\infty = -v$. Выберем прямоугольную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, неподвижно связанную с твердым телом так, чтобы направление вектора скорости $\vec{v}_\infty$ совпадало с положительным направлением оси Ox_1 . Затем составим систему исходных уравнений для вязкой сжимаемой среды.

Уравнение неразрывности, выражающее фундаментальный закон сохранения массы, имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (12)$$

где $\rho = \rho(t, x_1, x_2, x_3)$ — плотность среды; $v_i = v_i(t, x_1, x_2, x_3)$ — проекции вектора скорости на соответствующие координатные оси Ox_i , $i = 1, 2, 3$.

Уравнения движения, выражающие фундаментальный закон сохранения импульса, имеют вид

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = b_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad i = 1, 2, 3, \quad (13)$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t, x_1, x_2, x_3)$ — компоненты тензора напряжений, $i, j = 1, 2, 3$; $b_i = b_i(t, x_1, x_2, x_3)$ — проекции вектора плотности внешних объемных сил, т.е.

$$\vec{b} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{V},$$

здесь $\vec{F}$ — вектор равнодействующей внешних объемных сил, действующих на среду в объеме V . Считая, что ось Ox_3 направлена вертикально вверх, получим $b_1 = b_2 = 0$ и $b_3 = -\rho g$, где g — ускорение свободного падения.

Уравнение энергии, выражающие фундаментальный закон сохранения внутренней энергии, имеет вид

$$\rho \frac{du}{dt} = e + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} \right), \quad (14)$$

где $u = u(t, x_1, x_2, x_3)$ — удельная внутренняя энергия; $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — компоненты тензора скоростей деформаций; q_i — проекции вектора $\vec{q}$ плотности теплового потока на соответствующие координатные оси; e — количество тепла, поступающего в единицу объема среды за единицу времени вследствие каких-либо причин, кроме теплопроводности, например в результате химической реакции. В рассматриваемом случае положим e равным нулю.

Действительно, изменение удельной внутренней энергии индивидуальной частицы материального континуума равно работе деформации, отнесенной к единице массы среды, и количеству теплоты, переданного единице массы данной индивидуальной частицы, т.е.

$$du = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}}{\rho} dt + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} \right) dt.$$

Согласно закону теплопроводности Фурье вектор $\vec{q}$ плотности теплового потока в данной точке сплошной среды прямо пропорционален градиенту температуры в этой точке. Тогда

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (15)$$

где $T = T(t, x_1, x_2, x_3)$ — температура; λ — коэффициент теплопроводности.

Для коэффициента теплопроводности газов обычно характерны значения примерно от 0,006 Вт/(м·К) до 0,1 Вт/(м·К). Исключения составляют водород и гелий, теплопроводность которых в 5 – 10 раз выше, чем у остальных газов. Характер изменения теплопроводности газов определяется многими факторами, например температурой, давлением, причем теплопроводность газов довольно значительно увеличивается с ростом температуры.

Согласно элементарной кинетической теории, в которой газ рассматривается как совокупность молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении, коэффициент теплопроводности можно приближенно определить следующим образом

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{T/T_0},$$

где λ_0 — значение коэффициента теплопроводности при температуре T_0 .

Пусть газ является совершенным, т.е. подчиняющимся уравнению состояния Клапейрона–Менделеева

$$p = \rho R T, \quad (16)$$

где p — давление; R — удельная газовая постоянная, измеряемая в Дж/(кг·К).

Для газа, подчиняющегося такому уравнению состояния, можно считать в случае не очень значительных изменений температуры, что

$$\frac{du}{dt} = c_v \frac{dT}{dt}, \quad (17)$$

где c_v — удельная теплоемкость в изохорном процессе (при постоянном объеме), которую полагаем постоянной величиной.

К приведенным выше уравнениям следует добавить кинематические и физические соотношения. Кинематические соотношения выражают компоненты тензора скоростей деформаций через компоненты вектора скорости

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right); \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Физические соотношения определяют особенность поведения среды в отношении оказания сопротивления деформированию и имеют вид:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + (3\mu - 2\eta) \dot{\varepsilon}_{ij} + 2\eta \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad (19)$$

где μ и η — динамические коэффициенты объемной¹ и сдвиговой² вязкости, измеряемые в Па·с; $\dot{\varepsilon} = (\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33})/3$ — средняя скорость деформации; δ_{ij} — символ Кронекера, т.е.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Коэффициенты μ и η являются положительными величинами, характер изменения которых определяется многими факторами, в первую очередь — температурой, давлением и химическим составом рассматриваемой среды. В дальнейшем полагаем, что $\mu = 0$. Можно считать, что

$$\eta = \eta_0 \sqrt{T/T_0},$$

где η_0 — значение динамического коэффициента вязкости при температуре T_0 .

При рассмотрении системы исходных уравнений (12) — (19) нетрудно заметить, что она может быть преобразована путем исключения некоторых неизвестных функций.

Уравнение неразрывности (12) имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (20)$$

Из уравнений (13), (16), (18), (19) следует, что

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_i}{dt} &= b_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-\rho R T \cdot \delta_{ij} - \frac{2}{3} \left(\eta \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = \\ &= b_i - R \frac{\partial(\rho T)}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где $i = 1, 2, 3$, причем $b_1 = b_2 = 0$, $b_3 = -\rho g$.

Из уравнений (14) — (19) следует, что

$$\begin{aligned} c_v \rho \frac{dT}{dt} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[-\rho R T \cdot \delta_{ij} - \frac{2}{3} \left(\eta \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + 2\eta \dot{\varepsilon}_{ij} \right] \dot{\varepsilon}_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \sum_{i=1}^3 \left(\rho R T \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \eta \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)^2 + 2\eta \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \end{aligned}$$

¹ Динамический коэффициент объемной вязкости — величина, характеризующая свойство вязкости среды при деформации всестороннего сжатия, которое сопровождается изменением плотности среды.

² Динамический коэффициент сдвиговой вязкости — величина, характеризующая свойство вязкости среды при деформации чистого сдвига.

$$= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \rho R T \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \eta \left[-\frac{2}{3} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right)^2 \right], \quad (22)$$

где $\lambda = \lambda_0 \sqrt{T/T_0}$, $\eta = \eta_0 \sqrt{T/T_0}$.

Таким образом, составлена система из пяти уравнений, содержащая пять неизвестных v_1, v_2, v_3, ρ, T . Затем необходимо сформировать начальные и граничные условия для решаемой задачи. Например, начальные условия могут быть заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} v_1(0, x_1, x_2, x_3) &= v_\infty, \\ v_2(0, x_1, x_2, x_3) &= v_3(0, x_1, x_2, x_3) = 0, \\ \rho(0, x_1, x_2, x_3) &= \rho_0 = \text{const}, \\ T(0, x_1, x_2, x_3) &= T_0 = \text{const}, \end{aligned}$$

где x_1, x_2, x_3 — координаты точек вне твердого тела (шара), т.е. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > \frac{l^2}{4}$.

Граничные условия следует задавать на поверхности твердого тела. Так, для записи кинематической части граничных условий можно положить, что скорости точек среды и поверхности тела, находящихся в контакте, одинаковы. Это так называемое “условие прилипания” (или “условие сварки”), которое в данном случае имеет вид:

$$v_i(t, x_1, x_2, x_3) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad t > 0,$$

где x_1, x_2, x_3 — координаты точек на поверхности твердого тела (шара), т.е. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{l^2}{4}$.

На поверхности тела нужно задать и температурные граничные условия. Для этого, например, можно положить, что температура поверхности тела постоянна и равна T_1 . Тогда

$$T(t, x_1, x_2, x_3) = T_1 = \text{const}, \quad t > 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{l^2}{4}.$$

Очевидно, что v_1, v_2, v_3, ρ, T являются определяемыми параметрами. Их сразу представим в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_i &= \frac{v_i}{v_\infty}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \tilde{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_0}, \\ \tilde{T} &= \frac{T}{T_0}. \end{aligned}$$

Процесс взаимодействия тела с газовым потоком характеризуют 14 определяющих параметров: $x_1, x_2, x_3, t, l, v_\infty, \rho_0, T_0, R, \eta_0, \lambda_0, c_v, g, T_1$.

Если ввести безразмерные координаты $\xi_i = x_i / l$, $i = 1, 2, 3$, и безразмерную температуру тела $\vartheta = T_1 / T_0$, то их можно и не учитывать при построении матрицы размерности. Важно лишь на заключительной стадии формирования безразмерных комбинаций определяющих параметров в их число не забыть включить ξ_1, ξ_2, ξ_3 и ϑ .

Единицы измерения оставшихся параметров $t, \eta_0, \lambda_0, c_V, R, g, T_0, \nu_\infty, \rho_0, l$ можно выразить через основные единицы измерения.

$$\begin{aligned} [t] &= \text{с}, & [\eta_0] &= \text{Па} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \\ [\lambda_0] &= \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}}, & [c_V] &= \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{К}}, \\ [R] &= \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{К}}, & [g] &= \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \\ [T_0] &= \text{К}, & [\nu_\infty] &= \frac{\text{м}}{\text{с}}, \\ [\rho_0] &= \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, & [l] &= \text{м}. \end{aligned}$$

Очевидно, что матрица размерностей имеет 10 столбцов и 4 строки

$$\begin{matrix} & t & \eta_0 & \lambda_0 & c_V & R & g & T_0 & \nu_\infty & \rho_0 & l \\ \begin{matrix} \text{і} \\ \text{êã} \\ \text{ñ} \\ \text{Ê} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Ранг такой матрицы равен четырем. Тогда в силу П-теоремы из 10 параметров можно составить только 6 независимых безразмерных комбинаций. В каждой безразмерной комбинации показатели степени $x_1, x_2, \dots, x_{10}$, соответствующих параметрам $t, \eta_0, \lambda_0, c_V, R, g, T_0, \nu_\infty, \rho_0, l$, удовлетворяют однородной СЛАУ:

$$\begin{cases} x_8 - 3x_9 + x_{10} = x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 - x_6, \\ x_9 = -x_2 - x_3, \\ -x_8 = -x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6, \\ x_7 = x_3 + x_4 + x_5. \end{cases}$$

Путем несложных преобразований приведем систему к следующему виду

$$\begin{cases} x_{10} = -x_1 - x_2 - x_3 + x_6, \\ x_9 = -x_2 - x_3, \\ x_8 = x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 - 2x_6, \\ x_7 = x_3 + x_4 + x_5. \end{cases}$$

Для нахождения 6 независимых безразмерных комбинаций $\tilde{\Pi}_1, \tilde{\Pi}_2, \dots, \tilde{\Pi}_6$ составим следующую таблицу из нормальной фундаментальной системы решений однородной СЛАУ.

	t	η_0	λ_0	c_V	R	g	T_0	ν_∞	ρ_0	l
$\tilde{\Pi}_1$	1	0	0	0	0	0	0	1	0	-1
$\tilde{\Pi}_2$	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	-1
$\tilde{\Pi}_3$	0	0	1	0	0	0	1	-3	-1	-1
$\tilde{\Pi}_4$	0	0	0	1	0	0	1	-2	0	0
$\tilde{\Pi}_5$	0	0	0	0	1	0	1	-2	0	0
$\tilde{\Pi}_6$	0	0	0	0	0	1	0	-2	0	1

При помощи этой таблицы запишем выражения для безразмерных комбинаций:

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_1 &= \frac{v_\infty t}{l}, & \tilde{\Pi}_2 &= \frac{\eta_0}{v_\infty \rho_0 l}, & \tilde{\Pi}_3 &= \frac{\lambda_0 T_0}{v_\infty^3 \rho_0 l}, \\ \tilde{\Pi}_4 &= \frac{c_V T_0}{v_\infty^2}, & \tilde{\Pi}_5 &= \frac{R T_0}{v_\infty^2}, & \tilde{\Pi}_6 &= \frac{g l}{v_\infty^2}.\end{aligned}$$

При рассмотрении движения вязкой сжимаемой среды обычно используют несколько видоизмененную систему независимых безразмерных комбинаций:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \tilde{\Pi}_1 = \frac{v_\infty t}{l}, & \Pi_2 &= 1/\tilde{\Pi}_2 = \frac{v_\infty \rho_0 l}{\eta_0}, \\ \Pi_3 &= \frac{\tilde{\Pi}_4 + \tilde{\Pi}_5}{\tilde{\Pi}_4} = \frac{c_V + R}{c_V} = \gamma, & \Pi_4 &= \frac{\tilde{\Pi}_2 \cdot \tilde{\Pi}_4}{\tilde{\Pi}_3} \gamma = \frac{\gamma \eta_0 c_V}{\lambda_0}, \\ \Pi_5 &= \sqrt{\frac{1}{\gamma \tilde{\Pi}_5}} = \frac{v_\infty}{\sqrt{\gamma R T_0}}, & \Pi_6 &= \tilde{\Pi}_6 = \frac{g l}{v_\infty^2},\end{aligned}$$

где Π_1 называют *критерием динамической гомохронности* и обозначают

$$\text{Ho} = \frac{v_\infty t}{l}.$$

Безразмерная комбинация Π_2 является *критерием Рейнольдса* $\text{Re} = \frac{v_\infty l}{\eta_0 / \rho_0}$.

Безразмерную комбинацию Π_3 называют *показателем адиабаты* (или *показателем адиабатического процесса*) и обозначают $\gamma = 1 + R/c_V$. Для совершенного газа, состоящего из одноатомных молекул $\gamma \approx 1,67$. Если совершенный газ состоит из двухатомных молекул, то $\gamma \approx 1,40$. Если молекулы состоят из трех атомов $\gamma \approx 1,29$. Для воздуха, если его считать совершенным газом, можно принять $\gamma \approx 1,40$.

Безразмерная комбинация Π_4 является *критерием Прандтля*

$$\text{Pr} = \frac{c_P \nu_0}{\lambda_0} = \frac{(\gamma c_V \rho_0)(\eta_0 / \rho_0)}{\lambda_0},$$

где $c_P = \gamma c_V \rho_0$ — удельная теплоемкость в изобарном процессе; $\nu_0 = \eta_0 / \rho_0$ — кинематический коэффициент вязкости.

Безразмерную комбинацию Π_5 называют *критерием Маха* и обозначают

$$\text{M} = v_\infty / a_0,$$

где $a_0 = \sqrt{\gamma R T_0}$ — скорость звука в невозмущенном потоке.

Безразмерную комбинацию Π_6 называют *критерием Фруда* и обозначают

$$\text{Fr} = \frac{g l}{v_\infty^2}.$$

Запишем систему уравнений (20), (21) и (22), используя обозначения критериев. Тогда

$$\frac{d\tilde{\rho}}{d\text{Ho}} + \tilde{\rho} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \xi_i} = 0,$$

$$\tilde{\rho} \frac{d\tilde{v}_i}{d\text{Ho}} = -\tilde{\rho} \text{Fr} \delta_{3i} - \frac{1}{\gamma \text{M}^2} \frac{\partial(\tilde{\rho} \tilde{T})}{\partial \xi_i} - \frac{2}{3 \text{Re}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sqrt{\tilde{T}} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial \xi_k} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[\sqrt{\tilde{T}} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial \xi_i} \right) \right],$$

где $i = 1, 2, 3$,

$$\frac{\text{Re Pr}}{\gamma} \tilde{\rho} \frac{d\tilde{T}}{d\text{Ho}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sqrt{\tilde{T}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi_i} \right) - \text{Re Pr} \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \tilde{\rho} \tilde{T} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \xi_i} +$$

$$+ \text{Pr M}^2 (\gamma-1) \sqrt{\tilde{T}} \left[-\frac{2}{3} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \xi_i} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \xi_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \xi_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \xi_3} \right)^2 \right].$$

Полученную систему можно представить в следующем виде

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \text{Ho}} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\tilde{\rho} \tilde{v}_i) = 0,$$

$$\tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \text{Ho}} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \xi_j} \tilde{v}_j \right) =$$

$$= -\tilde{\rho} \text{Fr} \delta_{3i} - \frac{1}{\gamma \text{M}^2} \frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{T})}{\partial \xi_i} - \frac{2}{3 \text{Re}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sqrt{\tilde{T}} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial \xi_k} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[\sqrt{\tilde{T}} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial \xi_i} \right) \right],$$

где $i = 1, 2, 3$,

$$\frac{\text{Re Pr}}{\gamma} \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \text{Ho}} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi_j} \tilde{v}_j \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sqrt{\tilde{T}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi_i} \right) - \text{Re Pr} \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \tilde{\rho} \tilde{T} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \xi_i} +$$

$$+ \text{Pr M}^2 (\gamma-1) \sqrt{\tilde{T}} \left[-\frac{2}{3} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \xi_i} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \xi_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \xi_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \xi_3} \right)^2 \right].$$

Начальные условия с учетом введенных ранее обозначений приобретают вид:

$$\tilde{v}_1(0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = 1,$$

$$\tilde{v}_2(0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \tilde{v}_3(0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0,$$

$$\tilde{\rho}(0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = 1,$$

$$\tilde{T}(0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = 1,$$

где $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 > \frac{1}{4}$.

Затем, используя обозначения критериев, запишем граничные условия:

$$\tilde{v}_i(\text{Ho}, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\tilde{T}(\text{Ho}, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathcal{A},$$

где $\text{Ho} > 0$, $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \frac{1}{4}$.

Следовательно, в общем виде решение задачи механики вязкой сжимаемой среды можно представить следующим образом:

$$\tilde{v}_i = F_i(\text{Ho}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \mathcal{A}, \text{Re}, \gamma, \text{Pr}, \text{M}, \text{Fr}), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\tilde{\rho} = F_4(\text{Ho}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \mathcal{A}, \text{Re}, \gamma, \text{Pr}, \text{M}, \text{Fr}),$$

$$\tilde{T} = F_5(\text{Ho}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \mathcal{A}, \text{Re}, \gamma, \text{Pr}, \text{M}, \text{Fr}),$$

где F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 — функции многих переменных.

Замечание. Влияние *критерия Фруда* обычно существенно в случае, когда вес среды, вытесненный объемом твердого тела, сопоставим с весом тела. Например, при движении воздушного шара или дирижабля. В остальных случаях влиянием этого критерия можно пренебречь.

Известно, что при адиабатическом торможении газового потока его температура и плотность принимают значения

$$T^* = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right),$$

$$\rho^* = \rho_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}.$$

Следовательно, при $M < 0,5$ газовый поток можно считать несжимаемым.

Если $T_1 \approx T_0$, то безразмерную температуру тела $\mathcal{G} = T_1/T_0$ можно не считать аргументом функций F_i , $i = 1, 2, \dots, 5$.

При движении газа, вызванном объемными силами, обычно не удастся выбрать в качестве характерной скорости v_∞ какое-либо определенное значение. Тогда вместо *критериев Рейнольдса и Фруда* используют *критерий Галилея*

$$Ga = Re^2 Fr = \frac{g l^3}{\nu_0^2},$$

где $\nu_0 = \eta_0/\rho_0$ — кинематический коэффициент вязкости газа.

Объемные силы могут возникать за счет разности $\Delta\rho$ плотности газа в двух характерных точках области. Тогда *критерий Галилея* умножают на отношение $\Delta\rho/\rho_0$ и получают *критерий Архимеда*

$$Ar = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} Ga = \frac{g l^3 \Delta\rho}{\nu_0^2 \rho_0}.$$

Если разность плотности газа связана с разностью температур ΔT , то $\Delta\rho/\rho_0$ можно представить через коэффициент k объемного расширения, т.е.

$$\Delta\rho/\rho_0 = k \Delta T,$$

полагая величину k постоянной в данном интервале температур. Тогда получают *критерий Грасгофа*

$$Gr = k \Delta T Ga = \frac{g l^3 k \Delta T}{\nu_0^2}.$$

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОСТЕЙШИХ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

При всем разнообразии исследуемых объектов обычно удается представить их совокупностью взаимосвязанных простейших типовых элементов, описываемых сравнительно несложными моделями макроуровня.

Среди параметров, характеризующих состояние каждого такого элемента, обычно удается выделить величины, имеющие смысл потенциалов и потоков физических субстанций (например, разность электрических потенциалов и сила тока, разность температур и тепловой поток и т.п.). Эти величины будем называть *потенциальными* и *потокowymi* соответственно. Связь между этими величинами устанавливают при помощи так называемых *уравнений состояния элемента*.

Рассмотрение ММ простейших типовых элементов начнем с уравнений состояния простейших элементов электрической системы, а затем по аналогии с ними построим ММ типовых элементов других технических систем: механической, тепловой, гидравлической и пневматической.

3.1. Электрические двухполюсники

Электрический двухполюсник — участок электрической цепи, имеющий только две точки (полюса), соединяющие его с другими участками. Если в двухполюснике есть источники электрического напряжения или тока, то такой двухполюсник называют *активным*. Если в двухполюснике таких источников нет, то его называют *пассивным*. Так, например, к простейшим пассивным электрическим двухполюсникам относят резистор, конденсатор и катушку индуктивности, а к простейшим активным — источники электрического напряжения и тока.

Оказывается, что среди простейших типовых элементов технических систем существуют элементы со свойствами, аналогичными свойствам пассивных электрических двухполюсников: резистора (рис. 6, а), конденсатора без потерь заряда (рис. 6, б) и индуктивной катушки без сопротивления (рис. 6, в).

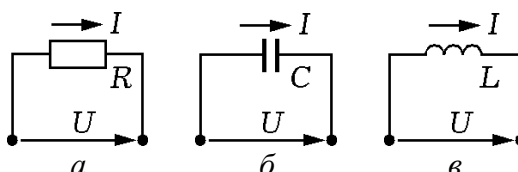


Рис. 6. Условные обозначения пассивных электрических двухполюсников: резистора (а), конденсатора (б), индуктивной катушки (в)

Резистор является характерным представителем типового элемента, обладающего свойством оказывать сопротивление переносу некоторой физической субстанции (в данном случае — электрических зарядов). Для прохождения через такой элемент потока этой субстанции необходимо располагать разностью потенциалов на входе в элемент и выходе из него. Конденсатор обладает свойством накапливать эту субстанцию при повышении разности потенциалов, а индуктивная катушка — свойством инерции, проявляющимся в стремлении сохранить поток этой субстанции неизменным.

Уравнением состояния резистора, которое описывает протекание через него электрического тока, является хорошо известная формула

$$U = IR,$$

закона Ома, где U и I — падение электрического напряжения (разность электрических потенциалов) на резисторе и сила тока, измеряемые в вольтах (В) и амперах (А) соответственно; R — *сопротивление* резистора, измеряемое в омах ($\text{Ом} = \text{В} / \text{А}$). Величину $1/R$ называют

проводимостью резистора, единицей измерения которой является сименс ($S_m = 1/\text{Ом}$). Электрическая энергия, затрачиваемая на преодоление сопротивления при протекании через резистор тока, переходит в тепловую энергию. Выделившееся количество теплоты Q за время t при протекании по этому участку постоянного тока, определяются по формуле

$$Q = I^2 R t.$$

Она отражает закон Джоуля-Ленца. Единицей измерения количества теплоты является джоуль (Дж). Мощность тепловыделения на резисторе равна

$$W = I^2 R = IU = \frac{U^2}{R}.$$

Мощность тепловыделения измеряют в ваттах ($W_t = B \cdot A$).

Электрический конденсатор обладает свойством накапливать электрический заряд Q_e , измеряемый в кулонах (Кл), пропорционально разности потенциалов U на его обкладках, причем

$$Q_e = CU,$$

где C — емкость конденсатора, измеряемая в фарадах (Ф). При изменении U во времени t сила тока в ветви, содержащей конденсатор с постоянной емкостью, равна

$$I = \frac{dQ_e}{dt} = C \frac{dU}{dt}.$$

Энергию электрического поля в конденсаторе, равную

$$E_e = \frac{Q_e U}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q_e^2}{2C},$$

измеряют в джоулях (Дж).

При изменении во времени силы тока, протекающего через индуктивную катушку, возникает электродвижущая сила (ЭДС) самоиндукции, препятствующая изменению силы тока. В случае идеализированной (без сопротивления) катушки на ее концах возникает разность потенциалов

$$U = L \frac{dI}{dt},$$

где L — ее индуктивность, измеряемая в генри (Гн).

При прохождении электрического тока через катушку возникает магнитное поле, и тогда каждый виток этой катушки пронизывается магнитным потоком. Сумма потоков, пронизывающих отдельные витки катушки, равна $\Psi = LI$. Величину Ψ называют потокосцеплением и измеряют в веберах (Вб). Энергия магнитного поля катушки, измеряемая в джоулях (Дж), равна

$$E_m = \frac{\Psi I}{2} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}.$$

Таким образом, уравнением состояния резистора является алгебраическое уравнение, а уравнения состояния для конденсатора и индуктивной катушки имеет форму обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) первого порядка.

Наряду с пассивными двухполюсниками к типовым элементам электрических цепей относят источники напряжения и тока, условное обозначение которых представлено на рис. 7, а и б соответственно.

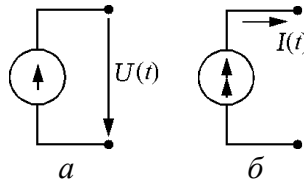


Рис. 7. Условные обозначения источников напряжения (а) и тока (б)

Идеальный источник электрического напряжения является активным двухполюсником, задающим на своих полюсах изменение разности потенциалов $U(t)$ во времени t по определенному закону, который не зависит от значения силы тока. Это означает, что такой источник имеет столь малое внутреннее сопротивление, что падением напряжения на таком сопротивлении можно пренебречь по сравнению с $U(t)$.

Идеальный источник электрического тока — активный двухполюсник, обладающий столь большим внутренним сопротивлением, что изменяющаяся по определенному закону $I(t)$ сила проходящего через такой источник тока не зависит от разности $U(t)$ потенциалов на его полюсах.

Пусть через резистор течет переменный во времени t ток силой

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (23)$$

где I_0 — амплитуда колебаний силы тока, ω — угловая частота и φ_0 — начальная фаза колебаний. Величину $\omega t + \varphi_0$ называют фазой колебаний. В соответствии с законом Ома для падения напряжения на резисторе с сопротивлением R получим

$$U_R(t) = I(t) R = I_0 R \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (24)$$

Таким образом, для резистора сила тока и падение напряжения имеют одинаковую начальную фазу колебаний (говорят, что они совпадают по фазе), и одновременно достигают нулевых, максимальных и минимальных значений. В этом случае средняя за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ колебаний силы тока мощность тепловыделения на резисторе равна

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) U_R(t) dt = \frac{I_0^2 R}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{I_0^2 R}{2},$$

т.е. она вдвое меньше наибольшего мгновенного значения мощности, соответствующего прохождению через тот же резистор постоянного тока I_0 .

Если изменяющийся по закону (23) ток течет через катушку с индуктивностью L , то на катушке возникнет падение напряжения

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = \omega L I_0 \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega L I_0 \sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}). \quad (25)$$

Если падение напряжения на конденсаторе емкостью C изменяется по закону

$$U_C(t) = -\frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}), \quad (26)$$

то в ветви, содержащей этот конденсатор, течет ток, изменяющийся по закону (23).

Используя показательную форму представления комплексного числа и формулу Эйлера, запишем формулы (23) — (26) в следующем виде:

$$\begin{aligned} I(t) &= \operatorname{Im}\left(I_0 e^{i\varphi_0} e^{i\omega t}\right) = \operatorname{Im}\left(\hat{I} e^{i\omega t}\right), \\ U_R(t) &= \operatorname{Im}\left(I_0 R e^{i\varphi_0} e^{i\omega t}\right) = \operatorname{Im}\left(\hat{U}_R e^{i\omega t}\right), \\ U_L(t) &= \operatorname{Im}\left(\omega L I_0 e^{i\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)} e^{i\omega t}\right) = \operatorname{Im}\left(\hat{U}_L e^{i\omega t}\right), \\ U_C(t) &= \operatorname{Im}\left(\frac{I_0}{\omega C} e^{i\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)} e^{i\omega t}\right) = \operatorname{Im}\left(\hat{U}_C e^{i\omega t}\right), \end{aligned}$$

где $\hat{I} = I_0 e^{i\varphi_0}$, $\hat{U}_R = I_0 R e^{i\varphi_0}$, $\hat{U}_L = \omega L I_0 e^{i\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$, $\hat{U}_C = \frac{I_0}{\omega C} e^{i\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)}$ — комплексные амплитуды

силы тока и соответствующих падений напряжения, i — мнимая единица, $\operatorname{Im} z$ — мнимая часть комплексного числа z . Отношения

$$\begin{aligned} Z_R &= \frac{\hat{U}_R}{\hat{I}} = R, \\ Z_L &= \frac{\hat{U}_L}{\hat{I}} = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega L, \\ Z_C &= \frac{\hat{U}_C}{\hat{I}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\omega C} = -\frac{i}{\omega C} \end{aligned}$$

являются комплексными сопротивлениями соответствующих электрических двухполюсников или импедансами (от латинского слова *impedio* — препятствую). При этом ωL и $\frac{1}{\omega C}$ назы-

вают индуктивным и емкостным сопротивлением соответственно. В общем случае комплексное сопротивление Z участка цепи имеет действительную и мнимую части. Действительную часть комплексного сопротивления называют активным сопротивлением, а мнимую часть — реактивным.

Если резистор, индуктивную катушку и конденсатор рассматривать как звено, преобразующее входной сигнал (силу тока) в выходной сигнал (падение напряжения), то соответствующее комплексное сопротивление является комплексным передаточным числом этого звена или комплексным коэффициентом усиления. Зависимости модуля $A(\omega)$ комплексного передаточного числа и главного значения аргумента $\beta(\omega)$ этого числа от угловой частоты ω называют соответственно амплитудно-частотной и фазочастотной характеристиками звена. С помощью этих характеристик комплексное передаточное число Z можно представить в виде $Z = A(\omega) e^{i\beta(\omega)}$.

Замечание. Рассмотренные двухполюсники являются идеализированными по отношению к реальным элементам технических систем. Поэтому применение ММ таких простейших типовых элементов для описания реальных систем вызовет неизбежные погрешности и об этом не следует забывать.

3.2. Простейшие элементы механических систем

Пусть величина v проекции скорости скольжения тела на выбранную координатную ось Ox пропорциональна величине P проекции приложенной силы на эту ось (рис. 8), тогда

$$P = k_{\text{тр}} S v,$$

где $k_{\text{тр}}$ — коэффициент вязкого (линейного) трения, измеряемый в $\text{Н} \cdot \text{с} / \text{м}^3$; S — площадь поверхности контакта.

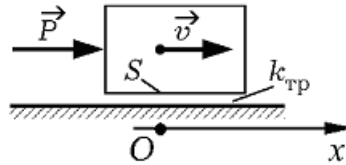


Рис. 8. Схема скольжения тела по поверхности

Если в качестве потенциальной величины выбрать величину P , а в качестве потоковой — величину v , то записанное равенство можно сопоставить с уравнением состояния резистора. Тогда аналогами падения электрического напряжения и силы тока являются величины P и v соответственно. Аналогом электрического сопротивления является величина $R_{\text{М}} = k_{\text{тр}} S$. Величину $R_{\text{М}}$ измеряют в $\text{кг} / \text{с}$, так как единицами измерения силы и скорости являются соответственно $\text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$ и $\text{м} / \text{с}$.

Пусть величина ω проекции угловой скорости вращения цапфы вала (рис. 9) на ось вращения пропорциональна величине M проекции вращающего момента на эту ось, тогда

$$M = k_{\text{тр}} \cdot 2\pi r l \cdot r^2 \omega = 2\pi k_{\text{тр}} r^3 l \cdot \omega,$$

где M — величина, измеряемая в $\text{Н} \cdot \text{м}$; ω — величина, единицей измерения которой является рад/с; r и l — радиус и длина цапфы соответственно.

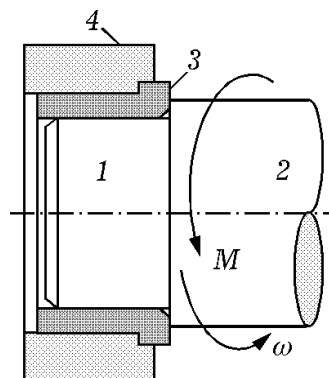


Рис. 9. Схема вращения цапфы вала относительно вкладыша подшипника: 1 — цапфа вала; 2 — вал; 3 — вкладыш подшипника скольжения; 4 — подшипник скольжения

Если в качестве потенциальной величины выбрать величину M , а в качестве потоковой — величину ω , то аналогами падения электрического напряжения и силы тока являются величины M и ω соответственно. Аналогом электрического сопротивления является величина $R_{\text{М}}^0 = 2\pi k_{\text{тр}} r^3 l$, измеряемая в $\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

При относительном перемещении отдельных элементов механической системы на поверхности их контакта возникают силы трения, препятствующие этому перемещению. При движении против сил трения совершается работа. Мощность, требуемая для преодоления трения при поступательном движении, равна $W_{\text{тр}} = P v = R_M v^2$, а при вращательном — $W_{\text{тр}} = M \omega = R_M^o \omega^2$. Эта мощность является аналогом мощности тепловыделения на резисторе.

В технических устройствах различного назначения часто используют узлы крепления. Такую механическую связь характеризуют жесткостью, под которой понимают отношение силы, приложенной к такому узлу, к перемещению точки приложения этой силы. Далее рассмотрим простейшую схему узла крепления (рис. 10).

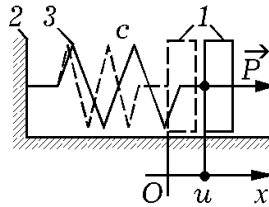


Рис. 10. Схема узла крепления детали к неподвижному основанию: 1 — деталь; 2 — неподвижное основание; 3 — пружина

Пусть деталь крепится к неподвижному основанию с помощью пружины, жесткость которой равна c . Жесткостью пружины называют отношение $c = P/u$, измеряемое в $\text{Н/м} = \text{кг/с}^2$, где P — величина проекции силы на координатную ось Ox инерциальной системы отчета; u — перемещение точки приложения силы, причем при $u = 0$ пружина не деформирована. Изменение во времени t силы приведет к изменению перемещения u . Если пренебречь массой пружины, а значение c считать постоянным, то после дифференцирования левой и правой частей равенства $u(t) = P(t)/c$ по времени получим

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dP}{dt} \quad \text{или}$$

$$v = \frac{du}{dt} = C_M \frac{dP}{dt}, \quad (27)$$

где v — проекция скорости перемещения точки приложения силы; $C_M = 1/c$ — податливость пружины, измеряемая в м/Н . Величину C_M можно рассматривать как аналог емкости электрического конденсатора. Очевидно, что величины u и v являются аналогами электрического заряда Q_e конденсатора и силы электрического тока $I = \frac{dQ_e}{dt}$ соответственно.

При растяжении или сжатии пружины величина потенциальной энергии Π равна работе силы, совершаемой при перемещении точки приложения этой силы. Если считать, что при $u = 0$ потенциальная энергия пружины равна нулю, то

$$\Pi = \int_0^u P dx = \int_0^u \frac{x}{C_M} dx = \frac{u^2}{2 C_M} = \frac{C_M P^2}{2}, \quad (28)$$

Эта энергия является аналогом энергии электрического поля в конденсаторе. Полученные зависимости (27) и (28) характерны для многих элементов, материал которых при нагружении сохраняет свойство линейной упругости.

Если рассмотреть растяжение линейно упругого невесомого стержня с поперечным сечением площадью S (рис. 11), то в соответствии с законом Гука относительная деформация стержня равна

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{ES},$$

где $\sigma = P/S$ — механическое напряжение в поперечном сечении стержня; E — модуль упругости материала стержня при растяжении (модуль Юнга), измеряемый в паскалях $\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$.

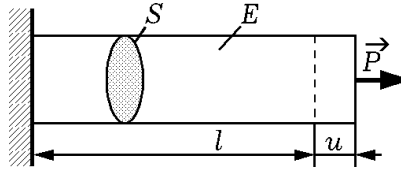


Рис. 11. Схема растяжения линейно упругого стержня

При этом торец стержня, подверженный действию силы, переместится относительно закреплённого торца на расстояние

$$u = \varepsilon l = \frac{Pl}{ES},$$

где l — начальная длина стержня. Тогда после дифференцирования левой и правой частей этого равенства по времени получим

$$\frac{du}{dt} = \frac{l}{ES} \cdot \frac{dP}{dt} \quad \text{или} \\ v = \frac{du}{dt} = \tilde{C}_M \frac{dP}{dt},$$

где $\tilde{C}_M = \frac{l}{ES}$ — податливость линейно упругого стержня при продольном растяжении. Эта величина является аналогом ёмкости электрического конденсатора.

Затем рассмотрим кручение упругого невесомого стержня длиной l (рис. 12).

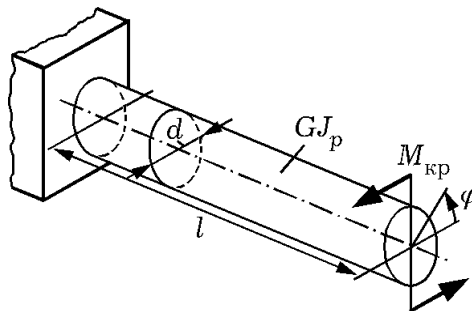


Рис. 12. Схема кручения упругого стержня

Если один из концов упругого стержня жестко закреплен, а ко второму приложен крутящий момент, то угол закручивания стержня будет

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{G J_p},$$

где $M_{\text{кр}}$ — величина проекции крутящего момента на ось кручения; G — модуль сдвига материала стержня, который измеряют в Па; J_p — полярный момент инерции сечения стержня, единицей измерения которого является м^4 .

Для стержня с круглым поперечным сечением диаметра d полярный момент инерции равен $\pi d^4 / 32$. Произведение величин G и J_p называют жесткостью сечения при кручении.

Дифференцированием по времени t находим

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{l}{G J_p} \frac{dM_{\text{кр}}}{dt} \text{ или} \\ \omega &= \frac{d\varphi}{dt} = C_M^o \frac{dM_{\text{кр}}}{dt}, \end{aligned}$$

где ω — проекция на ось кручения угловой скорости поворота конца стержня, к которому приложен крутящий момент; $C_M^o = \frac{l}{G J_p}$ — податливость упругого стержня при кручении.

Эту величину измеряют в $\frac{1}{\text{Н} \cdot \text{м}}$.

Если в качестве потенциальной величины выбрать величину $M_{\text{кр}}$, а в качестве потоковой — величину ω , то аналогами падения электрического напряжения и силы тока являются величины $M_{\text{кр}}$ и ω соответственно. Тогда величину C_M^o можно рассматривать как аналог емкости электрического конденсатора.

Таким образом, при различном выполнении упругих элементов механической системы можно установить зависимости, аналогичные уравнению состояния электрического конденсатора.

Соотношение, аналогичное уравнению состояния индуктивной катушки можно получить непосредственно из второго закона Ньютона. Действительно, в случае поступательного движения тела массой m , к которому приложена сила, справедливо

$$P = m \frac{dv}{dt},$$

где P — величина проекции силы на выбранную координатную ось инерциальной системы отчета; v — величина проекции на эту ось скорости тела.

Если в качестве потенциальной величины выбрать величину P , а в качестве потоковой — величину v , то записанное равенство можно сопоставить с уравнением состояния индуктивной катушки. Тогда аналогом индуктивности катушки является масса тела.

В случае вращения тела относительно фиксированной оси под действием вращающего момента относительно этой оси справедливо

$$M = J \frac{d\omega}{dt},$$

где M — величина проекции момента на ось вращения; J — момент инерции тела относительно оси вращения; ω — проекция на ось вращения угловой скорости. Если в качестве потенциальной величины выбрать величину M , а в качестве потоковой — величину ω , то аналогом индуктивности катушки является момент инерции тела относительно оси вращения, измеряемый в $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

Продолжая аналогию с катушкой индуктивности, приходим к выводу, что аналогом импульса при поступательном движении тела или момента импульса при вращении тела будет потокосцепление $\Psi = L I$ катушки индуктивностью L , через которую протекает электрический ток силой I . Аналогом кинетической энергии при поступательном или вращательном движении является энергия магнитного поля индуктивной катушки.

Выявленную аналогию между величинами механических и электрических систем удобно представить в виде табл. 1.

Таблица 1

Аналогия между величинами механических и электрических систем

Величины механической системы	Величины электрической системы
P, M	падение электрического напряжения U
v, ω	сила электрического тока I
R_M, R_M^o	электрическое сопротивление R
податливость C_M, C_M^o	электрическая емкость C
масса m , момент инерции J	индуктивность L
перемещение u , угол φ	электрический заряд Q_e
$mv, J\omega$	потокосцепление $\Psi = L I$
потенциальная энергия Π	энергия электрического поля E_e
кинетическая энергия K	энергия магнитного поля E_m

Аналогию между ММ типовых элементов механических систем и электрических двухполюсников называют *электромеханической*. Ее удобно использовать при построении ММ сложных механических систем, состоящих из большого числа взаимодействующих между собой элементов.

Замечание. Рассмотренные простейшие элементы механических систем являются идеализированными по отношению к реальным элементам технических систем. Поэтому применение ММ таких простейших типовых элементов для описания реальных систем вызовет неизбежные погрешности и об этом не следует забывать.

3.3. Некоторые элементы тепловых систем

Под тепловыми системами будем понимать такие технические системы, в которых происходит накопление или перенос тепловой энергии.

Многие элементы конструкции тепловых систем могут быть сведены к РС плоской стенки толщиной h (рис. 13).

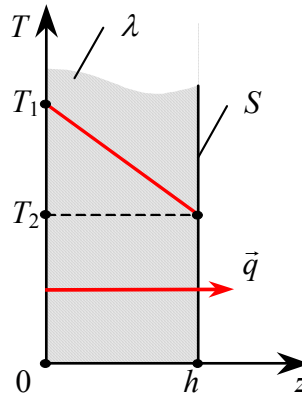


Рис. 13. Расчетная схема плоской стенки

Если на поверхностях стенки, материал которой имеет постоянный коэффициент теплопроводности λ , заданы постоянные значения температуры T_1 и T_2 , то установившееся распределение температуры по толщине стенки будет линейным:

$$T(z) = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{z}{h} = T_1 - \Delta T \frac{z}{h}, \quad z \in (0, h),$$

где $\Delta T = T_1 - T_2$ — разность (перепад) температур, а z — координата, отсчитываемая внутрь стенки от поверхности с температурой T_1 . В этом можно убедиться, если найти решение одномерного уравнения Лапласа

$$\frac{d^2 T(z)}{dz^2} = 0,$$

которое, как известно, описывает стационарное температурное поле в плоской стенке. В соответствии с законом теплопроводности Фурье величина теплового потока q , проходящего через поверхность стенки площадью S , равна $q = S \lambda \frac{\Delta T}{h}$. Отсюда получаем зависимость

$$\Delta T = q \frac{h}{\lambda S} \text{ или}$$

$$\Delta T = q \cdot R_T, \quad (29)$$

где $R_T = \frac{h}{\lambda S}$.

Если в качестве потенциальной величины выбрать разность температур ΔT , а в качестве потоковой — тепловой поток q , то записанное равенство можно сопоставить с уравнением состояния резистора. Тогда аналогами падения электрического напряжения и силы тока являются разность температур ΔT и тепловой поток q соответственно. Аналогом электрического сопротивления является величина R_T , которую называют *термическим сопротивлением* плоской стенки и измеряют в $\frac{\text{К}}{\text{Вт}}$, так как единицами измерения температуры и теплового потока являются кельвины (К) и ватты (Вт) соответственно.

Если стенка на рис. 13 состоит из нескольких плоских слоев, то R_T в формуле (29) следует рассматривать как суммарное термическое сопротивление, равное сумме термических сопротивлений всех слоев. При неидеальном тепловом контакте между слоями в эту сумму должны войти контактные термические сопротивления.

Один из распространенных в природе и технике видов теплового взаимодействия тела с окружающей средой состоит в теплообмене между ними при движении среды относительно тела. Такой вид взаимодействия носит название *конвективного теплообмена*.

В общем случае конвективный теплообмен — это передача энергии в форме теплоты между неравномерно нагретыми частями газов, жидкостей или газами, жидкостями и твердыми телами. Конвективный теплообмен осуществляется при движении частей газа, жидкости друг относительно друга или по отношению к твердым телам. Например, в батареях водяного отопления энергия от горячей воды передается конвективным теплообменом к менее нагретым стенкам батареи.

При конвективном теплообмене между телом и окружающей средой справедливо

$$q = \alpha(T_C - T)S, \quad (30)$$

где T — температура тела; T_C — температура окружающей среды; S — площадь поверхности тела; α — коэффициент теплоотдачи (коэффициент конвективного теплообмена), измеряемый в $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$. Тогда величину

$$R_T^\alpha = \frac{T_C - T}{q} = \frac{1}{\alpha S}$$

можно рассматривать как термическое сопротивление, которое преодолевает тепловой поток при переносе тепловой энергии от среды к телу при условии, что $T_C > T$, или от тела к среде при $T_C < T$.

Многие элементы тепловых систем изготавливают из материала с высокой теплопроводностью. В этом случае их температура достаточно быстро выравнивается во всех направлениях и тепловое состояние допустимо характеризовать лишь одним значением температуры в текущий момент времени. Если в любой момент времени t тепловое состояние тела допустимо считать однородным по всему объему тела и характеризовать лишь одним значением температуры $T(t)$, то такое тело называют *высокотеплопроводным*.

Внутренняя энергия такого (твердого) тела, измеряемая в джоулях (Дж), равна

$$U(t) = \iiint_V \left(\int_0^{T(t)} c dT \right) dv,$$

где c — удельная объемная теплоемкость материала, измеряемая в $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}$. В общем случае она зависит от температуры T и координат (когда конструкция выполнена из различных материалов).

При изменении температуры T во времени внутренняя энергия этого тела изменяется со скоростью

$$\frac{dU}{dt} = \left(\iiint_V c dv \right) \frac{dT}{dt}. \quad (31)$$

Величину $C_T = \iiint_V c dv$, измеряемую в Дж/К, называют *полной теплоемкостью* тела. Равенство

(31) получено в результате дифференцирования внутреннего интеграла по переменному верхнему пределу $T(t)$.

Согласно закону сохранения энергии внутренняя энергия тела может изменяться за счет подвода к телу тепловой энергии или ее отвода от него. Если подвод или отвод энергии проис-

ходит путем теплового взаимодействия тела с окружающей средой, то это взаимодействие можно характеризовать величиной теплового потока q , который примем положительным в случае подвода тепловой энергии к поверхности тела. Тогда

$$\frac{dU}{dt} = q \text{ или}$$

$$q = C_T \frac{dT}{dt}. \quad (32)$$

Записанное равенство можно сопоставить с уравнением состояния конденсатора. В этом случае величину C_T можно рассматривать как аналог емкости электрического конденсатора.

Выявленную аналогию между величинами тепловых и электрических систем удобно представить в виде табл. 2.

Таблица 2

Аналогия между величинами тепловых и электрических систем

Величины тепловой системы	Величины электрической системы
разность температур ΔT	падение электрического напряжения U
тепловой поток q	сила электрического тока I
термическое сопротивление R_T, R_T^α	электрическое сопротивление R
полная теплоемкость C_T	электрическая емкость C

Аналогия между ММ элементов тепловых систем и электрических двухполюсников принято называть *электротепловой*. Эта аналогия позволяет для сложной тепловой системы построить эквивалентную схему в виде электрической цепи, а затем использовать хорошо разработанные и формализованные приемы получения ММ электрических цепей для построения ММ рассматриваемой тепловой системы.

Пример. Рассмотрим процесс конвективного теплообмена высокотеплопроводного твердого тела с окружающей средой, температура которой постоянна и равна T_C (рис. 14).

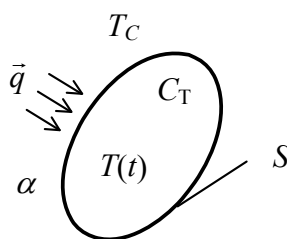


Рис. 14. Расчетная схема конвективного теплообмена твердого тела с окружающей средой

Для построения ММ такой тепловой системы подставим (30) в (32) и получим ОДУ первого порядка

$$C_T \frac{dT}{dt} = \alpha (T_C - T) S \text{ или}$$

$$C_T \frac{dT}{dt} = \frac{T_C - T}{R_T^\alpha},$$

где $T(t)$ — температура тела; T_C — температура окружающей среды; C_T — полная теплоемкость тела; α — коэффициент конвективного теплообмена; S — площадь поверхности тела; R_T^α — термическое сопротивление.

При постоянных значениях C_T , α , T_C и известной начальной температуре T_0 тела в момент времени $t = 0$ это ОДУ имеет решение, которое можно записать в следующем виде

$$\frac{T_C - T(t)}{T_C - T_0} = \exp\left(-\frac{\alpha S}{C_T} t\right) = \exp\left(-\frac{t}{R_T^\alpha C_T}\right).$$

Выявленная ранее аналогия позволяет перейти от РС процесса конвективного теплообмена тела к эквивалентной схеме в виде электрической цепи (рис. 15).

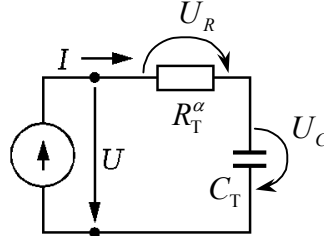


Рис. 15. Эквивалентная схема в виде электрической цепи

Она состоит из источника электрического напряжения, резистора и конденсатора, причем аналогами величин I и U являются поток q и разность температур $T_C - T_0$ соответственно. Тогда аналогами величин U_R и U_C становятся разности температур $T_C - T$ и $T - T_0$ в рассматриваемой тепловой системе. Очевидно, что аналогичными будут и ММ, описывающие процессы в тепловой системе и в электрической цепи.

Замечание. Рассмотренные простейшие элементы тепловых систем являются идеализированными по отношению к реальным элементам технических систем. Поэтому применение ММ таких простейших типовых элементов для описания реальных элементов систем вызовет неизбежные погрешности.

Так, например, закон теплопроводности Фурье предполагает, что скорость распространения тепловой энергии в материале бесконечно велика. На самом деле в реальном материале неизбежно некоторое запаздывание возникновения теплового потока по отношению к появлению разности температур в окрестности некоторой точки. Величина такого запаздывания зависит от механизма передачи тепловой энергии в материале и связана со временем обмена энергией между отдельными элементами микроструктуры материала (например, в металлах время обмена энергией между электронным газом и ионами в узлах кристаллической решетки имеет порядок 10^{-10} с). Время запаздывания возрастает по мере уменьшения удельной объемной теплоемкости и плотности теплопроводящей среды. В случае рассмотрения быстропротекающих процессов, связанных с переносом тепловой энергии указанный эффект запаздывания начинает играть заметную роль и его следует учитывать. Этот эффект аналогичен влиянию индуктивности в электрической цепи.

3.4. Некоторые элементы гидравлических систем

Перейдем к рассмотрению простейших типовых элементов технических систем, в которых происходит перемещение несжимаемой жидкости. Такие системы принято называть гидравлическими.

Известно, что для участка достаточно длинного трубопровода с круглым поперечным сечением радиуса r_* при установившемся ламинарном течении¹ вязкой жидкости справедлива следующая зависимость скорости

$$v_z(r) = \frac{r_*^2 - r^2}{4\eta l} \Delta p$$

вдоль оси трубопровода от радиальной координаты r , где η — коэффициент внутреннего трения (или динамический коэффициент вязкости) жидкости, измеряемый в Па·с; $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$ — разность (перепад) давления, приходящийся на участок длиной l трубопровода (рис. 16).

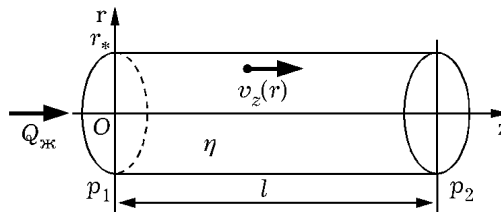


Рис. 16. Расчетная схема участка трубопровода

Приведенная выше зависимость позволяет вычислить объемный расход

$$Q_{\text{ж}} = \int_0^{r_*} 2\pi r v_z(r) dr = \frac{\pi \Delta p}{2\eta l} \int_0^{r_*} r (r_*^2 - r^2) dr = \frac{\pi r_*^4}{8\eta l} \Delta p \quad (33)$$

жидкости через участок трубопровода. Уравнение (33) можно записать в следующем виде

$$\Delta p = Q_{\text{ж}} R_{\Gamma}, \quad (34)$$

где $R_{\Gamma} = \frac{8\eta l}{\pi r_*^4}$.

Если в качестве потенциальной величины выбрать перепад давлений Δp , а в качестве потоковой — объемный расход $Q_{\text{ж}}$ жидкости, то записанное равенство (34) можно сопоставить с уравнением состояния резистора. Тогда аналогами падения электрического напряжения и силы тока являются перепад давлений Δp и объемный расход $Q_{\text{ж}}$ жидкости соответственно. Аналогом электрического сопротивления является величина R_{Γ} , которую можно рассматривать как *гидравлическое сопротивление* участка трубопровода. Ее измеряют в $\frac{\text{кг}}{\text{м}^4 \cdot \text{с}} = \frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}$, так как единицами измерения Δp и $Q_{\text{ж}}$ являются паскаль (Па) и м³/с соответственно. В общем случае, когда поперечное сечение трубопровода некруглое, гидравлическое сопротивление такого участка трубопровода зависит от формы этого сечения.

¹ Возможны два качественно различных типа течения вязкой жидкости — ламинарное и турбулентное. Ламинарным называется упорядоченное течение жидкости, при котором траектория соседних частиц мало отличается друг от друга, так что жидкость можно рассматривать как совокупность отдельных слоев, движущихся с разными скоростями. Турбулентным называется течение жидкости, при котором его частицы совершают неустановившееся неупорядоченное движение по сложным траекториям, в результате чего происходит интенсивное перемешивание различных слоев движущейся жидкости. Ламинарное течение может быть как установившимся, так и неустановившимся, а турбулентное — только неустановившимся.

Рассмотрим цилиндрический резервуар с вертикально расположенной образующей и поперечным сечением площадью S , заполняемый идеальной (невязкой) жидкостью через трубопровод, присоединенный ко дну резервуара (рис. 17).

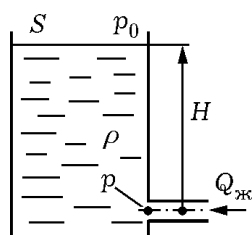


Рис. 17. Расчетная схема цилиндрического резервуара, заполняемого через трубопровод

Пусть давление p на входе трубопровода в резервуар определяется следующим соотношением $p = p_0 + \rho g H$, где p_0 — давление окружающей среды над поверхностью жидкости; ρ — плотность жидкости; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения; H — высота уровня жидкости в резервуаре. Оно справедливо в том случае, когда скорость v течения жидкости в трубопроводе достаточно мала. Запишем это соотношение в следующем виде

$$\Delta p = \rho g H,$$

где $\Delta p = p - p_0$ — разность давлений. Следовательно, изменения во времени t разности давлений и уровня жидкости связаны между собой зависимостью

$$\frac{d \Delta p}{dt} = \rho g \frac{d H}{dt}.$$

Объемный расход жидкости через трубопровод считаем положительным при заполнении резервуара. Тогда запишем

$$Q_{\text{ж}} = S \frac{dH}{dt} = \frac{S}{\rho g} \frac{d \Delta p}{dt} \text{ или}$$

$$Q_{\text{ж}} = C_{\Gamma} \frac{d \Delta p}{dt},$$

где $C_{\Gamma} = \frac{S}{\rho g}$ — величина, измеряемая в $\frac{\text{м}^4 \cdot \text{с}^2}{\text{кг}}$. Полученное уравнение можно сопоставить с

уравнением состояния электрического конденсатора, а величину C_{Γ} можно рассматривать как аналог емкости конденсатора и называть *гидравлической емкостью* резервуара.

Пусть через участок горизонтального цилиндрического трубопровода длиной l течет идеальная (невязкая) жидкость со скоростью $v(t)$ (рис. 18).

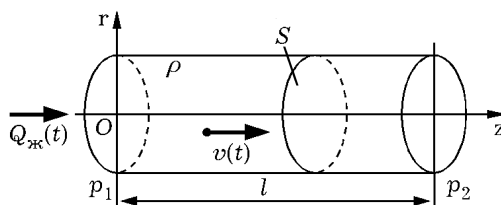


Рис. 18. Расчетная схема участка трубопровода

Очевидно, что объемный расход несжимаемой жидкости через участок цилиндрического трубопровода с площадью S поперечного сечения можно найти по формуле

$$Q_{\text{ж}}(t) = v(t) S.$$

Согласно закону сохранения количества движения скорость изменения количества движения любого индивидуального объема материального континуума равна сумме равнодействующих внешних (объемных и поверхностных) сил, действующих на этот объем. Тогда

$$\frac{d}{dt} \iiint_V v \rho dv = S(p_1 - p_2) = S \Delta p,$$

где ρ — плотность жидкости; $\Delta p = p_1 - p_2$ — разность давлений. Так как жидкость является несжимаемой и ее скорость на данном участке трубопровода зависит только от времени t , то

$$\rho l S \frac{dv}{dt} = \rho l \frac{dQ_{\text{ж}}(t)}{dt} = S \Delta p.$$

Затем запишем

$$\Delta p = \frac{\rho l}{S} \cdot \frac{dQ_{\text{ж}}}{dt} \quad \text{или} \\ \Delta p = L_{\Gamma} \frac{dQ_{\text{ж}}}{dt}, \quad (35)$$

где $L_{\Gamma} = \frac{\rho l}{S}$ — величина, измеряемая в $\frac{\text{кг}}{\text{м}^4}$. Полученное уравнение можно сопоставить с уравнением состояния катушки индуктивности, а величину L_{Γ} можно рассматривать как аналог индуктивности катушки и назвать *гидравлической индуктивностью* участка трубопровода.

Итак, в гидравлических системах можно выделить простейшие элементы, свойства которых аналогичны свойствам простейших пассивных электрических двухполюсников: резистору, конденсатору без потерь заряда и индуктивной катушки без сопротивления. Выявленную аналогию между величинами гидравлических и электрических систем удобно представить в виде табл. 3

Таблица 3

Аналогия между величинами гидравлических и электрических систем

Величины гидравлической системы	Величины электрической системы
перепад давления Δp	падение электрического напряжения U
объемный расход $Q_{\text{ж}}$	сила электрического тока I
гидравлическое сопротивление R_{Γ}	электрическое сопротивление R
гидравлическая емкость C_{Γ}	электрическая емкость C
гидравлическая индуктивность L_{Γ}	индуктивность L

Аналогию между ММ типовых элементов гидравлических систем и электрических двухполюсников называют *электрогидравлической*. Она дает возможность в случае сложной гидравлической системы построить ее эквивалентную схему в виде электрической цепи, а затем использовать хорошо разработанные и формализованные приемы получения ММ электрических цепей для построения ММ рассматриваемой гидравлической системы.

Пример. Используя идеализированные элементы гидравлических систем, учтем некоторые особенности неустановившегося ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в горизонтальном участке цилиндрического трубопровода, на концах которого перепад давления изменяется по известному закону $\Delta p(t)$. Для этого рассмотрим схему участка трубопровода длиной l с круглым поперечным сечением радиуса r_* (рис. 19).

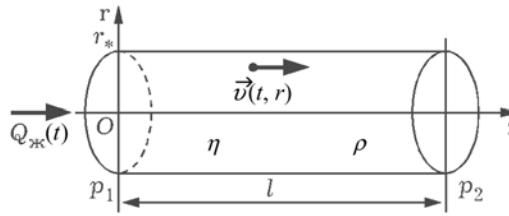


Рис. 19. Расчетная схема участка трубопровода

Очевидно, что по трубопроводу с переменным во времени объемным расходом $Q_{\text{ж}}(t)$ течет вязкая несжимаемая жидкость плотностью ρ . Это означает, что кроме гидравлической индуктивности участка трубопровода неизбежно возникает гидравлическое сопротивление, влияние которого можно учесть аналогично учету электрического сопротивления индуктивной катушки. Тогда, используя соотношения (34) и (35), получим ОДУ первого порядка

$$L_{\Gamma} \frac{dQ_{\text{ж}}}{dt} + R_{\Gamma} Q_{\text{ж}} = \Delta p(t),$$

где $L_{\Gamma} = \frac{\rho l}{\pi r_*^2}$ и $R_{\Gamma} = \frac{8\eta l}{\pi r_*^4}$ — гидравлическая индуктивность и гидравлическое сопротивление участка трубопровода соответственно.

Выявленная ранее аналогия позволяет перейти от РС участка трубопровода к эквивалентной схеме в виде электрической цепи (рис. 20).

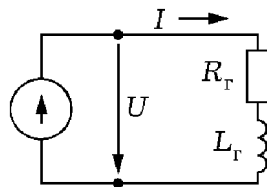


Рис. 20. Эквивалентная схема в виде электрической цепи

Она состоит из источника электрического напряжения, резистора сопротивлением R_{Γ} и катушки индуктивностью L_{Γ} . Аналогами величин I и U являются объемный расход $Q_{\text{ж}}$ жидкости и перепад давления Δp соответственно. Очевидно, что аналогичными будут и ММ, описывающие процессы в гидравлической системе и в электрической цепи.

Замечание. Приведенные выше простейшие элементы гидравлических систем являются идеализированными по отношению к реальным элементам технических систем. Поэтому применение ММ таких простейших типовых элементов для описания реальных элементов систем вызовет неизбежные погрешности и об этом не следует забывать.

Например, при построении ММ простейших типовых элементов предполагалось, что возмущения, вызванные изменением давления или объемного расхода жидкости в трубопроводе, распространяются вдоль трубопровода мгновенно. В действительности реальные жидкости обладают некоторой сжимаемостью. Это приводит к тому, что возмущения распространяются с довольно большой, но конечной скоростью a , называемой скоростью звука в жидкости. Поэтому такие ММ не используют при моделировании, например, процесса перекрытия одного из концов трубопровода, длиной l , задвижкой за время менее чем $2l/a$, когда в перекрываемом сечении объемный расход жидкости падает до нуля, а давление значительно повышается. Этот эффект, называемый *гидравлическим ударом*, удастся учесть, если от ММ макроуровня перейти к модели микроуровня.

3.5. Особенности пневматических систем

Рассмотрим некоторые особенности простейших типовых элементов технических систем, в которых происходит перемещение сжимаемой среды, например воздуха или газа. Такие системы называют *пневматическими*.

Основное отличие пневматической системы от гидравлической состоит в том, что плотность ρ рабочей среды существенно зависит от давления p . В дальнейшем в качестве рабочей среды используем *совершенный газ*. Газ называют *совершенным*, если для него справедливо уравнение Клапейрона-Менделеева.

$$p = \rho RT,$$

где T — температура газа, R — удельная газовая постоянная для данного газа, которую измеряют в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

В пневматической системе, как и в гидравлической, в качестве потенциальной величины выбирают перепад давлений Δp . Однако, в качестве потоковой величины вместо объемного расхода используют массовый расход $\dot{m}$, который измеряют в кг/с.

Пусть в резервуаре объема V находится газ, имеющий температуру T , плотность ρ и давление p (рис. 21).

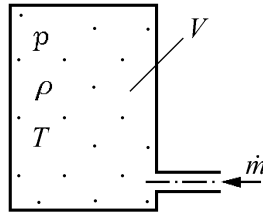


Рис. 21. Расчетная схема резервуара, заполняемого через трубопровод

Если газ допустимо считать совершенным, то его масса m равна

$$\rho V = \frac{p}{RT} V.$$

Предположим, что этот газ закачивают в резервуар или выпускают из резервуара при условии, что $T = T_0 = \text{const}$, т.е. имеет место *изотермический (изотермный) процесс*¹. Тогда

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{V}{RT_0} \cdot \frac{dp}{dt} = \frac{m_0}{p_0} \cdot \frac{dp}{dt} = \frac{m_0}{p_0} \cdot \frac{d\Delta p}{dt},$$

где $\dot{m}$ — массовый расход, положительный при закачке газа в резервуар; m_0 и p_0 — начальные значения массы и давления газа в резервуаре; $\Delta p = p - p_0$ — разность давлений.

Это выражение можно записать в следующем виде

$$\dot{m} = C_{\Pi}^T \frac{d\Delta p}{dt}, \quad (36)$$

где $C_{\Pi}^T = \frac{m_0}{p_0} = \frac{V}{RT_0}$ — величина, измеряемая в $\text{м} \cdot \text{с}^2$.

Если аналогами падения электрического напряжения и силы тока являются соответственно разность давлений Δp и массовый расход $\dot{m}$ газа, то аналогом емкости электрическо-

¹ Изотермический (изотермный) процесс — термодинамический процесс, протекающий при постоянной температуре.

го конденсатора становится величина C_{Π}^T , которую можно назвать *пневматической емкостью при изотермическом процессе*.

Условие $T = T_0 = \text{const}$ справедливо при интенсивном теплообмене газа со стенками резервуара, температура которых равна T_0 . Если можно пренебречь теплообменом со стенками резервуара, т.е. имеет место *адиабатический (адиабатный) процесс*², то в соответствии с законом сохранения энергии приращение внутренней энергии U газа, занимающего объем V , равно работе внешних сил по изменению объема газа, причем эта работа противоположна по знаку работе газа против внешних сил. Тогда

$$dU = -p dV.$$

Если разделить левую и правую части этого равенства на массу находящегося в объеме V газа, то приходим к следующему уравнению

$$du = -p d(1/\rho) = \rho R T \frac{d\rho}{\rho^2} = R T \frac{d\rho}{\rho},$$

где u — удельная внутренняя энергия газа.

Для совершенного газа при не очень значительных изменениях температуры T можно считать, что

$$du = c_V dT,$$

где c_V — удельная теплоемкость в изохорном процессе (при постоянном объеме), которую полагаем постоянной величиной. Тогда

$$du = c_V dT = R T \frac{d\rho}{\rho}.$$

Затем получим

$$\int_{T_0}^T \frac{d\tau}{\tau} = \frac{R}{c_V} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\xi}{\xi},$$

где T_0 и ρ_0 — начальные значения температуры и плотности газа в резервуаре. После интегрирования левой и правой частей, находим

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{R/c_V}.$$

Так как

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho R T}{\rho_0 R T_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T}{T_0},$$

запишем

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p}{p_0} \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{R/c_V} \quad \text{или} \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1+R/c_V} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma},$$

где p_0 — начальное значение давления газа в резервуаре; $\gamma = 1 + R/c_V$ — *показатель адиабатического процесса* или *показатель адиабаты*. Для совершенного газа, состоящего из одноатомных молекул $\gamma \approx 1,67$. Если совершенный газ состоит из двухатомных молекул, то

² Адиабатический (адиабатный) процесс — термодинамический процесс, осуществляемый системой при равенстве нулю алгебраической суммы количеств тепловой энергии подводимых к газу от внешней среды или отводимых от него на различных этапах процесса.

$\gamma \approx 1,40$. Если молекулы состоят из трех атомов $\gamma \approx 1,29$. Для воздуха, если его считать совершенным газом, можно принять $\gamma \approx 1,40$.

Возвращаясь к РС резервуара объема $V = const$, можно записать

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \frac{dm}{dt} = V \frac{d\rho}{dt} = V \frac{d}{dt} \left[\rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \right] = \frac{V \rho_0}{p_0^{1/\gamma}} \frac{d}{dt} p^{1/\gamma} = \\ &= \frac{m_0}{p_0^{1/\gamma}} \frac{d}{dt} p^{1/\gamma} = \frac{m_0}{\gamma p_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma-1} \frac{dp}{dt} = \frac{m_0}{\gamma p_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1-1/\gamma} \frac{dp}{dt},\end{aligned}$$

где m_0 — начальное значение массы газа в резервуаре. Полученное соотношение можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \frac{m_0}{\gamma p_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1-1/\gamma} \frac{d\Delta p}{dt} \text{ или} \\ \dot{m} &= C_{\Pi}^Q \frac{d\Delta p}{dt},\end{aligned}\tag{37}$$

где $\Delta p = p - p_0$ — разность давлений; $C_{\Pi}^Q = \frac{m_0}{\gamma p_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1-1/\gamma}$ — величина, измеряемая в $\text{м} \cdot \text{с}^2$.

Величина C_{Π}^Q зависит от давления p , т.е. полученное уравнение состояния является нелинейным в отличие от линейного уравнения состояния (36) при изотермическом процессе. Если пренебречь скоростью изменения величины C_{Π}^Q , то записанное равенство (37) можно сопоставить с уравнением состояния конденсатора, емкость которого постоянна. Тогда аналогом емкости электрического конденсатора становится величина C_{Π}^Q , которую можно назвать *пневматической емкостью при адиабатическом процессе*.

В общем случае при закачке или выпуске газа необходимо учитывать теплообмен газа со стенками резервуара, а при закачке газа возможен и подвод тепловой энергии вместе с газом из трубопровода (рис. 22).

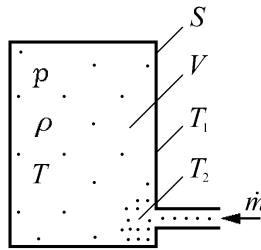


Рис. 22. Расчетная схема резервуара, заполняемого через трубопровод

Пусть в некоторый момент времени масса находящегося в резервуаре газа равна m . За промежуток времени dt плотность ρ и объем V этого газа массой m изменяются, причем

$$m = \rho V = const.$$

За этот промежуток времени от стенок резервуара поступит некоторое количество тепловой энергии, а при закачке газа следует учитывать подвод тепловой энергии вместе с газом из трубопровода. Тогда в соответствии с законом сохранения энергии имеем

$$dU = -p dV + \alpha (T_1 - T) S dt + c_v T_2 dm,$$

где U — внутренняя энергия газа, заключенного в объеме резервуара; α — коэффициент теплоотдачи; S — площадь поверхности стенок резервуара; c_v — удельная теплоемкость в

изохорном процессе; T_1 — температура стенок резервуара, которая может зависеть от времени; T_2 — температура газа в трубопроводе. Температура T_2 равна температуре T газа в резервуаре при выпуске газа, но это равенство может не выполняться при закачке газа в резервуар.

Если разделить на m левую и правую часть записанного выше уравнения, то получаем

$$du = RT \frac{V}{\rho} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{\alpha S}{m} (T_1 - T) dt + \frac{c_v}{m} T_2 dm,$$

где u — удельная внутренняя энергия газа. Затем запишем

$$du = c_v dT = RT \frac{dm}{m} + \frac{\alpha S}{m} (T_1 - T) dt + \frac{c_v}{m} T_2 dm.$$

Тогда

$$c_v \frac{dT}{dt} = RT \frac{\dot{m}}{m} + \frac{\alpha S}{m} (T_1 - T) + c_v T_2 \frac{\dot{m}}{m},$$

где $m(t) = m_0 + \int_0^t \dot{m}(\tau) d\tau$.

При известной начальной температуре T_0 в момент времени $t = 0$ это ОДУ имеет решение, которое можно записать в следующем виде

$$\frac{T}{T_0} = f(t).$$

Учитывая, что

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p/(\rho R)}{p_0/(\rho_0 R)} = \frac{p/(\rho V)}{p_0/(\rho_0 V)} = \frac{p}{p_0} \frac{m_0}{m}$$

получим

$$\frac{p}{p_0} = \frac{m}{m_0} \frac{T}{T_0} = \frac{m}{m_0} f(t).$$

Если возможно записать следующее равенство

$$f(t) = \frac{m_0}{m} \varphi(m/m_0),$$

где φ — функция, которая имеет обратную функцию ψ , то

$$p/p_0 = \varphi(m/m_0) \text{ и } m/m_0 = \psi(p/p_0).$$

Затем после дифференцирования левой и правой частей последнего равенства по времени t получим

$$\dot{m} = \frac{m_0}{p_0} \cdot \psi'(p/p_0) \frac{dp}{dt} \text{ или}$$

$$\dot{m} = C_{\Pi} \frac{d\Delta p}{dt},$$

где $\Delta p = p - p_0$ — разность давлений; $C_{\Pi} = \frac{m_0}{p_0} \cdot \psi'(p/p_0)$ — величина, измеряемая в $\text{м} \cdot \text{с}^2$.

В общем случае величина C_{Π} зависит от p , а полученное уравнение состояния является нелинейным. Если пренебречь скоростью изменения величины C_{Π} , то записанное равенство можно сопоставить с уравнением состояния конденсатора, емкость которого постоянна.

Тогда аналогом емкости электрического конденсатора становится величина C_{Π} , которую можно назвать *пневматической емкостью*.

Далее рассмотрим горизонтальный участок длиной l трубопровода с круглым поперечным сечением радиуса r_* (рис. 23).

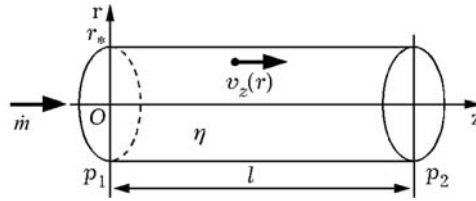


Рис. 23. Расчетная схема участка трубопровода

Пусть имеет место установившееся ламинарное течение вязкого газа с постоянным массовым расходом $\dot{m}$, причем плотность ρ газа на рассматриваемом участке трубопровода допустимо считать постоянной.

Тогда можно вычислить объемный расход Q газа через участок трубопровода по следующей формуле

$$Q = \frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{\pi r_*^4}{8\eta l} \Delta p,$$

где η — коэффициент внутреннего трения (или динамический коэффициент вязкости) газа, измеряемый в Па·с; $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$ — разность (перепад) давления, приходящийся на участок длиной l трубопровода. Затем получим

$$\Delta p = \frac{8\eta l}{\pi r_*^4} \dot{m} \quad \text{или}$$

$$\Delta p = \dot{m} R_{\Pi}, \quad (38)$$

где $R_{\Pi} = \frac{8\eta l}{\pi r_*^4 \rho}$.

Если в качестве потенциальной величины выбрать перепад давлений Δp , а в качестве потоковой — массовый расход $\dot{m}$ газа, то записанное равенство (38) можно сопоставить с уравнением состояния резистора. Тогда аналогами падения электрического напряжения и силы тока являются перепад давлений Δp и массовый расход $\dot{m}$ газа соответственно. Аналогом электрического сопротивления является величина R_{Π} , которую можно рассматривать как *пневматическое сопротивление* участка трубопровода. Ее измеряют в $\frac{1}{\text{м} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\text{кг}}$, так как

единицами измерения Δp и $\dot{m}$ являются Па и кг/с соответственно. В общем случае, когда поперечное сечение трубопровода некруглое, пневматическое сопротивление такого участка трубопровода зависит от формы этого сечения.

Если трубопровод является достаточно длинным, то при постоянном массовом расходе перепад давления на концах трубопровода может оказаться весьма значительным, что приведет к существенному изменению плотности газа по длине трубопровода. Тогда при постоянном массовом расходе газа его объемный расход будет изменяться по длине трубопровода. В таком случае длинный трубопровод можно разделить на ряд более коротких участков так, что в пределах каждого из них плотность газа допустимо считать постоянной. При этом следует учитывать, что плотность газа в соответствии с уравнением состояния зависит не только от давления, но и от температуры газа, которая может изменяться по длине трубопровода при тепловом взаимодействии газа со стенками трубопровода.

Рассмотрим участок горизонтального цилиндрического трубопровода с поперечным сечением площадью S , по которому движется идеальный (невязкий) газ с переменной во времени t скоростью $v(t)$ (рис. 24). Дополнительно примем, что плотность ρ газа на рассматриваемом участке трубопровода допустимо считать постоянной.

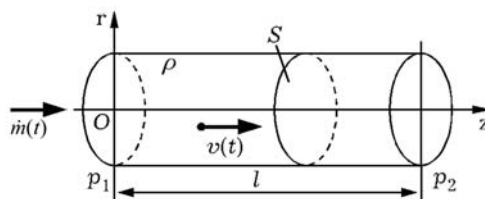


Рис. 24. Расчетная схема участка трубопровода

Согласно закону сохранения количества движения запишем

$$\frac{d}{dt} \iiint_V v \rho dv = S(p_1 - p_2) = S \Delta p,$$

где $\Delta p = p_1 - p_2$ — разность давлений. Если пренебречь изменением плотности газа и считать, что его скорость на данном участке трубопровода зависит только от времени t , то

$$\rho l S \frac{dv}{dt} = l \frac{d \dot{m}}{dt} = S \Delta p.$$

Тогда

$$\Delta p = \frac{l}{S} \cdot \frac{d \dot{m}}{dt} \text{ или}$$

$$\Delta p = L_{\Pi} \frac{d \dot{m}}{dt},$$

где $L_{\Pi} = \frac{l}{S}$ — величина, измеряемая в $1/\text{м}$. Она, очевидно, является аналогом индуктивности катушки и ее можно назвать *пневматической индуктивностью* участка трубопровода.

Итак, в пневматических системах можно выделить простейшие элементы, которые аналогичны пассивным электрическим двухполюсникам: резистору, конденсатору и индуктивной катушке. Выявленную аналогию между величинами пневматических и электрических систем удобно представить в виде табл. 4.

Таблица 4

Аналогия между величинами пневматических и электрических систем

Величины пневматической системы	Величины электрической системы
разность давлений Δp	падение электрического напряжения U
массовый расход $\dot{m}$	сила электрического тока I
пневматическое сопротивление R_{Π}	электрическое сопротивление R
пневматическая емкость C_{Π}	электрическая емкость C
пневматическая индуктивность L_{Π}	индуктивность L

Аналогию между ММ типовых элементов пневматических систем и электрических двухполюсников называют *электронпневматической*. Она дает возможность в случае сложной пневматической системы построить эквивалентную схему в виде электрической цепи, а

затем использовать хорошо разработанные и формализованные приемы получения ММ электрических цепей для построения модели рассматриваемой пневматической системы.

Пример. Рассмотрим пневматическую систему, состоящую из горизонтального цилиндрического трубопровода длиной l с круглым поперечным сечением радиуса r_* и резервуара объема V (рис. 25). Компрессор³ создает перепад давления Δp и подает по трубопроводу в резервуар газ, коэффициент внутреннего трения которого равен η .

Температура газа в пневматической системе постоянна и равна T_0 . Пусть имеет место ламинарное течение газа на участке трубопровода, причем плотность газа несущественно изменяется по длине трубопровода. В начальный момент времени давление и плотность газа в рассматриваемой пневматической системе равны p_0 и ρ_0 соответственно.

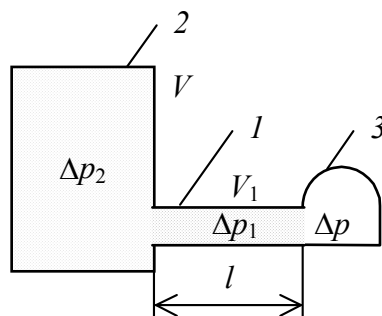


Рис. 25. Расчетная схема пневматической системы: 1 — горизонтальный цилиндрический трубопровод; 2 — резервуар; 3 — компрессор

Выявленная ранее аналогия позволяет перейти от РС пневматической системы к эквивалентной схеме в виде электрической цепи (рис. 26).

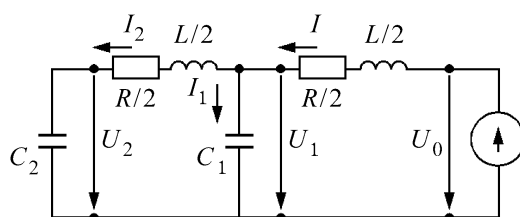


Рис. 26. Эквивалентная схема в виде электрической цепи

Электрическая цепь состоит из источника электрического напряжения, двух резисторов сопротивлением $R/2$, двух катушек индуктивностью $L/2$, и двух конденсаторов, емкость которых равна C_1 и C_2 соответственно.

Очевидно, что сила электрического тока I в цепи является аналогом массового расхода воздуха через входное сечение трубопровода, а сила электрического тока I_2 — аналогом массового расхода воздуха через выходное сечение. Величина U_0 выступает аналогом перепада давления Δp создаваемого компрессором. Величины U_1 и U_2 становятся аналогами разностей давлений $\Delta p_1 = p_1 - p_0$ и $\Delta p_2 = p_2 - p_0$ соответственно, где p_1 — давление газа в трубопроводе; p_2 — давление газа в резервуаре.

Величина R является аналогом пневматического сопротивления трубопровода

$$R_{\Pi} = \frac{8\eta l}{\pi r_*^4 \rho_1} = \frac{8\eta l}{\pi r_*^4 \rho_0} \frac{p_0}{p_1},$$

где $\rho_1 = \rho_0 \frac{p_1}{p_0}$ — плотность газа в трубопроводе.

³ Компрессор — устройство для сжатия и подачи воздуха или какого-либо газа под давлением.

Величина L является аналогом пневматической индуктивности трубопровода

$$L_{\Pi} = \frac{l}{S} = \frac{l}{\pi r_*^2},$$

где S — площадь поперечного сечения трубопровода.

Величина C_1 является аналогом пневматической емкости трубопровода

$$C_{\Pi}^T = \frac{V_1}{RT_0} = \frac{\pi r_*^2 l}{RT_0},$$

где $V_1 = \pi r_*^2 l$ — объем трубопровода.

Величина C_2 является аналогом пневматической емкости резервуара

$$C_{\Pi}^T = \frac{V}{RT_0}.$$

3.6. Об использовании математических моделей простейших типовых элементов

Простейшие типовые элементы, рассмотренные ранее, являются идеализированными по отношению к реальным элементам технических систем. Поэтому применение ММ макроуровня простейших типовых элементов для описания реальных элементов технических систем вызывает неизбежные погрешности. При использовании ММ макроуровня конкретного типового элемента важно располагать хотя бы грубой оценкой возможной погрешности.

Один из способов получения такой оценки связан с количественным анализом уточненной и более детальной ММ этого элемента, учитывающей свойства и особенности, которые не были учтены при построении ММ макроуровня.

Одной из причин возникновения погрешностей при использовании ММ макроуровня является пренебрежение пространственным распределением параметров, характеризующих свойства типовых элементов и протекающие в них процессы. Все же в некоторых случаях для получения оценки возможной погрешности удастся разработать уточненную модель элемента, путем усложнения его РС, причем уточненная модель остается ММ макроуровня.

Пример 1. Уточним ММ резистора, сопротивление которого изменяется от его температуры. Для этого рассмотрим тепловую систему, в которой резистор является высокотеплопроводным телом, преобразующим электрическую энергию в тепловую.

Пусть резистор имеет полную теплоемкость C_T и поверхность площадью S , участвующую в конвективном теплообмене с окружающей средой температурой T_0 . Интенсивность теплообмена определим коэффициентом теплоотдачи α . На полюсах резистора поддерживают постоянную разность потенциалов, равную U .

Зависимость сопротивления резистора R от его температуры T в линейном приближении представим в виде

$$R = R_0 [1 + \beta (T - T_0)],$$

где R_0 — значение сопротивления резистора при температуре $T = T_0$, а $\beta > 0$ — температурный коэффициент. Если на полюсах резистора поддерживают постоянную разность потенциалов U , то мощность тепловыделения на резисторе равна

$$W = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{R_0 [1 + \beta (T - T_0)]}.$$

При установившемся режиме теплообмена справедливо

$$W = \alpha (\bar{T} - T_0) S,$$

где $\bar{T}$ — установившееся значение температуры резистора. Тогда запишем

$$W = \frac{U^2}{R_0 (1 + \beta \Delta \bar{T})} = \alpha \Delta \bar{T} S,$$

где $\Delta \bar{T} = \bar{T} - T_0$ — разность температур. Затем приходим к следующему равенству

$$\frac{U^2}{R_0 \alpha S} = (1 + \beta \Delta \bar{T}) \Delta \bar{T}. \quad (39)$$

Тогда относительно разности $\Delta \bar{T}$ температур составим квадратное уравнение

$$\beta \Delta \bar{T}^2 + \Delta \bar{T} - \frac{U^2}{R_0 \alpha S} = 0.$$

По физическому смыслу

$$\Delta \bar{T} = \bar{T} - T_0 \geq 0,$$

поэтому решением квадратного уравнения является

$$\Delta \bar{T} = \bar{T} - T_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\beta \cdot \left(-\frac{U^2}{R_0 \alpha S}\right)}}{2\beta}.$$

Тогда установившееся значение температуры резистора равно

$$\bar{T} = T_0 + \frac{1}{2\beta} \left(-1 + \sqrt{1 + 4\beta \frac{U^2}{R_0 \alpha S}} \right),$$

а соответствующее значение его сопротивления находим по формуле

$$\bar{R} = R_0 \left[1 + \beta (\bar{T} - T_0) \right] = R_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 4\beta \frac{U^2}{R_0 \alpha S}} \right) \right] = \frac{R_0}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4\beta \frac{U^2}{R_0 \alpha S}} \right).$$

Таким образом, сопротивление резистора в рассматриваемом случае зависит от U . Это означает, что существует нелинейная зависимость силы I электрического тока, проходящего через резистор, от падения напряжения U на этом резисторе, т.е.

$$I = \frac{U}{\frac{R_0}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4\beta \frac{U^2}{R_0 \alpha S}} \right)}.$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ температура резистора равна температуре окружающей среды T_0 . Пройдет некоторый промежуток Δt времени, по истечении которого сопротивление R резистора можно считать равным $\bar{R}$ с некоторой относительной погрешностью δ . Определим этот промежуток времени.

Изменение температуры T резистора во времени t описывает ОДУ первого порядка

$$C_T \frac{dT}{dt} + \alpha (T - T_0) S = \frac{U^2}{R_0 [1 + \beta (T - T_0)]}.$$

Тогда

$$\frac{C_T}{\alpha S} \frac{d\Delta T}{dt} = \frac{U^2}{R_0 \alpha S (1 + \beta \Delta T)} - \Delta T,$$

где $\Delta T = T - T_0$ — разность температур. Затем, используя равенство (39), преобразуем полученное ОДУ. Для этого запишем

$$\frac{C_T}{\alpha S} \frac{d\Delta T}{dt} = \frac{(1 + \beta \Delta \bar{T}) \Delta \bar{T} - (1 + \beta \Delta T) \Delta T}{1 + \beta \Delta T} \quad \text{или} \quad \frac{1/\beta + \Delta T}{(\Delta \bar{T} - \Delta T)(\Delta \bar{T} + 1/\beta + \Delta T)} d\Delta T = \frac{\alpha S}{C_T} dt.$$

Левую и правую части последнего уравнения проинтегрируем, учитывая, что

$$\frac{1/\beta + \Delta T}{(\Delta \bar{T} - \Delta T)(\Delta \bar{T} + 1/\beta + \Delta T)} = \frac{1 + \beta \Delta \bar{T}}{1 + 2\beta \Delta \bar{T}} \cdot \frac{\beta \Delta \bar{T}}{1 + 2\beta \Delta \bar{T}}.$$

Затем, используя начальное условие $\Delta T(0) = 0$, получим частный интеграл

$$\frac{\Delta \bar{T} - \Delta T}{\Delta \bar{T}} \left[\frac{1 + \beta (\Delta \bar{T} + \Delta T)}{1 + \beta \Delta \bar{T}} \right]^{\frac{\beta \Delta \bar{T}}{1 + \beta \Delta \bar{T}}} = \exp \left(-\frac{1 + 2\beta \Delta \bar{T}}{1 + \beta \Delta \bar{T}} \frac{\alpha S}{C_T} t \right).$$

Тогда

$$\frac{\bar{R} - R}{\bar{R} - R_0} \left(\frac{\bar{R} + R - R_0}{\bar{R}} \right)^{\frac{\bar{R} - R_0}{\bar{R}}} = \exp \left(- \frac{2\bar{R} - R_0}{\bar{R}} \frac{\alpha S}{C_T} t \right).$$

Это уравнение позволяет установить промежуток Δt времени, по истечении которого сопротивление R резистора можно считать равным $\bar{R}$ с относительной погрешностью

$$\delta = \frac{\bar{R} - R}{R}.$$

Действительно,

$$\Delta t = \frac{\bar{R}}{2\bar{R} - R_0} \frac{C_T}{\alpha S} \left[\ln \frac{1 + \delta}{\delta} + \ln \frac{\bar{R} - R_0}{\bar{R}} - \frac{\bar{R} - R_0}{\bar{R}} \ln \left(\frac{1}{1 + \delta} + \frac{\bar{R} - R_0}{\bar{R}} \right) \right].$$

Полученные результаты позволяют оценить погрешности при использовании ММ идеализированного резистора, вызванные изменением его сопротивления от температуры.

Далее рассмотрим электрический конденсатор, который постепенно теряет свой электрический заряд. Утечка заряда в окружающую среду может происходить, например, из-за несовершенства электрической изоляции.

Пример 2. Пусть конденсатор, емкость которого равна C , был заряжен от источника электрической энергии до разности потенциалов U_0 на обкладках конденсатора, а затем в некоторый момент времени $t = 0$ источник электрической энергии был отключен. В этом случае конденсатор постепенно теряет электрический заряд. Уточнить РС такого конденсатора можно путем введения тока утечки силой I_* , пропорциональной текущей разности потенциалов U . Это равносильно предположению, что конденсатор обладает некоторым конечным внутренним сопротивлением R_* (рис. 27).

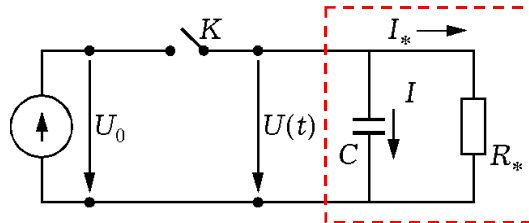


Рис. 27. Электрическая цепь

Учитывая, что $I + I_* = 0$, где $I = C \frac{dU}{dt}$ и $I_* = \frac{U}{R_*}$, приходим к ОДУ первого порядка

$$C \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R_*} = 0.$$

Его решение при начальном условии $U(0) = U_0$ имеет вид

$$U(t) = U_0 \exp \left(- \frac{1}{R_* C} t \right).$$

Эта зависимость позволяет оценить промежуток времени, в течение которого можно пренебречь утечкой электрического заряда в окружающую среду. Действительно, в течение временного промежутка

$$\Delta t = R_* C \ln(1 + \delta)$$

разность электрических потенциалов U на обкладках конденсатора можно считать равной U_0 с относительной погрешностью

$$\delta = \frac{U_0 - U}{U}.$$

Выясним влияние переменного во времени тока I^* внешнего источника на напряжение U на обкладках неидеального конденсатора (рис. 28).

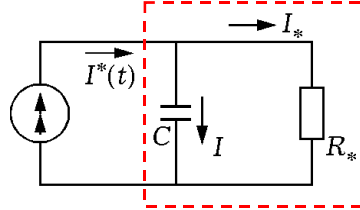


Рис. 28. Электрическая цепь

Пусть сила тока изменяется во времени t по закону

$$I^*(t) = I_0 \sin \omega t,$$

где I_0 — амплитуда колебаний силы тока, ω — угловая частота колебаний. Использование первого закона Кирхгофа приводит к равенству $I + I_* = I^*$, что позволяет получить неоднородное ОДУ первого порядка

$$C \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R_*} = I_0 \sin \omega t.$$

Решение этого ОДУ при начальном условии $U(0) = 0$ имеет вид

$$U(t) = \frac{\omega C R_*^2 I_0}{1 + (\omega C R_*)^2} e^{-\frac{1}{R_* C} t} + \frac{R_*}{1 + (\omega C R_*)^2} I_0 (\sin \omega t - \omega C R_* \cos \omega t).$$

При достаточно больших значениях t можно пренебречь первым слагаемым в правой части этого уравнения, тогда изменение напряжения будет определять второе слагаемое, которое запишем в следующем виде

$$A(\omega) I_0 [\sin \omega t \cos \beta(\omega) + \cos \omega t \sin \beta(\omega)] = A(\omega) I_0 \sin[\omega t + \beta(\omega)],$$

где $A(\omega) = \frac{R_*}{\sqrt{1 + (\omega C R_*)^2}}$, $\beta(\omega) = \arctg(-\omega C R_*)$.

Если электрический двухполюсник, состоящий из параллельно соединенных конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R_* , рассматривать как звено, преобразующее входной сигнал (силу тока) в выходной сигнал (падение напряжения), то $A(\omega)$ и $\beta(\omega)$ являются соответственно амплитудно-частотной и фазочастотной характеристиками звена. С помощью этих характеристик комплексное передаточное число этого звена можно представить в следующем виде

$$Z = A(\omega) e^{i\beta(\omega)} = \frac{R_*}{\sqrt{1 + (\omega C R_*)^2}} e^{i \arctg(-\omega C R_*)}.$$

Полученные результаты позволяют оценить погрешности при использовании ММ идеализированного конденсатора, вызванные утечкой электрического заряда. Путем усложнения РС конденсатора, удалось получить уточненную модель, которая является ММ макроуровня.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ ИЗ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

При переходе от РС сложной системы, состоящей из большого числа взаимосвязанных между собой типовых элементов, к ее ММ макроуровня удобно оперировать эквивалентными схемами, основанными на аналогиях между ММ элементов, принадлежащих различным техническим системам. При этом предпочтительнее привлекать аналогии между электрической системой и другими техническими системами, так как они позволяют применять хорошо разработанные и формализованные приемы получения ММ электрических систем.

В дальнейшем под *эквивалентной схемой* технической системы из типовых элементов, будем понимать условное изображение этой системы в виде электрической цепи, состоящей из электрических двухполюсников.

4.1. Дуальные электрические цепи

Построим ММ электрической цепи, которая включает источник электрического напряжения, задающий переменное во времени t падение напряжения $U^*(t)$, резистор сопротивлением R , конденсатор емкостью C и катушку индуктивностью L (рис. 29).

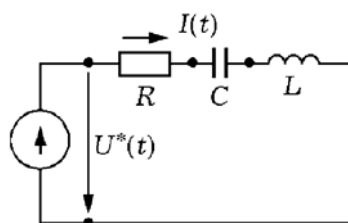


Рис. 29. Электрическая цепь, содержащая источник напряжения

Эта цепь состоит из одного замкнутого контура, в который последовательно включены указанные выше двухполюсники. Очевидно, что в любой момент времени t сила $I(t)$ тока во всех участках данной электрической цепи одинакова. Для участков электрической цепи, содержащих резистор, конденсатор и индуктивную катушку, запишем:

$$U_R = RI, \quad I = C \frac{dU_C}{dt}, \quad U_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (40)$$

При обходе замкнутого контура по ходу часовой стрелки в соответствии со вторым законом Кирхгофа получим

$$U_R + U_C + U_L - U^*(t) = 0.$$

Затем приходим к нормальной системе ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \frac{U^*(t) - RI - U_C}{L}, \\ \frac{dU_C}{dt} = \frac{I}{C}, \end{cases} \quad (41)$$

которая является ММ данной электрической системы.

В качестве второго примера рассмотрим электрическую цепь, которая наряду с пассивными электрическими двухполюсниками содержит источник электрического тока, сила тока которого изменяется по определенному закону $\tilde{I}^*(t)$ (рис. 30).

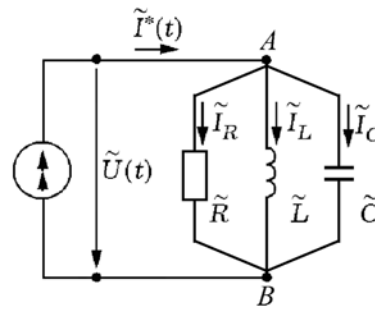


Рис. 30. Электрическая цепь, содержащая источник тока

Очевидно, что падение напряжения $\tilde{U}(t)$ в каждой из ветвей этой цепи в любой фиксированный момент времени t одинаково. Для участков электрической цепи, содержащих резистор, индуктивную катушку и конденсатор, запишем:

$$\tilde{I}_R = \tilde{G}\tilde{U}, \quad \tilde{U} = \tilde{L} \frac{d\tilde{I}_L}{dt}, \quad \tilde{I}_C = \tilde{C} \frac{d\tilde{U}}{dt}, \quad (42)$$

где $\tilde{G} = 1/\tilde{R}$ — проводимость резистора. Все ветви этой цепи сходятся в два узла A и B . Применяя первый закон Кирхгофа к одному из узлов, например, к узлу B , получим

$$\tilde{I}_R + \tilde{I}_L + \tilde{I}_C - \tilde{I}^*(t) = 0.$$

Затем приходим к нормальной системе ОДУ

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{U}}{dt} = \frac{\tilde{I}^*(t) - \tilde{G}\tilde{U} - \tilde{I}_L}{\tilde{C}}, \\ \frac{d\tilde{I}_L}{dt} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{L}}, \end{cases} \quad (43)$$

которая является ММ данной электрической системы.

Таким образом, модели (41) и (43) рассмотренных электрических цепей являются идентичными по своей форме и содержат величины, между которыми можно установить соответствие. Это соответствие удобно представить в виде табл. 5.

Таблица 5

Соответствие между величинами дуальных электрических цепей

Величины электрической цепи	Величины дуальной электрической цепи
падение электрического напряжения $U^*(t)$ U_R U_C U_L	сила электрического тока $\tilde{I}^*(t)$ $\tilde{I}_R$ $\tilde{I}_L$ $\tilde{I}_C$
сила электрического тока $I(t)$	падение электрического напряжения $\tilde{U}(t)$
электрическое сопротивление R	проводимость $\tilde{G} = 1/\tilde{R}$
электрическая емкость C	индуктивность $\tilde{L}$
индуктивность L	электрическая емкость $\tilde{C}$

Две электрические цепи, ММ которых удовлетворяют указанному соответствию величин, принято называть *дуальными*. При этом имеет место соответствие между формулами (40) и (42). Если связь между законами изменения падения напряжения и силы тока источников в дуальных цепях подчиняется зависимости

$$U^*(t) = R_0 \tilde{I}^*(t),$$

где R_0 — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность сопротивления, то из сопоставления (40), (41) и (42), (43) можно установить, что

$$\frac{\tilde{U}(t)}{I(t)} = \frac{U_R}{\tilde{I}_R} = \frac{U_C}{\tilde{I}_L} = \frac{U_L}{\tilde{I}_C} = \frac{U^*(t)}{\tilde{I}^*(t)} = R_0$$

при выполнении условий

$$\frac{R}{\tilde{G}} = \frac{1/C}{1/\tilde{L}} = \frac{L}{\tilde{C}} = R_0^2.$$

Из определения следует, что построение дуальной цепи по отношению к дуальной позволяет получить исходную электрическую цепь. Это можно использовать для проверки правильности преобразования электрической цепи в дуальную.

Дуальность электрических цепей позволяет расширить возможности построения и преобразования эквивалентных схем применительно к различным техническим системам.

Предположим, что сила тока в электрической цепи, представленной на рис. 29, изменяется во времени t по закону $I(t) = I_0 \sin \omega t$, где I_0 — амплитуда колебаний силы тока, ω — угловая частота колебаний. После подстановки выражения для $I(t)$ в (41) получим один из возможных законов изменения падения напряжения на полюсах источника

$$U^*(t) = R I_0 \sin \omega t - \frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t + \omega L I_0 \cos \omega t.$$

Запишем функцию в виде

$$U^*(t) = \operatorname{Im} \left[I_0 \left(R - \frac{i}{\omega C} + i \omega L \right) e^{i \omega t} \right] = \operatorname{Im} (\hat{U} e^{i \omega t}),$$

где $\hat{U} = I_0 \left(R - \frac{i}{\omega C} + i \omega L \right)$ — комплексная амплитуда падения напряжения, равная

$$I_0 (Z_R + Z_C + Z_L),$$

причем $Z_R = R$, $Z_C = \frac{-i}{\omega C}$, $Z_L = i \omega L$ — комплексные сопротивления (импедансы) резистора,

конденсатора и индуктивной катушки соответственно. Так как комплексная амплитуда $\hat{I}$ силы тока $I(t) = \operatorname{Im} (I_0 e^{i \omega t}) = \operatorname{Im} (\hat{I} e^{i \omega t})$ равна I_0 , то

$$\frac{\hat{U}}{\hat{I}} = Z_R + Z_C + Z_L = Z,$$

где Z — полное комплексное сопротивление участка цепи из последовательно соединенных резистора, конденсатора и индуктивной катушки. В общем случае комплексное сопротивление участка цепи из последовательно соединенных электрических двухполюсников равно сумме их комплексных сопротивлений.

Теперь предположим, что падение напряжения во всех ветвях цепи, представленной на рис. 30, изменяется во времени t по закону $\tilde{U}(t) = U_0 \sin \omega t$, где U_0 — амплитуда колебаний падения напряжения, ω — угловая частота колебаний. После подстановки выражения для $\tilde{U}(t)$ в (43) получим один из возможных законов изменения силы тока источника

$$\tilde{I}^*(t) = \frac{U_0}{\tilde{R}} \sin \omega t - \frac{U_0}{\omega \tilde{L}} \cos \omega t + \omega \tilde{C} U_0 \cos \omega t.$$

Запишем эту функцию в виде

$$\tilde{I}^*(t) = \operatorname{Im} \left[U_0 \left(\frac{1}{\tilde{R}} - \frac{i}{\omega \tilde{L}} + i \omega \tilde{C} \right) e^{i \omega t} \right] = \operatorname{Im} (\hat{I} e^{i \omega t}),$$

где $\hat{I} = U_0 \left(\frac{1}{\tilde{R}} - \frac{i}{\omega \tilde{L}} + i \omega \tilde{C} \right)$ — комплексная амплитуда силы тока источника, равная

$$U_0 \left(\frac{1}{\tilde{R}} + \frac{1}{i \omega \tilde{L}} - \frac{\omega \tilde{C}}{i} \right) = U_0 \left(\frac{1}{\tilde{Z}_R} + \frac{1}{\tilde{Z}_L} + \frac{1}{\tilde{Z}_C} \right),$$

где $\tilde{Z}_R = \tilde{R}$, $\tilde{Z}_L = i \omega \tilde{L}$, $\tilde{Z}_C = \frac{-i}{\omega \tilde{C}}$ — комплексные сопротивления резистора, индуктивной ка-

тушки и конденсатора соответственно. Так как комплексная амплитуда $\hat{U}$ падения напряжения $\tilde{U}(t) = \operatorname{Im} (U_0 e^{i \omega t}) = \operatorname{Im} (\hat{U} e^{i \omega t})$ равна U_0 , то

$$\frac{\hat{I}}{\hat{U}} = \frac{1}{\tilde{Z}_R} + \frac{1}{\tilde{Z}_L} + \frac{1}{\tilde{Z}_C} = \frac{1}{\tilde{Z}},$$

где $\tilde{Z}$ — полное комплексное сопротивление участка цепи из параллельно соединенных резистора, индуктивной катушки и конденсатора. В общем случае комплексная проводимость участка цепи из параллельно соединенных электрических двухполюсников равна сумме их комплексных проводимостей.

Таким образом, установленное выше соответствие между величинами дуальных электрических цепей распространяется, например, на комплексные сопротивления и проводимости, приведенные в табл. 6.

Таблица 6

Соответствие между величинами дуальных электрических цепей

Величины электрической цепи	Величины дуальной электрической цепи
Z	$1/\tilde{Z}$
Z_R	$1/\tilde{Z}_R$
Z_C	$1/\tilde{Z}_L$
Z_L	$1/\tilde{Z}_C$

4.2. Двойственность электромеханической аналогии

При построении ММ макроуровня сравнительно простой механической системы, состоящей из небольшого количества типовых элементов, обычно используют непосредственно основные законы механики. Но для более сложной механической системы, включающей большое число взаимодействующих между собой элементов, удобнее предварительно составить эквивалентную схему, используя электромеханическую аналогию. Тогда при переходе от эквивалентной схемы к ММ можно применить хорошо разработанные и формализованные приемы получения ММ электрических цепей.

Установленный ранее вариант электромеханической аналогии не является единственным, так как ММ дуальных электрических цепей идентичны по своей форме записи, и можно выбрать свой вариант аналогии между ММ типовых элементов механических систем и электрических двухполюсников. В связи с этим допустимо говорить о двойственности электромеханической аналогии.

Рассмотрим механическую систему (рис. 31), в которой тело 1 связано с неподвижной опорой 2 пружиной 3 и движется поступательно по горизонтальной плоскости. К телу может быть приложена сила, изменяющаяся во времени t .

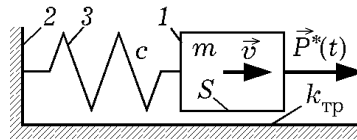


Рис. 31. Схема механической системы: 1 — деталь; 2 — неподвижное основание; 3 — пружина

В качестве примера убедимся, что для этой механической системы эквивалентными схемами могут быть обе дуальные цепи (рис. 32), рассмотренные ранее.

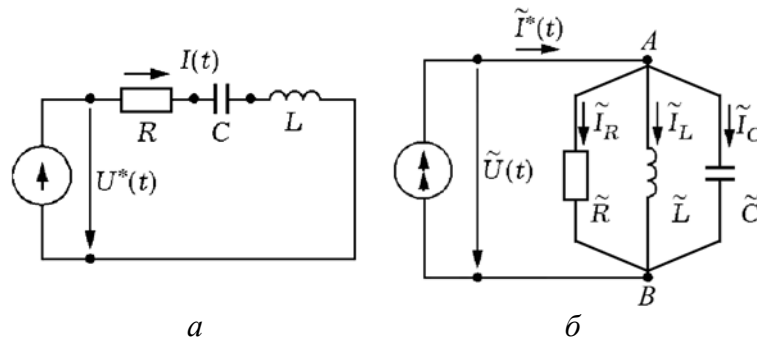


Рис. 32. Дуальные электрические цепи, содержащие источник напряжения (а) и тока (б)

Действительно, в соответствии со вторым законом Ньютона запишем

$$m \frac{dv}{dt} = -cu - k_{\text{тр}} Sv + P^*(t), \quad (44)$$

где m — масса тела; v — проекция скорости тела на выбранное положительное направление; u — перемещение тела относительно положения равновесия, в котором пружина не деформирована; c — жесткость пружины; $k_{\text{тр}}$ — коэффициент вязкого трения при движении тела по горизонтальной плоскости; S — площадь поверхности контакта тела с этой плоскостью; $P^*(t)$ — проекция внешней силы на выбранное положительное направление.

Представим уравнение (44) в следующем виде

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{P^*(t) - k_{\text{TP}} S v - F}{m}, \\ \frac{dF}{dt} = \frac{v}{1/c}, \end{cases}$$

где $-F(u) = -cu$ — проекция силы, с которой пружина действует на тело.

Если в механической системе потенциальной величиной считать проекцию силы, а потоковой — проекцию скорости, то их аналогами являются разность электрических потенциалов и сила электрического тока соответственно. Тогда, используя введенные ранее обозначения, запишем

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{P^*(t) - R_M v - F}{L_M}, \\ \frac{dF}{dt} = \frac{v}{C_M}, \end{cases} \quad (45)$$

где $R_M = k_{\text{TP}} S$, $C_M = 1/c$ — податливость пружины, $L_M = m$ — масса тела.

Из сравнения ММ рассматриваемой механической системы и ММ электрической цепи, изображенной на рис. 32, а, следует, что они идентичны при выборе проекции силы в качестве потенциальной величины и проекции скорости в качестве потоковой величины. Такой выбор и был сделан, что определяет первый вариант электромеханической аналогии (табл. 7).

Но если в механической системе потенциальной величиной считать проекцию скорости, а потоковой — проекцию силы, то их аналогами являются разность электрических потенциалов и сила электрического тока соответственно. Тогда, полагая $\tilde{G}_M = k_{\text{TP}} S$, $\tilde{L}_M = 1/c$ и $\tilde{C}_M = m$, вместо (45) имеем

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{P^*(t) - \tilde{G}_M v - F}{\tilde{C}_M}, \\ \frac{dF}{dt} = \frac{v}{\tilde{L}}, \end{cases}$$

что с точностью до обозначений совпадает с ММ электрической цепи, изображенной на рис. 32, б, и определяет второй вариант электромеханической аналогии (табл. 7).

Таблица 7

Аналогия между величинами механических и электрических систем

Величины механической системы	Величины электрической системы	
	I вариант	II вариант
P, M	разность потенциалов U	сила тока $\tilde{I}$
v, ω	сила тока I	разность потенциалов $\tilde{U}$
R_M, R_M^0	сопротивление R	проводимость $\tilde{G} = 1/\tilde{R}$
податливость C_M, C_M^0	емкость C	индуктивность $\tilde{L}$
масса m , момент инерции J	индуктивность L	емкость $\tilde{C}$
перемещение u , угол φ	электрический заряд Q_e	потокосцепление $\tilde{\Psi} = \tilde{L} \tilde{I}$
$mv, J\omega$	потокосцепление $\Psi = LI$	электрический заряд $\tilde{Q}_e$

Величины механической системы	Величины электрической системы	
	I вариант	II вариант
потенциальная энергия П	энергия электрического поля E_e	энергия магнитного поля $\tilde{E}_m$
кинетическая энергия К	энергия магнитного поля E_m	энергия электрического поля $\tilde{E}_e$

Использование второго варианта электромеханической аналогии при построении эквивалентной схемы механической системы является более удобным. Так, например, при поступательном движении механической системы первый закон Кирхгофа удобно сопоставить со вторым законом Ньютона, а второй закон Кирхгофа — с правилом сложения скоростей.

Пример. Используя второй вариант электромеханической аналогии, построим эквивалентную схему механической системы (рис. 33), состоящей из прицепа массой m_1 с грузом массой m_2 и прицепа массой m_3 с грузом массой m_4 .

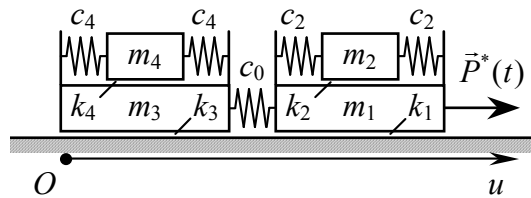


Рис. 33. Расчетная схема механической системы

Грузы массой m_2 и m_4 закреплены при помощи упругих элементов податливостью $1/c_2$ и $1/c_4$ соответственно, а сцепка между прицепами имеет податливость $1/c_0$. При движении прицепа массой m_i возникает сила трения, величина которой пропорциональна скорости v_i прицепа, причем коэффициент пропорциональности равен k_i , где $i = 1, 3$. Величина силы трения между грузом массой m_s и кузовом прицепа пропорциональна значению $\Delta v_s = v_s - v_{s-1}$ скорости перемещения груза относительно кузова, причем коэффициент пропорциональности равен k_s , где $s = 2, 4$. К прицепу массой m_1 приложена внешняя сила, которая в общем случае может изменяться во времени t . Проекция этой силы на выбранное положительное направление равна $P^*(t)$.

Для построения эквивалентной схемы используем второй вариант электромеханической аналогии. В таком случае аналогом массы m_i является емкость $\tilde{C}_i$ конденсатора, аналогом коэффициента пропорциональности k_i — проводимость $\tilde{G}_i$ резистора, где $i = 1, 2, 3, 4$. Аналогом податливости $1/c_j$ упругого элемента становится индуктивность $\tilde{L}_j$ катушки, где $j = 0, 2, 4$.

Каждому телу массой m_i поставим в соответствие узел электрической цепи, который соединен с ветвью, содержащей конденсатор емкостью $\tilde{C}_i$ (рис. 34). Тогда силе, действующей на данное тело, соответствует ветвь, соединенная с этим узлом, а величина силы выступает аналогом силы тока в соответствующей ветви. Очевидно, что аналогом величины $P^*(t)$ является сила $\tilde{I}^*(t)$ тока.

Если электрический потенциал в узле 5 положить равным нулю, то электрический потенциал в i -ом узле электрической цепи становится аналогом скорости v_i , где $i = 1, 2, 3, 4$.

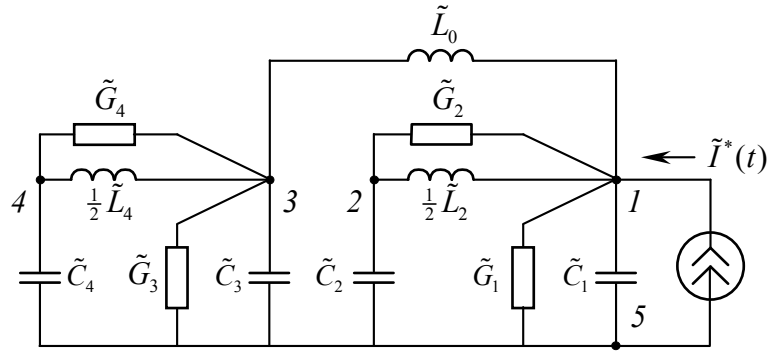


Рис. 34. Эквивалентная схема механической системы

Проанализируем ММ данной механической системы. Для прицепа массой m_1 справедливо уравнение

$$m_1 \frac{d v_1}{d t} + k_1 v_1 + k_2 (v_1 - v_2) + \frac{1}{1/c_0} (u_1 - u_3) + \frac{2}{1/c_2} (u_1 - u_2) - P^*(t) = 0,$$

где u_i — перемещение тела массой m_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Слагаемым в левой части этого уравнения соответствуют шесть ветвей, сходящихся в узел 1 эквивалентной схемы. Первому слагаемому соответствует ветвь, содержащая конденсатор емкостью $\tilde{C}_1$, второму и третьему — ветви, содержащие резисторы проводимостью $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$ соответственно, четвертому и пятому — ветви, содержащие катушки индуктивностью $\tilde{L}_0$ и $\tilde{L}_2/2$ соответственно, а шестому слагаемому — ветвь, содержащая источник электрического тока силой $\tilde{I}^*(t)$.

Для груза массой m_2 запишем

$$m_2 \frac{d v_2}{d t} + k_2 (v_2 - v_1) + \frac{2}{1/c_2} (u_2 - u_1) = 0.$$

Слагаемым в левой части этого уравнения соответствуют три ветви, сходящиеся в узел 2 и содержащие конденсатор емкостью $\tilde{C}_2$, резистор проводимостью $\tilde{G}_2$ и катушку индуктивностью $\tilde{L}_2/2$ соответственно.

Остальные ветви эквивалентной схемы построены аналогично. Действительно, для прицепа массой m_3 и груза массой m_4 имеем:

$$m_3 \frac{d v_3}{d t} + k_3 v_3 + k_4 (v_3 - v_4) + \frac{1}{1/c_0} (u_3 - u_1) + \frac{2}{1/c_4} (u_3 - u_4) = 0,$$

$$m_4 \frac{d v_4}{d t} + k_4 (v_4 - v_3) + \frac{2}{1/c_4} (u_4 - u_3) = 0.$$

Похожим образом можно построить эквивалентную схему для механической системы с вращательным движением.

4.3. Математическая модель линейного осциллятора

В широком смысле под *осциллятором* (от латинского слова *oscillo* — качаюсь) понимают любую техническую систему, способную совершать колебания при отсутствии переменных внешних воздействий.

Колебаниями принято называть процесс изменения во времени значений параметров, сопровождающийся чередованием их возрастания и убывания относительно определенных значений. Колебания могут иметь различную физическую природу и, как правило, сопровождаются преобразованием одной формы энергии в другую.

Хорошо известным примером осциллятора является механическая система, которая состоит из тела 1 массой m , присоединенного к неподвижной опоре 2 при помощи упругого элемента 3 (пружины) жесткостью c (рис. 35). К телу может быть приложена сила, изменяющаяся во времени t .

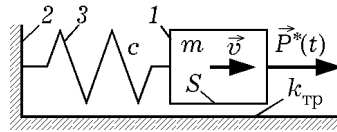


Рис. 35. Схема механической системы: 1 — деталь; 2 — неподвижное основание; 3 — пружина

В соответствии со вторым законом Ньютона запишем

$$m \frac{dv}{dt} = -cu - k_{\text{тр}} Sv + P^*(t), \quad (46)$$

где m — масса тела; v — проекция скорости тела на выбранное положительное направление; c — жесткость пружины; u — перемещение тела относительно положения, в котором пружина не деформирована; $k_{\text{тр}}$ — коэффициент линейного вязкого трения при движении тела по горизонтальной плоскости; S — площадь поверхности контакта тела с этой плоскостью; $P^*(t)$ — проекция внешней силы на выбранное положительное направление.

Учитывая, что проекция скорости $v(t)$ тела связана с его перемещением $u(t)$, запишем (46) в виде ОДУ второго порядка

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + k_{\text{тр}} S \frac{du}{dt} + cu = P^*(t) \quad \text{или} \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + 2h \frac{du}{dt} + \omega^2 u = \frac{P^*(t)}{c} \omega^2, \quad (47)$$

где $h = \frac{k_{\text{тр}} S}{2m} \geq 0$, $\omega^2 = \frac{c}{m}$.

В силу линейности рассматриваемого ОДУ соответствующий осциллятор принято называть *линейным осциллятором*.

Рассмотрим частный случай дифференциального уравнения (47) когда $P^*(t) \equiv 0$ и $0 < h < \omega$. Если известны начальные условия $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$, то ОДУ имеет решение

$$u(t) = e^{-ht} \left(u_0 \cos \sqrt{\omega^2 - h^2} t + \frac{v_0 + hu_0}{\sqrt{\omega^2 - h^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - h^2} t \right), \quad (48)$$

которое можно представить в виде

$$u(t) = A_1 e^{-ht} \cos(\omega_1 t + \varphi_1),$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - h^2}$.

Следовательно, через промежутки времени π / ω_1 , независимые от начальных условий, тело проходит положение равновесия, а через промежутки $2\pi / \omega_1$ функция $u(t)$ достигает локальных максимумов (или минимумов), которые соответствуют моменту обращения в нуль скорости тела (рис. 36).

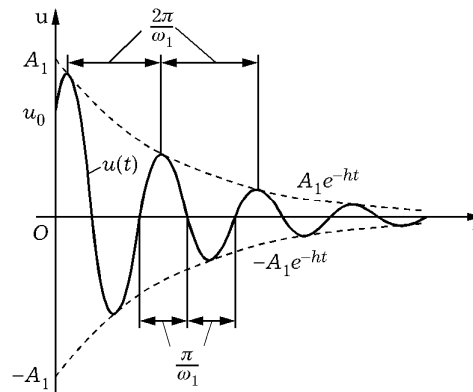


Рис. 36. Перемещение тела при затухающем колебательном движении

Каждое максимальное по абсолютной величине отклонение от положения равновесия называют *полуразмахом колебаний*. С течением времени полуразмахи колебаний уменьшаются, причем отношение двух последовательных полуразмахов в одну и ту же сторону от положения равновесия постоянно и равно

$$\frac{u(t_1)}{u(t_1 + 2\pi / \omega_1)} = \frac{A_1 e^{-ht_1}}{A_1 e^{-h(t_1 + 2\pi / \omega_1)}} = e^{2\pi h / \omega_1}.$$

Натуральный логарифм этой величины носит название *логарифмического декремента* (от латинского слова decrementum — уменьшение, убыль). Эта величина является количественной характеристикой быстроты затухания колебаний в рассматриваемой системе.

Таким образом, уравнение (48) описывает затухающие колебания, полуразмахи которых с течением времени уменьшаются.

Если пренебречь сопротивлением движению тела по горизонтальной плоскости, то, полагая $h = 0$, получаем однородное ОДУ

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u = 0 \quad (49)$$

и его решение

$$u(t) = u_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где A — *амплитуда колебаний*; ω — *угловая* (называемая иногда *круговой* или *циклической частотой* этих колебаний, независимая от начальных условий и определяющая *период* $T = 2\pi / \omega$ колебаний; φ — *начальная фаза колебаний*. Отметим, что в отличие от угловой частоты, измеряемой в рад/с, *частоту колебаний* $f = 2\pi\omega$ измеряют в герцах (Гц).

Полученное решение однородного ОДУ описывает *гармонические колебания*, а осциллятор называют *гармоническим осциллятором*. Независимо от физического содержания процесса колебаний ОДУ (49) называют *уравнением гармонического осциллятора*.

Затухающие колебания не являются, строго говоря, периодическим процессом, но сохраняют некоторые его свойства, в частности чередование через равные промежутки времени $T_1 = 2\pi / \omega_1$ локальных максимумов или локальных минимумов функции $u(t)$. Поэтому T_1 принято называть *условным периодом затухающих колебаний*, ω_1 — *условной угловой частотой*, а полуразмахи колебаний — их *условной амплитудой*.

Рассмотрим энергетические превращения в гармоническом осцилляторе (рис. 35). Преобразуем левую часть уравнения (49) следующим образом

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right) + cu = m \frac{dv}{dt} + cu = m \frac{dv}{du} \frac{du}{dt} + cu = m \frac{dv}{du} v + cu.$$

Тогда представим уравнение (49) в виде $d(mv^2/2) + d(cu^2/2) = 0$. После интегрирования этого уравнения, учитывая начальные условия, находим

$$m \frac{v^2}{2} + c \frac{u^2}{2} = K + \Pi = m \frac{v_0^2}{2} + c \frac{u_0^2}{2} = W,$$

т.е. полная энергия W рассматриваемой механической системы, равная сумме кинетической энергии K тела и потенциальной энергии Π , запасенной в пружине, в любой момент времени остается постоянной. Систему, в которой полная энергия не изменяется во времени, называют *консервативной* (от латинского слова *conservo* — сохраняю).

Рассмотрим частный случай ОДУ (47) когда $P^*(t) \equiv 0$ и $\omega < h$. Это уравнение при начальных условиях $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$ имеет решение

$$u(t) = e^{-ht} \left(u_0 \operatorname{ch} \sqrt{h^2 - \omega^2} t + \frac{v_0 + hu_0}{\sqrt{h^2 - \omega^2}} \operatorname{sh} \sqrt{h^2 - \omega^2} t \right) \text{ или}$$

$$u(t) = u_0 e^{-ht} \left(1 + \frac{v_0 + hu_0}{u_0 b} \operatorname{th} bt \right) \operatorname{ch} bt, \quad (50)$$

где $b = \sqrt{h^2 - \omega^2}$. Оно определяет так называемое затухающее аperiodическое движение тела. Если при $t \geq 0$ справедливо неравенство $1 + \frac{v_0 + hu_0}{u_0 b} \operatorname{th} bt > 0$, то $u(t)$ сохраняет знак u_0 .

Так как $0 \leq \operatorname{th} bt < 1$ при $t \geq 0$, то перемещение $u(t)$ сохраняет знак u_0 при условии $v_0/u_0 + h + b > 0$. Если это условие выполнено и $v_0/u_0 > 0$, то затухание немонотонное (сплошная кривая на рис. 37), монотонное затухание имеет место при $v_0/u_0 \leq 0$ (штриховая кривая на рис. 37). В противном случае затухание происходит с переменной знака перемещения (штрихпунктирная линия на рис. 37).

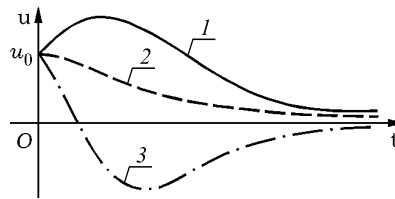


Рис. 37. Перемещение тела при затухающем аperiodическом движении: 1 — немонотонное затухание; 2 — монотонное затухание; 3 — затухание с переменной знака перемещения

Если $\omega = h$, то решение $u(t) = u_0 e^{-ht} \left(1 + \frac{v_0 + hu_0}{u_0} \cdot t \right)$ однородного дифференциального

уравнения можно получить из (50) предельным переходом при $b \rightarrow 0$. Этот случай является граничным между колебательным и аperiodическим процессами. Реально добиться на практике точного выполнения равенства $\omega = h$ не удастся. Однако следует иметь в виду, что возникающие в технической системе колебания быстрее всего затухают при $\omega \approx h$. Это свойство используют при проектировании амортизаторов и виброзащитных устройств.

Все варианты решения ОДУ (47), полученные выше при $P^*(t) \equiv 0$, остаются в силе и при $P^*(t) \equiv P = \text{const}$, если отсчет значений u_0 и функции $u(t)$ вести от значения $\tilde{u}_0 = P/c$.

При изменении проекции внешней силы по закону $P^*(t) = P \cos pt$ уравнение (47) можно записать в виде

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2h \frac{du}{dt} + \omega^2 u = \tilde{u}_0 \omega^2 \cos pt.$$

Этому неоднородному ОДУ удовлетворяет частное решение

$$u_*(t) = A(p) \cos(pt + \beta(p)),$$

где $A(p) = \tilde{u}_0 / \sqrt{(1 - p^2/\omega^2)^2 + (2hp/\omega^2)^2}$, $\beta(p) = \arctg\left(-\frac{2hp}{\omega^2 - p^2}\right)$. Функция $u_*(t)$ определяет установившийся периодический процесс *вынужденных колебаний* осциллятора при периодическом внешнем воздействии.

Амплитуда колебаний в случае установившегося процесса вынужденных колебаний достигает максимума при угловой частоте p , равной

$$p_0 = \sqrt{\omega^2 - 2h^2}.$$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний технической системы при приближении p к p_0 называют *резонансом*, а угловую частоту вынужденных колебаний p_0 — *резонансной*.

Для характеристики свойств линейного осциллятора используют величину

$$D = \frac{\omega}{2h},$$

которую принято называть *добротностью* осциллятора. Чем выше добротность линейного осциллятора, тем меньше его потери энергии за период колебаний и, как следствие этого, его свойства приближаются к свойствам гармонического осциллятора.

В отличие от вынужденных колебаний *свободные колебания* происходят в отсутствие переменных внешних воздействий на колебательную систему и зависят лишь от характеристик технической системы и начальных условий. В случае гармонического осциллятора эти колебания обычно называют *собственными колебаниями*, поскольку их угловая частота определяется решением соответствующей задачи на собственные значения.

Установлению процесса вынужденных колебаний при $h > 0$ предшествует так называемый *переходный процесс*, длительность которого определяется временем затухания свободных колебаний осциллятора. Поэтому длительность переходного процесса, например, оценивают промежутком времени, по истечении которого относительное уменьшение полуразмаха свободных колебаний равно заданному.

Полученные результаты справедливы не только для механического линейного осциллятора, но и для любого линейного осциллятора, в котором происходят колебательные процессы произвольной физической природы.

4.4. О построении математических моделей технических систем

Для построения ММ механической системы наряду с эквивалентной схемой часто удобно использовать общие уравнения динамики такой системы. В связи с этим вспомним некоторые основные понятия, которые были рассмотрены в курсе теоретической механики.

Под *обобщенными координатами* понимают совокупность из n независимых параметров $q_1, q_2, \dots, q_n$, достаточную для определения положения системы в пространстве. Производные $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ обобщенных координат по времени t называют *обобщенными скоростями*. В общем случае перемещения и скорости должны подчиняться условиям, отражающим ограничения на движение механической системы в пространстве. Такие ограничения в теоретической механике называют *связями*. Уравнения, отражающие эти ограничения, называют *уравнениями связи*. Допускаемые связями в фиксированный момент времени t бесконечно малые перемещения точек системы называют *возможными*.

Пример 1. Рассмотрим точку массой m на идеально гладкой горизонтальной поверхности, уравнение которой имеет вид $z = f(x, y)$ (рис. 38).

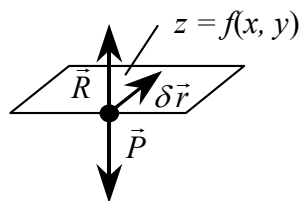


Рис. 38. Материальная точка на идеально гладкой горизонтальной поверхности

Положение свободной материальной точки можно задать тремя координатами x, y, z . На перемещение рассматриваемой точки наложено ограничение, которое можно отразить в следующем условии

$$z - f(x, y) = 0.$$

Записанное равенство называют уравнением связи. Эта связь является *удерживающей*, так как для любого возможного перемещения точки противоположное ему перемещение также является возможным. В противном случае связь называют *неудерживающей*. В уравнение связи время в явном виде не входит, т.е. связь является также *стационарной*.

Если ограничивающее условие может быть выражено только через координаты и время, то связь называют *голономной*, в противном случае — *неголономной*. В примере 1 связь, очевидно, является голономной.

Связи ограничивают движение механической системы посредством сил, действующих на эту систему. Эти силы называют *реакциями связи*, а остальные (внешние или внутренние) силы — *активными*. Если сумма работ реакций связи на любых возможных перемещениях точек механической системы равна нулю, то связь называют *идеальной*.

Пусть материальная точка в примере 1 получила возможное перемещение

$$\delta \vec{r} = \delta x \cdot \vec{i} + \delta y \cdot \vec{j} + \delta z \cdot \vec{k}$$

в фиксированный момент времени t , где $\delta x, \delta y, \delta z$ — проекции возможного перемещения точки на соответствующие оси декартовой прямоугольной системы координат; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты этой системы координат. Очевидно, что работа δA реакции $\vec{R}$ связи на возможном перемещении $\delta \vec{r}$ равна нулю, т.е.

$$\delta A = \vec{R} \cdot \delta \vec{r} = 0.$$

Следовательно, данная связь является идеальной.

Число обобщенных координат механической системы, на которую наложены только голономные связи, равно числу степеней свободы¹. Очевидно, в данном примере механическая система имеет две степени свободы и только две обобщенные координаты: x и y .

Если консервативная система имеет n степеней свободы и на нее наложены идеальные голономные связи, то движение в пространстве такой механической системы описывает система из n уравнений Лагранжа второго рода²

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где q_j — обобщенные координаты; $L = K - \Pi$ — кинетический потенциал (функция Лагранжа); K и Π — кинетическая и потенциальная энергии консервативной системы соответственно.

В курсе теоретической механики используют понятия *обобщенной силы*. Вспомним, как было выведено это понятие. Для этого рассмотрим работу всех *активных сил*, действующих на механическую систему, на любых возможных перемещениях точек системы

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i,$$

где N — число материальных точек системы; $\vec{F}_i$ — равнодействующая активных сил, приложенных к i -ой материальной точке; $\delta \vec{r}_i$ — возможное перемещение этой точки. Тогда это равенство запишем в следующем виде

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j, \quad (51)$$

где n — число степеней свободы; $\vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ — радиус-вектор i -ой материальной точки в фиксированный момент времени t ; $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ — вариации обобщенных координат (обобщенные возможные перемещения); Q_j — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j , здесь $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j},$$

где $j = 1, 2, \dots, n$.

Для нахождения обобщенной силы Q_k необходимо положить, что $\delta q_k \neq 0$, а остальные вариации обобщенных координат равными нулю, тогда $\delta A = Q_k \delta q_k$. Следовательно, имеем

$$Q_k = \frac{\delta A}{\delta q_k},$$

где $1 \leq k \leq n$.

¹ Числом степеней свободы тела называют число независимых между собой возможных перемещений механической системы. Для любой механической системы, на которую наложены только голономные связи, число степеней свободы равно числу независимых между собой координат, определяющих положение системы. Если на эту систему наложены еще неголономные связи, то число степеней свободы меньше числа координат, определяющих положение системы, на число неголономных связей.

² Уравнения Лагранжа второго рода или уравнения в обобщенных координатах были получены французским математиком и механиком Жозефом Луи Лагранжем (1736–1813) и опубликованы им в трактате “Аналитическая механика” (1788).

Если на механическую систему действуют только *потенциальные силы*³, то их легко можно представить в виде обобщенных сил

$$Q_j^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Учитывая, что потенциальная энергия системы не может зависеть от обобщенных скоростей, то уравнения Лагранжа можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = Q_j^{\Pi}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Непотенциальные силы также можно представить в виде обобщенных сил Q_j^{H} , где $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда для неконсервативной системы при условии идеальности и голономности связей уравнения Лагранжа второго рода принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{\text{H}}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (52)$$

Эти уравнения можно записать также в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j^{\text{H}} = Q_j^{\Pi} + Q_j^{\text{H}} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где Q_j — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j .

Пример 2. Пусть скорость самолета постоянна и равна v , а полет происходит на высоте H над уровнем моря. В полете крыло самолета совершает колебания относительно некоторого положения равновесия. Эти колебания связаны с изгибом крыла и с кручением вокруг оси, вызывающим изменение угла атаки α . Рассмотрим профиль крыла на рис. 39.

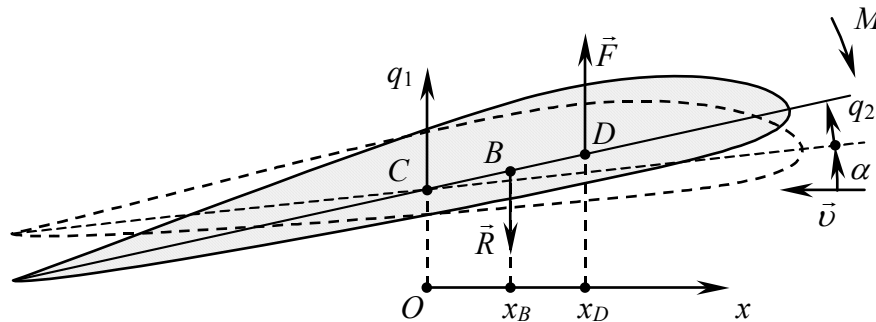


Рис. 39. Профиль крыла (поперечное сечение крыла)

Положение поперечного сечения крыла при колебаниях можно однозначно задать двумя обобщенными координатами: q_1 и q_2 , где q_1 — вертикальное перемещение центра масс C ; q_2 — угол поворота сечения вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку C .

Если $q_1 = 0$ и $q_2 > 0$, то тогда возникает противоположно направленный восстанавливающий момент величиной

$$M = c_2 q_2,$$

³ Силы называют потенциальными, если работа этих сил при переходе механической системы из одного положения в другое не зависит от пути и равна уменьшению потенциальной энергии системы (при мгновенном перемещении из одного положения в другое). Если потенциальные силы являются стационарными, то требование, заключенное в скобки, несущественно. К потенциальным силам относят, например, силу тяжести и реакцию упругих связей.

где c_2 — коэффициент, характеризующий жесткость крыла при кручении вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку C .

Если $q_1 > 0$ и $q_2 = 0$, то тогда возникает направленная вниз реакция $\vec{R}$, приложенная к точке B , причем

$$R = c_1 q_1,$$

где c_1 — коэффициент, характеризующий жесткость крыла на изгиб. Через точку B перпендикулярно сечению крыла проходит ось жесткости на изгиб, т.е. приложение вертикальных сил в точке этой оси вызывает только изгиб крыла и не приводит к его кручению.

В общем случае при $q_1 > 0$ и $q_2 > 0$ справедливо

$$R = c_1 q_1 + c_1 x_B [\operatorname{tg}(\alpha + q_2) - \operatorname{tg} \alpha] = c_1 (q_1 + x_B q_2),$$

так как углы $\alpha + q_2$ и α считаем малыми по модулю.

Полученные выше соотношения позволяют найти кинетическую и потенциальную энергии механической системы по следующим формулам:

$$K = m \frac{\dot{q}_1^2}{2} + J \frac{\dot{q}_2^2}{2}, \quad \Pi = \frac{R^2}{2c_1} + \frac{M^2}{2c_2} = c_1 \frac{(q_1 + x_B q_2)^2}{2} + c_2 \frac{q_2^2}{2}, \quad (53)$$

где m — масса крыла, J — момент инерции крыла относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно поперечному сечению крыла.

Рассматривая колебания крыла самолета относительно некоторого положения равновесия, характеризуемого углом атаки α , отметим, что текущему значению q_2 соответствует приращение величины аэродинамической подъемной силы, которая приложена в точке D и направлена перпендикулярно вектору скорости набегающего воздушного потока. Пусть это приращение пропорционально значению q_2 , т.е. $F = G q_2$, где $G = \text{const}$ — коэффициент пропорциональности, который в общем случае может зависеть, например, от плотности воздуха, скорости набегающего воздушного потока, формы крыла.

Покажем, что сила $\vec{F}$ не является потенциальной, т.е. ее работа зависит от пути перехода из одного положения механической системы, характеризуемого значениями $q_1 = 0$ и $q_2 = 0$, в другое, характеризуемое значениями $q_1 = \Delta q_1 > 0$ и $q_2 = \Delta q_2 > 0$.

Действительно, если сначала переместить центр масс на величину Δq_1 , а затем повернуть крыло на малый угол Δq_2 , то на первом этапе $F = 0$ и работа силы $\vec{F}$ равна нулю. На втором этапе эта сила совершит некоторую работу $A_* > 0$.

Если сменить очередность изменения обобщенных координат, то при повороте крыла на угол Δq_2 работа силы $\vec{F}$ также будет равна A_* , но теперь при последующем перемещении центра масс на расстояние $\Delta q_1 > 0$ сила $\vec{F}$, для которой $F = G \Delta q_2 = \text{const} > 0$, совершит работу $A^* = (G \Delta q_2) \Delta q_1 > 0$. Следовательно, $\vec{F}$ — непотенциальная сила, а рассматриваемая механическая система является неконсервативной.

Запишем работу силы $\vec{F}$ на произвольных вариациях δq_1 и δq_2 обобщенных координат q_1 и q_2 соответственно. Отсюда в соответствии с формулой (51) имеем

$$\delta A = Q_1^H \delta q_1 + Q_2^H \delta q_2 = F \delta q_1 + x_D F \delta q_2.$$

Тогда можно найти непотенциальные обобщенные силы:

$$Q_1^H = F = G q_2 \quad \text{и} \quad Q_2^H = x_D F = x_D G q_2.$$

Используя уравнения (52) и учитывая равенства (53), приходим к системе ОДУ

$$\begin{cases} m \ddot{q}_1 + c_1 (q_1 + x_B q_2) = G q_2; \\ J \ddot{q}_2 + x_B c_1 (q_1 + x_B q_2) + c_2 q_2 = x_D G q_2. \end{cases}$$

Отсюда получаем однородную систему линейных ОДУ с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = 0; \\ \ddot{q}_2 + a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = 0, \end{cases}$$

где $a_{11} = c_1/m$, $a_{12} = (c_1x_B - G)/m$, $a_{21} = x_Bc_1/J$, $a_{22} = (c_1x_B^2 + c_2 - x_DG)/J$.

Для исследования на устойчивость решений этой системы составим характеристическое уравнение для рассматриваемой системы ОДУ и найдем корни этого уравнения.

Нетривиальное частное решение системы ОДУ будем искать в виде

$$q_1 = A_1 e^{\lambda t} \text{ и } q_2 = A_2 e^{\lambda t}.$$

Подставляя эти равенства в однородную систему ОДУ приходим к однородной СЛАУ

$$\begin{cases} (\lambda^2 + a_{11})A_1 + a_{12}A_2 = 0, \\ a_{21}A_1 + (\lambda^2 + a_{22})A_2 = 0. \end{cases}$$

Из равенства нулю определителя матрицы коэффициентов этой системы уравнений получаем характеристическое уравнение

$$(\lambda^2 + a_{11})(\lambda^2 + a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0 \text{ или}$$

$$\lambda^4 + (a_{11} + a_{22})\lambda^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Очевидно, что характеристическое уравнение является биквадратным уравнением. Тогда

$$\lambda^2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}.$$

где $\alpha = (a_{11} + a_{22})/2$, $\beta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Далее рассмотрим следующие возможные случаи, когда $\beta < 0$, $\beta = 0$, $0 < \beta \leq \alpha^2$, $\alpha^2 < \beta$, причем $\alpha > 0$.

Если $\beta < 0$, то один из корней λ характеристического уравнения положителен и соответствующее решение системы ОДУ неустойчиво по Ляпунову.

Если $\beta = 0$, то характеристическое уравнение имеет корни с нулевой действительной частью, т.е. существуют чисто мнимые и кратные корни, равные нулю.

В этом случае иногда появляются решения, которые устойчивы по Ляпунову, но не асимптотически. Например, крыло может находиться в отклоненном состоянии от положения равновесия. Это явление называют *дивергенцией*.

Если $0 < \beta \leq \alpha^2$, то $\lambda^2 < 0$ и все четыре корня чисто мнимые. Это означает, что соответствующее решение устойчиво, но не асимптотически, т.е. при отклонении от положения равновесия возникнут периодические изгибные и крутильные колебания с неизменными амплитудами.

Если $\alpha^2 < \beta$, то λ^2 является комплексным числом, а извлечение квадратного корня из любого комплексного числа приводит к двум комплексным числам, имеющим действительные части противоположных знаков. Следовательно, хотя бы один из корней имеет положительную действительную часть, т.е. соответствующее решение неустойчиво по Ляпунову. В этом случае при отклонении от положения равновесия возникают изгибные и крутильные колебания с неограниченно возрастающими полуразмахами колебаний. Это явление получило название *изгибно-крутильного флаттера*⁴ (от английского слова flutter — махать, трепетать).

⁴ Изгибно-крутильный флаттер был обнаружен в 30-х годах XX века во время летных испытаний скоростных самолетов. Многие из этих испытаний заканчивались катастрофическим разрушением конструкций вследствие быстрого нарастания колебаний.

Если положить, что $G = k v^2 / 2$, где k — коэффициент пропорциональности, то можно выписать скорость v_* , при которой может иметь место явление, названное выше дивергенцией. Скорость v_* называют *критической скоростью дивергенции*.

Действительно, из равенства $\beta = 0$ получаем

$$c_1 x_B^2 + c_2 - x_D G = c_1 x_B^2 - G x_B \text{ или}$$

$$c_2 = G(x_D - x_B) = k v_*^2 (x_D - x_B) / 2.$$

Тогда

$$v_* = \sqrt{\frac{2c_2}{k(x_D - x_B)}}.$$

Найти v_* возможно при $x_D > x_B$, т.е. аэродинамическая подъемная сила должна быть приложена ближе к передней кромке крыла по сравнению с осью жесткости. Это означает, что с ростом v величина

$$\beta = c_1 \frac{c_2 - G(x_D - x_B)}{mJ}$$

убывает, и тогда осуществится случай $\beta < 0$.

Скорость v^* , при которой $\alpha^2 = \beta$ называют *критической скоростью изгибно-крутильного флаттера*. Если $x_D < x_B$, то с ростом скорости набегающего воздушного потока β возрастает, и тогда реализуется случай $\alpha^2 < \beta$.

Отметим, что если придать соответствующий физический смысл обобщенным перемещениям, скоростям и силам, то уравнения Лагранжа второго рода можно использовать для построения ММ не только механических систем. В частности, используя один из вариантов электромеханической аналогии, можно при помощи этих уравнений строить ММ электрических и электромеханических систем⁵.

Пример 3. Для исследования колебаний вала применяют электродинамический датчик. Он состоит из двух катушек: неподвижной и подвижной. Подвижная катушка закреплена на оси вала, совершающего колебания. Неподвижная катушка конструктивно выполнена в виде двух половин, между которыми проходит ось вращения подвижной катушки (рис. 40).

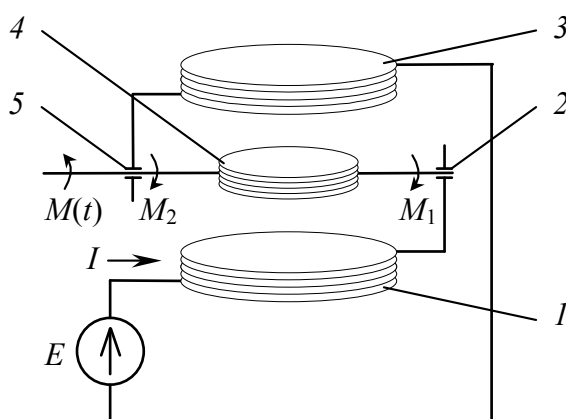


Рис. 40. Схема расположения катушек в электромеханической системе: 1, 3 — неподвижные катушки; 2, 5 — подшипники; 4 — подвижная катушка, закрепленная на оси вала

⁵ В 1873 г. английский ученый Д. Максвелл (1831–1879) в “Трактате по электричеству и магнетизму” предложил применять уравнения Лагранжа к электрическим и электромеханическим системам, используя один из вариантов электромеханической аналогии.

Катушки последовательно соединены с источником постоянного напряжения, ЭДС которого равна E . Сопротивление нагрузки в такой электрической цепи постоянно и равно R . При колебаниях вала подвижная катушка поворачивается по отношению к неподвижной катушке на угол φ , что вызывает изменение индуктивности $L(\varphi)$.

Пусть вал совершает крутильные колебания под действием возмущающего момента $M(t)$. Моменты сопротивления M_1 и M_2 вращению вала в подшипниках пропорциональны угловой скорости вращения вала, а коэффициенты пропорциональности равны k_1 и k_2 соответственно. Момент инерции вала относительно оси вращения равен J . Построим ММ электро-механической системы, используя первый вариант электромеханической аналогии.

Данная электромеханическая система имеет две степени свободы, так как надо задать один параметр для механической системы и второй — для электрической цепи. В качестве обобщенных координат выберем угол поворота вала φ и электрический заряд q . Запишем соответствующие уравнения Лагранжа второго рода в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \varphi} = Q_\varphi, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q} = Q_q, \end{cases} \quad (54)$$

где Q_φ и Q_q — обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам φ и q .

Для вычисления обобщенной силы Q_φ дадим возможное перемещение $\delta\varphi$ валу, а изменение электрического заряда будем считать равным нулю, т.е. $\delta q = 0$. Тогда работа активных сил и моментов на возможном перемещении $\delta\varphi$ равна

$$\delta A = (M(t) - M_1 - M_2) \delta\varphi = (M(t) - k_1 \dot{\varphi} - k_2 \dot{\varphi}) \delta\varphi = Q_\varphi \delta\varphi,$$

где $Q_\varphi = M(t) - (k_1 + k_2) \dot{\varphi}$.

Для определения обобщенной силы Q_q считаем, что $\delta q \neq 0$, а $\delta\varphi = 0$. Тогда работа электродвижущей силы в электрической цепи равна

$$\delta A = (E - IR) \delta q = Q_q \delta q,$$

где $Q_q = E - IR$.

Перейдем к вычислению величины $K = K_\varphi + K_q$, где K_φ — кинетическая энергия механической системы, K_q — энергия магнитного поля электрической системы.

Кинетическая энергия механической системы равна кинетической энергии вала, совершающего колебания вокруг своей оси, т.е.

$$K_\varphi = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2.$$

Затем предположим, что энергия магнитного поля электрической системы равна

$$K_q = \frac{1}{2} L(\varphi) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} L(\varphi) I^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} L(\varphi) I^2 \right) = J \dot{\varphi}, \\ \frac{\partial K}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2} L'(\varphi) I^2, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial K}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} L(\varphi) I^2 \right) = L(\varphi) I,$$

$$\frac{\partial K}{\partial q} = 0.$$

Затем находим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = J \ddot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial I} \right) = \frac{d}{dt} (L(\varphi) I) = L'(\varphi) \dot{\varphi} I + L(\varphi) \frac{dI}{dt}.$$

Используя полученные выше результаты, запишем систему уравнений (54) в виде

$$\begin{cases} J \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} L'(\varphi) I^2 = Q_{\varphi} = M(t) - (k_1 + k_2) \dot{\varphi}, \\ L'(\varphi) \dot{\varphi} I + L(\varphi) \frac{dI}{dt} = Q_q = E - IR, \end{cases}$$

а затем после несложных преобразований получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} J \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} L'(\varphi) I^2 + (k_1 + k_2) \dot{\varphi} = M(t), \\ L(\varphi) \dot{I} + (L'(\varphi) \dot{\varphi} + R) I = E. \end{cases}$$

Эти уравнения описывают рассматриваемую электромеханическую систему.

5. НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАКРОУРОВНЯ

Если параметры ТО связаны линейными соотношениями в его ММ, то при изменении какого-либо внешнего (или внутреннего) параметра рассматриваемого объекта ММ предсказывает линейное изменение зависящего от него выходного параметра. При изменении двух или более параметров ТО имеет место сложение их влияний, т.е. ММ обладает свойством *суперпозиции* (от латинского слова *superpositio* — наложение). Такую модель называют линейной, если она не обладает свойством суперпозиции, то — нелинейной ММ. Количественный анализ нелинейных ММ существенно сложнее, чем линейных моделей, и часто требует применения численных методов с использованием средств вычислительной техники.

Далее рассмотрим сравнительно несложные нелинейные ММ макроуровня. Эти модели соответствуют таким ТО, идеализация которых ради получения линейной ММ приводит, как правило, не только к значительным погрешностям, но и к существенному искажению свойств этих ТО.

5.1. Причины возникновения нелинейности

Разберем более подробно некоторые причины возникновения нелинейности сначала на примере механических систем.

При взаимодействии поверхностей двух твердых тел возникают силы трения, препятствующие относительному перемещению этих тел. Если между поверхностями соприкасающихся твердых тел отсутствует прослойка смазочного материала, то такое трение называют *сухим*, в противном случае — *вязким*.

Пусть тело перемещают по неподвижной горизонтальной поверхности (рис. 41), причем соприкасающиеся поверхности разделены слоем смазочного материала (например, при жидкостной или газовой смазке).

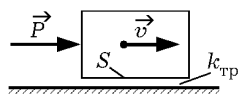


Рис. 41. Схема скольжения тела по поверхности

Линейная зависимость силы трения $\vec{P}_{\text{тр}}$ от вектора скорости $\vec{v}$ имеет место в случае сравнительно медленного относительного перемещения поверхностей. Для краткости такое трение называют *линейным*. С увеличением скорости эта зависимость становится нелинейной и ее можно представить в виде

$$\vec{P}_{\text{тр}} = -k_{\text{тр}} S |\vec{v}|^{\alpha-1} \vec{v},$$

где $\alpha = \text{const} > 1$; $k_{\text{тр}} = \text{const} > 0$ — коэффициент вязкого трения; S — площадь поверхности контакта. В этой зависимости учтено, что сила трения имеет направление, противоположное направлению вектора скорости.

При $\alpha = 2$, когда абсолютная величина силы трения пропорциональна квадрату модуля скорости, обычно говорят о *турбулентном трении*. Тогда в слое смазочного материала, непосредственно прилегающем к поверхности твердого тела, режим течения становится турбулентным (от латинского слова *turbulentus* — бурный, беспорядочный) с хаотическими пульсациями скорости жидкости или газа. Отметим, что аналогично можно представить силу сопротивления при движении с большой скоростью твердого тела в жидкости или газе.

Если слой смазочного материала между поверхностями отсутствует, то говорят о *сухом трении*, различая при этом *сухое трение покоя* и *сухое кинематическое трение*. Сухое кинематическое трение разделяют по характеру движения на *трение скольжения* и *трение качения*. При прочих равных условиях абсолютная величина силы кинематического трения, возникающая при относительном перемещении соприкасающихся поверхностей, не больше

величины силы трения покоя, а величина силы трения качения, зависящая от кривизны этих поверхностей, меньше величины силы трения скольжения. Сила сухого трения пропорциональна величине N нормальной силы давления твердых тел друг на друга, причем коэффициент пропорциональности слабо зависит от скорости. При качении шара или кругового цилиндра радиуса R по плоской горизонтальной поверхности сила сухого трения прямо пропорциональна N и обратно пропорциональна R .

Если тело, изображенное на рис. 41, неподвижно, то сила сухого трения может быть определена лишь при рассмотрении равновесия тела с учетом действия внешних сил. Если проекция P равнодействующей внешних сил на направление возможного движения тела не превышает по абсолютной величине силу трения покоя, то проекцию силы трения на выбранное направление находим по формуле

$$P_{\text{тр}} = -P,$$

в противном случае тело приходит в движение. В общем случае можно воспользоваться следующей зависимостью

$$P_{\text{тр}} = \begin{cases} -kN, & kN \leq P, \quad 0 < v; \\ -P, & -k_{\Pi}N \leq P \leq k_{\Pi}N, \quad v = 0; \\ kN, & P \leq -kN, \quad v < 0, \end{cases}$$

где k_{Π} — коэффициент трения покоя; k — коэффициент трения скольжения, причем $k \leq k_{\Pi}$.

Другая причина, приводящая к нелинейным ММ механических систем, вызвана нелинейными свойствами элементов этих систем. Например, величина P силы сжатия витой конической пружины зависит от перемещения (осадки) ее свободного конца относительно опорной плоскости (рис. 42).

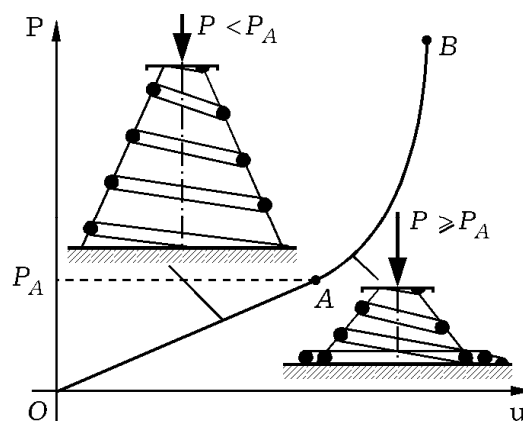


Рис. 42. Зависимость величины силы сжатия витой конической пружины от перемещения ее свободного конца

При $P < P_A$ эта зависимость близка к линейной, но при $P \geq P_A$ витки пружины по мере ее сжатия последовательно соприкасаются с опорной плоскостью, что приводит к увеличению жесткости с ростом перемещения u . После соприкосновения с опорной плоскостью всех витков жесткость резко возрастает (точка B на рис. 42). Пружины с переменной жесткостью используют для создания систем защиты приборов, оборудования или перевозимых грузов от вредного воздействия высокочастотных вибраций.

Даже при сравнительно малых деформациях многих материалов может нарушаться линейная связь деформаций и напряжений, что также является причиной возникновения нелинейности в механической системе.

Рассмотрим диаграмму одноосного растяжения металлического стержня (рис. 43).

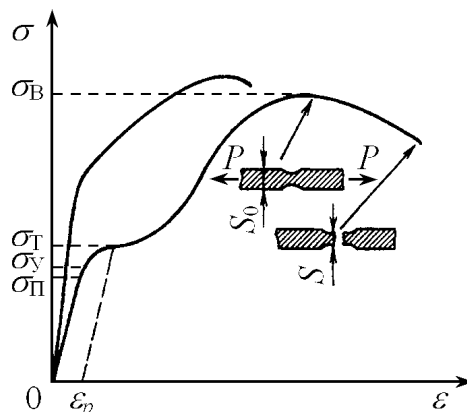


Рис. 43. Диаграмма одноосного растяжения металлического стержня

Пока растягивающие напряжения не достигнут предела пропорциональности σ_{π} , диаграмма представляет собой участок прямой линии, т.е. относительное удлинение ε прямо пропорционально напряжению σ .

При $\sigma \leq \sigma_y$, где σ_y — предел упругости, возникают упругие деформации, т.е. независимое от времени относительное удлинение, исчезающее при снятии нагрузки.

Начиная с того момента, когда напряжения достигнут предела текучести σ_T , деформации растут без увеличения напряжений и на диаграмме получается участок, который называют площадкой текучести. Если начать уменьшать напряжение до нуля, то связь между ε и σ снова становится близкой к линейной, в этом случае говорят, что происходит упругая разгрузка. Однако при $\sigma = 0$ сохраняется остаточная пластическая деформация ε_p .

Если $\sigma_T < \sigma < \sigma_B$, где σ_B — предел прочности, то соответствующий участок диаграммы называют зоной упрочнения. При $\sigma = \sigma_B$ образец выдерживает наибольшую нагрузку. При увеличении нагрузки в зоне упрочнения начинает образовываться так называемая шейка, в которой затем и происходит разрушение образца.

Такое поведение материала требует построения достаточно сложных нелинейных ММ. Это необходимо, например, при математическом моделировании таких технологических процессов, как прокатка, штамповка и ряд других.

Далее рассмотрим некоторые причины возникновения нелинейности на примере других технических систем.

Пусть цилиндрический резервуар с вертикально расположенной образующей и поперечным сечением площадью S заполняется идеальной (невязкой) жидкостью через трубопровод, присоединенный к дну резервуара (рис. 44).

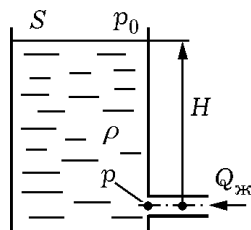


Рис. 44. Расчетная схема цилиндрического резервуара, заполняемого через трубопровод

Для рассматриваемого резервуара справедливо линейное уравнение состояния

$$Q_{\text{ж}} = \frac{S}{\rho g} \frac{d\Delta p}{dt}, \quad (55)$$

где $\Delta p = p - p_0$ — разность давлений; p — давление на входе в резервуар подводящего трубопровода; p_0 — давление окружающей среды над поверхностью жидкости; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения.

Затем рассмотрим сферический резервуар, который заполняется идеальной (невязкой) жидкостью через трубопровод, присоединенный к дну резервуара (рис. 45).

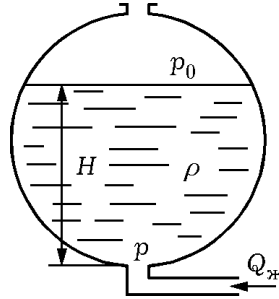


Рис. 45. Расчетная схема сферического резервуара, заполняемого через трубопровод

Очевидно, что объем жидкости, заполняющей резервуар до уровня высотой H , равен

$$V_{\text{ж}} = \int_0^H S(z) dz,$$

где $S(z)$ — зависимость площади поперечного сечения резервуара от координаты z , отчитываемой в вертикальном направлении от трубопровода. В этом случае объемный расход жидкости через трубопровод равен

$$Q_{\text{ж}} = \frac{dV_{\text{ж}}}{dt} = S(H) \frac{dH}{dt}.$$

Если считать скорость течения жидкости в трубопроводе достаточно малой, то

$$H = \frac{\Delta p}{\rho g}.$$

Тогда вместо линейного уравнения состояния (55) получаем нелинейное уравнение

$$Q_{\text{ж}} = C(\Delta p) \frac{d\Delta p}{dt},$$

где $C(\Delta p) = \frac{1}{\rho g} S\left(\frac{\Delta p}{\rho g}\right)$ — функция, зависящая от разности давлений.

Из курса физики известно, что для большинства диэлектриков связь между векторами электрической поляризации и напряженности электрического поля остается линейной лишь при ограниченных значениях модуля вектора напряженности, а с увеличением этих значений происходит насыщение процесса поляризации диэлектрика. Это приводит к тому, что при использовании диэлектрика в электрическом конденсаторе связь между накапливаемым электрическим зарядом Q_e и разностью U потенциалов на обкладках конденсатора при достаточно высоких значениях U оказывается нелинейной.

Аналогичная ситуация возникает для зависимости вектора намагниченности ферромагнетиков от вектора напряженности магнитного поля. Поэтому связь потокоцепления Ψ и

силы I тока для индуктивной катушки, намотанной на железный сердечник, при достаточно высоких значениях I становится нелинейной.

Даже уравнение состояния резистора при определенных условиях может стать нелинейным. Например, для резистора, сопротивление R которого существенно изменяется от его температуры, существует нелинейная зависимость силы I электрического тока, проходящего через резистор, от падения напряжения U на этом резисторе, т.е.

$$I = \frac{U}{R(U)}.$$

Помимо рассмотренных электрических двухполюсников в современных электрических системах используют различные элементы с существенно нелинейными характеристиками.

В тепловых системах одной из причин, приводящих к необходимости рассматривать нелинейные ММ, является увеличение теплоемкости всех веществ с ростом их температуры. В сравнительно небольшом интервале изменения температуры таким увеличением обычно можно пренебречь, но при рассмотрении тепловых процессов в широком диапазоне температур этот эффект оказывает заметное влияние на количественные результаты математического моделирования. Зависимость теплопроводности веществ от температуры является более сложной и также вызывает необходимость построения нелинейных ММ.

5.2. Статические и стационарные модели

Иногда полезно иметь в виду ситуации, когда параметры ТО не изменяются во времени. Эти ситуации могут и не иметь места в действительности, но их анализ обычно дает оценки границ возможного изменения параметров, представляющие интерес. Такие оценки можно получить при помощи *статических* и *стационарных моделей*.

Статические ММ в отличие от *стационарных* описывают ТО в *состоянии равновесия*, т.е. представляющие интерес параметры ТО остаются постоянными при постоянных внешних воздействиях. При построении таких ММ используют законы сохранения рассматриваемых в ТО физических субстанций.

Пример 1. На высокой околоземной орбите находится сферический спутник, диаметр которого равен d . Пусть поверхность спутника имеет коэффициент излучения ε и коэффициент поглощения солнечного излучения A_s . Аппаратура спутника при работе в максимальном режиме выделяет тепловую энергию мощностью Q . Плотность потока солнечного излучения на среднем расстоянии Земли от Солнца равна q_s . В случае высокой орбиты влиянием на температуру спутника собственного излучения Земли и отраженного от ее поверхности солнечного излучения можно пренебречь.

Согласно закону Стефана-Больцмана с поверхности тела отводится тепловой поток излучения плотностью

$$q = \varepsilon \sigma_0 T^4,$$

где T и ε — абсолютная температура и коэффициент излучения тела, причем $0 < \varepsilon \leq 1$; $\sigma_0 = 5,6696 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м² · К⁴) — постоянная Стефана-Больцмана.

Для оценки усредненной по объему спутника абсолютной температуры $\bar{T}$, значение которой остается неизменным при постоянных внешних воздействиях, составим на основе закона сохранения энергии уравнение теплового баланса

$$A_s q_s \frac{\pi d^2}{4} + Q = \varepsilon \sigma_0 \bar{T}^4 \pi d^2.$$

В левой части уравнения первое слагаемое соответствует тепловому потоку, который возникает при поглощении солнечного излучения, а выражение в правой части — тепловому потоку, который рассеивается в окружающее пространство в результате собственного излучения. Из этого уравнения получим

$$\bar{T} = \sqrt[4]{\frac{A_s q_s}{4 \varepsilon \sigma_0} + \frac{Q}{\varepsilon \sigma_0 \pi d^2}}. \quad (56)$$

Значение $\bar{T}$, определяемое при помощи (56), называют **равновесной температурой**, поскольку при этом значении “уравновешены” все рассматриваемые в ТО тепловые потоки.

Если задать, например, следующие значения: $q_s \approx 1400$ Вт/м², $A_s / \varepsilon \approx 16$ (для полированной поверхности оболочки из нержавеющей стали), то в случае неработающей аппаратуры ($Q \equiv 0$) получим температуру $\bar{T} \approx 560$ К ($\bar{T} \approx 287$ °С), что может оказаться недопустимой с точки зрения работоспособности некоторых систем спутника.

Пример 2. Нагрев конструкции летательного аппарата при его движении в плотных слоях атмосферы называют **аэродинамическим**. Пусть скорость летательного аппарата постоянна и равна v , а полет происходит на высоте H над уровнем моря. Рассмотрим возможные оценки температуры внешней обшивки летательного аппарата при **аэродинамическом нагреве**. Для получения верхних оценок значений температуры обшивки предположим, что она идеально теплоизолирована с внутренней стороны.

При длительном полете в качестве оценки температуры обшивки летательного аппарата можно использовать значение температуры заторможенного воздушного потока, равное

$$T^* = T_H \left(1 + \frac{k-1}{2} M_H^2 \right),$$

где T_H — абсолютная температура воздуха на высоте H ; k — показатель адиабаты (для воздуха $k \approx 1,4$); $M_H = v/a_H$ — число Маха; a_H — скорость звука на высоте H .

На высотах от 11 до 20 км принимают $T_H \approx 216$ К ($T_H \approx -57$ °С), что соответствует скорости звука 295 м/с. Таким образом, при полете со скоростью $v = 1000$ м/с число Маха $M_H \approx 3,4$, а $T^* \approx 712$ К ($T^* \approx 439$ °С).

Если вектор скорости воздушного потока направлен вдоль поверхности обшивки летательного аппарата (рис. 46), то оценку можно сделать более точной, учитывая температуру воздуха у поверхности обшивки.

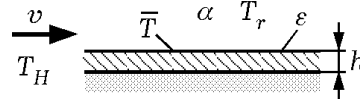


Рис. 46. Расчетная схема обшивки

Для получения такой оценки можно использовать значение температуры восстановления, которое равно

$$T_r = T_H \left(1 + \frac{k-1}{2} r M_H^2 \right) < T^*,$$

где r — **коэффициент восстановления** температуры, равный 0,84 при ламинарном режиме течения в пограничном слое и 0,89 при турбулентном режиме. Если принять $r \approx 0,89$, то для использованных выше исходных данных получим $T_r \approx 658$ К ($T_r \approx 385$ °С). При такой температуре алюминиевые сплавы уже не работоспособны, и поэтому приходится применять обшивку, например, из стали или титановых сплавов.

В действительности обшивка летательного аппарата не только получает тепловую энергию от воздушного потока, но и одновременно излучает ее в окружающее пространство в соответствии с законом Стефана-Больцмана, причем тем больше, чем выше ее температура. Поэтому более точной оценкой температуры является значение равновесной температуры $\bar{T}$, которое находим из условия равенства подводимого к обшивке и отводимого от нее тепловых потоков, приходящихся на единицу ее внешней поверхности, т.е.

$$\alpha(T_r - \bar{T}) = \varepsilon \sigma_0 \bar{T}^4,$$

где α — коэффициент теплоотдачи; ε — коэффициент излучения внешней поверхности обшивки. Отсюда следует алгебраическое уравнение четвертой степени

$$C \mathcal{G}^4 + \mathcal{G} - 1 = 0,$$

где $C = \varepsilon \sigma_0 T_r^3 / \alpha$; $\mathcal{G} = \bar{T} / T_r$ — безразмерная равновесная температура. При известном значении C решение полученного алгебраического уравнения позволяет получить значение равновесной температуры $\bar{T} < T_r$.

Таким образом, показаны некоторые способы получения оценок значений температуры обшивки летательного аппарата.

В технических устройствах нередко возникают периодические процессы, одной из важнейших характеристик которых является период T или угловая частота $\omega = 2\pi/T$ колебаний. Для получения полной картины периодических процессов, протекающих в ТО, применяют *нестационарную* ММ. Однако угловую частоту периодических колебаний обычно удается найти более простым путем. Действительно, если от схемы ТО перейти к РС гармонического осциллятора, состоящего из тела массой m и упругой связи жесткостью c , тогда

$$\omega = \sqrt{c/m}.$$

Таким образом, приходим к использованию так называемой *стационарной* ММ.

Пример 3. Для защиты оборудования, приборов или устройств от нежелательного воздействия высокочастотных вибраций, передающихся через основания, узлы крепления или элементы подвески, создают специальную систему виброизоляции, которая обеспечивает наибольшее отношение ожидаемых значений частоты вибраций к частоте ω свободных колебаний системы виброзащиты, включающей и защищаемый объект. Это позволяет исключить возникновение резонансных явлений.

Пусть систему виброизоляции вместе с объектом удастся свести к РС гармонического осциллятора, состоящего из тела массой m и упругой связи жесткостью c . Однако масса защищаемого объекта может изменяться в широких пределах (например, в случае разной загрузки железнодорожного вагона или кузова автомобиля). В таком случае полезным оказывается так называемый равночастотный виброизолятор. Жесткость упругих элементов равночастотного виброизолятора изменяется в зависимости от массы защищаемого объекта так, что частота ω_0 свободных колебаний системы остается постоянной. Для этого применяют, например, витые конические пружины с нелинейной статической характеристикой (рис. 42), т.е. с нелинейной зависимостью величины $P(u)$ силы сжатия от перемещения u ее свободного конца.

Сформулируем требования к статической характеристике такой пружины. Для этого рассмотрим точку A на рис. 47. Она соответствует силе сжатия пружины

$$P_A = m_A g,$$

где m_A — масса системы виброизоляции вместе с защищаемым объектом; g — ускорение свободного падения.

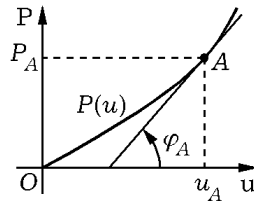


Рис. 47. Статическая характеристика витой конической пружины

При достаточно малых колебаниях относительно положения равновесия системы, определяемого перемещением u_A , криволинейный участок характеристики в окрестности точки A можно приближенно заменить участком касательной в этой точке с углом наклона φ_A . В результате получим линейную колебательную систему, соответствующую гармоническому осциллятору массой m_A и жесткостью

$$c_A = \left. \frac{dP(u)}{du} \right|_{u=u_A}.$$

Частота свободных колебаний такого осциллятора равна

$$\omega_A = \sqrt{\frac{c_A}{m_A}} = \sqrt{\frac{1}{P_A/g} \cdot \left. \frac{dP(u)}{du} \right|_{u=u_A}}.$$

Отсюда ясно, что частота свободных колебаний системы виброизоляции вместе с защищаемым объектом будет постоянной и равной заданному значению ω_0 , если выполнено равенство $\omega_0 = \omega_A$ для любой точки A , принадлежащей графику функции $P(u)$, т.е.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{P(u)} \cdot \frac{dP(u)}{du}} \quad \text{или}$$

$$\frac{dP(u)}{du} = \frac{\omega_0^2}{g} P(u). \quad (57)$$

После интегрирования получим

$$P(u) = C \exp\left(\frac{\omega_0^2}{g} u\right). \quad (58)$$

Из физических соображений $C > 0$ и было бы логично найти константу C из условия прохождения статической характеристики через начало координат, т.е. $P(0) = 0$. Однако в этом случае $C = 0$.

Преодолеть это затруднение можно при помощи простых практических соображений. В техническом задании на разработку системы виброизоляции задают наименьшую массу защищаемого объекта. Поэтому при создании этой системы можно оценить наименьшее значение P_0 веса системы вместе с защищаемым объектом. Затем считаем, что ОДУ (57) справедливо при $P \geq P_0$, а при $P < P_0$ используем, например, простейшую линейную зависимость

$$P(u) = c_0 u, \quad (59)$$

где c_0 — постоянная жесткость. Чтобы обеспечить плавность перехода от линейной части характеристики к нелинейной, нужно обеспечить выполнение условия

$$\left. \frac{dP(u)}{du} \right|_{u=u_0} = c_0,$$

где u_0 — перемещения свободного конца пружины под действием силы сжатия P_0 . Это уравнение с учетом (57) равносильно следующему равенству $c_0 = \omega_0^2 P_0 / g$. Таким образом, при $P = P_0$ из уравнения (59) находим $u_0 = P_0 / c_0 = g / \omega_0^2$, а затем, используя (58), определяем

$$C = P(u_0) \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{g} u_0\right) = P_0 \exp(-1).$$

После подстановки C в (58) делаем вывод о том, что требуемая статическая характеристика пружины

$$P(u) = \begin{cases} \omega_0^2 P_0 u / g, & 0 \leq P < P_0; \\ P_0 \exp(\omega_0^2 u / g - 1), & P \geq P_0, \end{cases}$$

состоящая из двух участков — линейного и нелинейного, определена. Вид этой характеристики, построенной с использованием стационарной ММ, представлен на рис. 48.

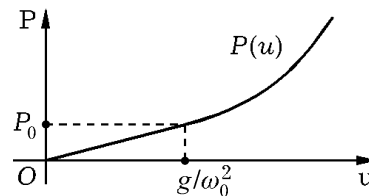


Рис. 48. Статическая характеристика витой конической пружины

Найденную зависимость можно представить и в следующем виде

$$P(u) = \begin{cases} \omega_0^2 P_0 u / g, & 0 \leq u < u_0; \\ P_0 \exp(\omega_0^2 u / g - 1), & u_0 \leq u, \end{cases}$$

где $u_0 = g / \omega_0^2$.

5.3. Некоторые нестационарные математические модели

Иногда некоторые нестационарные ММ технических устройств можно привести к нелинейному ОДУ первого порядка

$$\frac{du}{dt} = f(t, u(t)), \quad (60)$$

где $u(t)$ — действительная функция действительного аргумента t .

Пусть функция $f(t, u)$, определенная в области G , удовлетворяет условию Липшица в G относительно u , т.е. существует такое число $L > 0$, называемое постоянной Липшица, что для любых двух точек (t, x) и (t, y) из G выполнено неравенство

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|.$$

Пусть функция $f(t, u)$ непрерывна в прямоугольной замкнутой области

$$D = \{(t, u) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |u - u_0| \leq b\} \subseteq G,$$

тогда, согласно теореме Коши, существует единственное решение ОДУ (60) с начальным условием $u(t_0) = u_0$. Это решение определено при

$$|t - t_0| \leq h,$$

$$\text{где } h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_{(t, u) \in D} \{|f(t, u)|\}.$$

Если выполнены условия теоремы Коши, то решение ОДУ непрерывно зависит от начального условия и правой части ОДУ. Если к тому же правая часть этого ОДУ зависит от некоторого параметра $\alpha \in A \subset \mathbb{R}$, где A — интервал числовой прямой, то решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f(t, u(t), \alpha), \\ u(t_0, \alpha) &= u_0 \end{aligned}$$

непрерывно зависит от параметра α при дополнительном условии непрерывной дифференцируемости функции $f(t, u, \alpha)$ по α на множестве

$$\tilde{D} = \{(t, u, \alpha) \in \mathbb{R}^3 : (t, u) \in D \subset \mathbb{R}^2, \alpha \in A \subset \mathbb{R}\}.$$

Свойство непрерывной зависимости решения важно при рассмотрении многих прикладных задач, поскольку начальное условие, правая часть ОДУ или параметр известны лишь приближенно.

Если имеет место непрерывная зависимость решения от параметра α , то изменение этого параметра не приведет к резкому изменению расположения интегральных кривых на плоскости tOu . Пусть непрерывная зависимость решения задачи Коши от параметра α нарушается, и в окрестности некоторого значения α_0 параметра α происходит качественная перестройка расположения интегральных кривых на плоскости tOu . Тогда это явление называют *бифуркацией*, а значение α_0 — *бифуркационным значением*.

Выявим особенности интегральной кривой, являющейся графиком решения ОДУ (60), для случая, когда правая часть этого ОДУ не зависит явно от времени, т.е.

$$\frac{du}{dt} = f(u).$$

Вид этой кривой зависит от того, имеет или нет уравнение $f(u) = 0$ действительные корни. Если таких корней нет, то производная функции $u(t)$ знакопостоянна, а функция $u(t)$ строго монотонна (возрастает или убывает).

Пусть уравнение $f(u) = 0$ имеет $n \in \mathbb{N}$ действительных различных корней $u_1, u_2, \dots, u_n$. Тогда каждая из прямых $u(t) = u_i = \text{const}$, где $1 \leq i \leq n$, на плоскости tOu будет соответствовать решению ОДУ при условии, что $u(t_0) = u_i$.

Предположим, что в рассматриваемой области полностью выполнены условия теоремы Коши. Тогда в силу единственности решения ОДУ через любую точку (t_0, u_i) этой области пройдет лишь одна интегральная кривая.

Следовательно, интегральные кривые расположенные в полосе между прямыми $u(t) = u_i = \text{const}$, где $1 \leq i \leq n$, не имеют общих точек с этими прямыми. Поскольку в такой полосе правая часть ОДУ знакопостоянна, то каждой интегральной кривой в этой полосе соответствует строго монотонная функция $u(t)$, а ограничивающие полосу прямые служат горизонтальными асимптотами графика этой функции.

На рис. 49. показан график функции $f(u)$ и соответствующий ей качественный характер интегральных кривых на плоскости tOu .

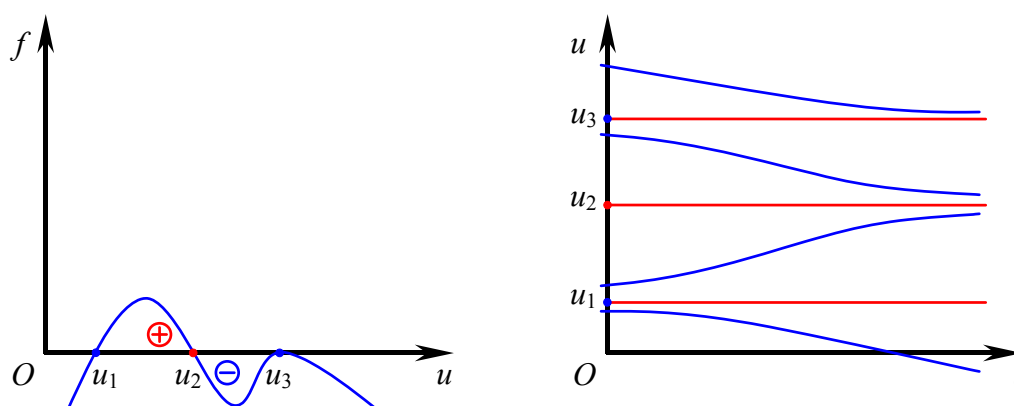


Рис. 49. Качественный характер интегральных кривых

Выясним условия устойчивости решения $u(t) = u_i = \text{const}$ ОДУ первого порядка

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

при $t > t_0$.

Решение $\varphi(t)$ называют *устойчивым* в смысле Ляпунова, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $|u(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ следует неравенство $|u(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ при $t > t_0$. Это означает, что в случае устойчивости решения $\varphi(t)$ достаточно близкие по начальным значениям решения $u(t)$ остаются близкими при $t > t_0$. Если при этом решения $\varphi(t)$ и $u(t)$ сближаются при возрастании t , т.е.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [u(t) - \varphi(t)] = 0,$$

то решение $\varphi(t)$ называют *асимптотически устойчивым*. Решения, не обладающие свойством устойчивости, называют *неустойчивыми*.

Очевидно, что решения $u(t) = u_1$ и $u(t) = u_3$, графики которых представлены на рис. 49, являются неустойчивыми, а решение $u(t) = u_2$ — асимптотически устойчивым. Таким образом, по графику функции $f(u)$ можно определить, какие решения $u(t) = u_i = \text{const}$ являются устойчивыми, а какие — нет.

Пример. Рассмотрим электрическую цепь на рис. 50, которая состоит из последовательно соединенных источника постоянного напряжения, катушки индуктивностью L , резистора сопротивлением R и двух электродов, между которыми при их сближении возникает дуговой разряд (вольтова дуга).

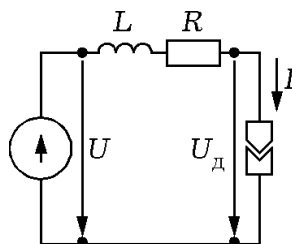


Рис. 50. Электрическая цепь, содержащая электроды

Пусть вид нелинейной характеристики дугового разряда $U_d(I)$ известен и определяется напряжением на электродах от силы I тока, протекающего в электрической цепи.

Если считать, что при изменении I соответствующие значения U_d устанавливаются мгновенно, то в соответствии со вторым законом Кирхгофа изменение во времени t силы тока в этой цепи описывает нелинейное ОДУ первого порядка

$$L \frac{dI}{dt} + RI + U_d(I) = U \quad \text{или}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{U - RI - U_d(I)}{L} = f(I). \quad (61)$$

По графику функции $f(I)$ на рис. 51 можно установить, что решения $I(t) = I_1$ и $I(t) = I_3$ являются асимптотически устойчивыми, а решение $I(t) = I_2$ — неустойчивым.

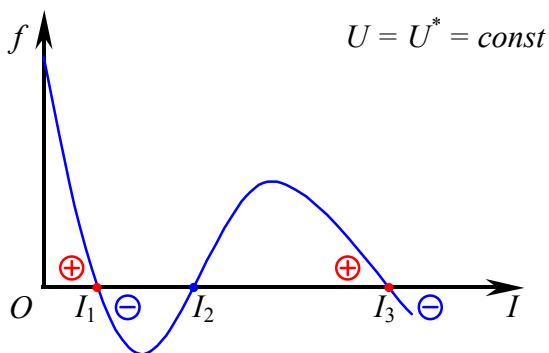


Рис. 51. График функции $f(I)$

Изменение хотя бы одного из параметров U или R приводит к изменению корней уравнения $f(I) = 0$. Если существует непрерывная зависимость решения рассматриваемого ОДУ (61) от U и R как от параметров, то такое изменение будет непрерывным и не приведет к резкому изменению в расположении интегральных кривых на плоскости tOI .

Рассмотрим случай, когда правая часть ОДУ (61) зависит от параметра U и в окрестности некоторого его значения происходит качественная перестройка расположения интегральных кривых на плоскости tOI .

Пусть функция

$$\tilde{U}(\tilde{I}) = R\tilde{I} + U_d(\tilde{I}),$$

график которой изображен на рис. 52, устанавливает соответствие между установившимся значением $\tilde{I}$ силы тока в электрической цепи и напряжением источника $U = \tilde{U}$ при фиксированном значении R . Очевидно, что в этом случае $f(\tilde{I}) = 0$.

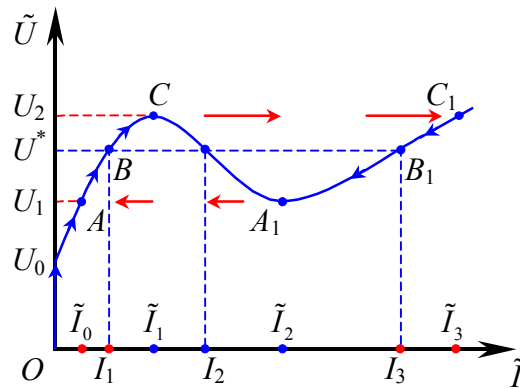


Рис. 52. График функции $\tilde{U}(\tilde{I})$

Предположим, что значение напряжения источника изменяется столь медленно, что каждому значению соответствует значение $\tilde{I}$ силы тока в электрической цепи. Тогда при увеличении напряжения источника от 0 до U_0 тока в электрической цепи сначала не будет и дуговой разряд между электродами не возникает. При медленном возрастании напряжения от U_0 до U_2 сила тока растет от нуля до значения $\tilde{I}_1$, но затем увеличивается скачком до значения $\tilde{I}_3$, т.е. между электродами возникает дуговой разряд и ток в дуге довольно значителен.

Если после этого начать уменьшать напряжение источника, то $\tilde{I}$ будет уменьшаться сначала непрерывно до значения $\tilde{I}_2$, а затем скачком до значения $\tilde{I}_0$, что означает прекращение горения дугового разряда.

На рис. 53 изобразим графики функции $f(I)$ при фиксированных значениях напряжений источника U_1 , U^* и U_2 .

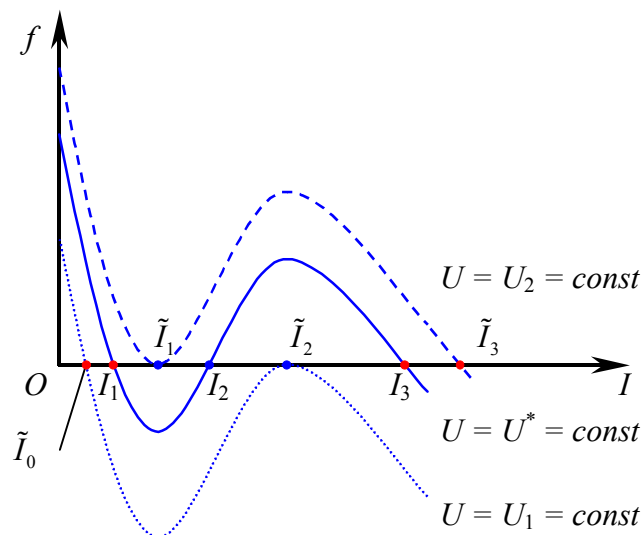


Рис. 53. Графики функции $f(I)$ при фиксированных значениях напряжений источника

При движении из точки B к точке C число нулей функции $f(I)$ изменяется, действительно, точки, соответствующие значениям I_1 и I_2 , сливаются в одну, соответствующую значению $\tilde{I}_1$, т.е. на плоскости tOI вместо прямых $I(t) = I_1$ и $I(t) = I_2$ образуется одна прямая $I(t) = \tilde{I}_1$, которая соответствует неустойчивому решению ОДУ.

При движении из точки B_1 к точке A_1 число нулей функции $f(I)$ также изменяется. Точки, соответствующие значениям I_2 и I_3 , сливаются в одну, соответствующую значению $\tilde{I}_2$. Это означает, что на плоскости tOI вместо прямых $I(t) = I_2$ и $I(t) = I_3$ образуется одна прямая $I(t) = \tilde{I}_2$, которая соответствует неустойчивому решению ОДУ.

Таким образом, при изменении параметра U в правой части ОДУ (61) изменяется качественный характер расположения интегральных кривых.

Значение параметра U , в окрестности которого происходит качественная перестройка расположения интегральных кривых на плоскости tOI , является бифуркационным. В этом примере бифуркационными являются значения U_1 и U_2 параметра U , а явление, связанное с качественным изменением расположения интегральных кривых, является бифуркацией.

5.4. Простейшие динамические модели

Если ММ описывает механическое движение тел как результат взаимодействия между телами, то такую модель называют *динамической*. Термины “динамическая ММ”, “нестационарная ММ” и “эволюционная ММ” обычно используют как синонимы.

Рассмотрим построение нелинейной динамической модели на примере простейшей механической системы с одной степенью свободы (рис. 54).

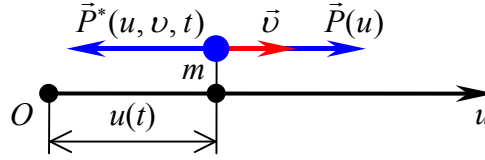


Рис. 54. Простейшая механическая система

Пусть механическая система состоит из всего одной материальной точки массой m . Состояние такой системы в момент времени t характеризуют значения перемещения $u(t)$ материальной точки и ее скорости $v(t)$. На материальную точку действуют две силы, проекции которых на положительное направление координатной оси Ou обозначим P и P^* . Первая из сил — *стационарная потенциальная сила*¹. Она не зависит от скорости v и является функцией лишь перемещения u , т.е. $P = P(u)$. Вторая сила — непотенциальная, для нее в общем случае имеем $P^* = P^*(u, v, t)$. Согласно второму закону Ньютона запишем

$$m \frac{dv}{dt} = P(u) + P^*(u, v, t). \quad (62)$$

Скорость изменения кинетической энергии $K = mv^2/2$ рассматриваемой системы равна

$$\frac{dK}{dt} = mv \frac{dv}{dt}.$$

Поэтому после умножения левой и правой частей уравнения (62) на v получим

$$\frac{dK}{dt} = P(u)v + P^*(u, v, t)v. \quad (63)$$

Таким образом, скорость изменения кинетической энергии равна мощности действующих на материальную точку сил, что следует из закона сохранения энергии.

Очевидно, что для потенциальной энергии $\Pi(u)$ данной системы справедливо

$$P(u) = -\frac{d\Pi(u)}{du}.$$

Тогда после подстановки

$$-P(u)v = \frac{d\Pi}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d\Pi}{dt}$$

в уравнение (63) получим

¹ Силы называют потенциальными, если работа этих сил при переходе механической системы из одного положения в другое не зависит от пути и равна уменьшению потенциальной энергии системы (при мгновенном перемещении из одного положения в другое). Если потенциальные силы являются стационарными, то требование, заключенное в скобки, несущественно. К потенциальным силам относят, например, силу тяжести и реакцию упругих связей.

$$\frac{dK}{dt} + \frac{d\Pi}{dt} = \frac{dW}{dt} = P^*(u, v, t)v, \quad (64)$$

где $W = K + \Pi$ — полная энергия системы.

В этом случае скорость изменения полной энергии W равна мощности $P^*(u, v, t)v$ непотенциальной силы, действующей на рассматриваемую систему. В случае консервативной системы мощность непотенциальной силы равна нулю и $W = K + \Pi = \text{const}$.

Если в формуле (64) $P^*(u, v, t)v \leq 0$, то полная энергия диссипативной системы уменьшается (рассеивается) за период времени, в течение которого мощность непотенциальной силы принимает отрицательные значения. Такую систему называют *диссипативной* (от латинского слова *dissipatio* — рассеяние). При этом механические формы энергии могут переходить в немеханические, например, в тепловую энергию.

Периодические колебания механической системы возможны, если ее полная энергия остается неизменной (как, например, в случае консервативной системы). Движение диссипативной системы не может быть периодическим. Строго говоря, полная энергия большинства реальных систем не остается постоянной. Поэтому динамические ММ консервативных систем лишь приближенно описывают поведение реальных систем.

Если действующие на механическую систему силы не зависят явно от времени, то ее называют *автономной системой*. Этот термин согласуется с понятием автономной нормальной системы ОДУ, которая описывает движение рассматриваемой механической системы и состоит из следующих уравнений:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{P(u)}{m} + \frac{P^*(u, v)}{m}. \end{cases}$$

Такая система ОДУ в общем случае является нелинейной динамической ММ данной механической системы.

Пример 1. В качестве автономной механической системы рассмотрим твердое тело 1 массой m , движущееся по горизонтальной поверхности при наличии трения и связанное с неподвижной опорой 2 пружиной 3, жесткость c которой зависит от перемещения u этого тела (рис. 55).

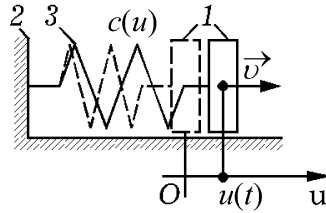


Рис. 55. Схема механической системы: 1 — тело; 2 — неподвижное основание; 3 — пружина

Отсчет перемещения u удобно вести от положения, в котором пружина не деформирована. Пружина действует на тело силой, являющейся потенциальной, причем проекция этой силы на положительное направление координатной оси Ou равна

$$P(u) = -c(u)u.$$

Предположим, что проекция P^* на положительное направление координатной оси силы трения пропорциональна квадрату скорости v , т.е.

$$P^*(v) = -kv^2 \operatorname{sgn} v,$$

где $k = \text{const} > 0$ — коэффициент пропорциональности; $\operatorname{sgn} v$ — функция-сигнум (знак).

Согласно второму закону Ньютона получим

$$m \frac{dv}{dt} = P(u) + P^*(v) = P(u) - k v^2 \operatorname{sgn} v.$$

Тогда движение рассматриваемой механической системы описывает автономная нормальная система ОДУ

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{P(u)}{m} - \frac{k v^2 \operatorname{sgn} v}{m}. \end{cases}$$

Потенциальную энергию этой системы можно установить по формуле

$$\Pi(u) = - \int_{u_0}^u P(s) ds,$$

где u_0 — некоторое значение, определяющее положение тела, в котором потенциальную энергию полагают равной нулю. Тут удобно считать, что $u_0 = 0$, т.е. u_0 равно значению, определяющему положение тела, в котором пружина не деформирована. В этом случае для полной энергии системы получим

$$W = K + \Pi = m \frac{v^2}{2} - \int_0^u P(s) ds.$$

Затем в соответствии с формулой (64) запишем

$$\frac{dW}{dt} = P^*(v)v = -k v^2 v \operatorname{sgn} v = -k v^2 |v| \leq 0, \quad (65)$$

т.е. рассматриваемая система является диссипативной. При этом система за счет уменьшения своей полной энергии совершает работу против силы трения, частично или полностью переходящую в теплоту.

Если силой трения можно пренебречь, т.е. положить $k = 0$ в формуле (65), то

$$\frac{dW}{dt} = 0,$$

что соответствует консервативной системе, а ее динамическая ММ может описывать периодические колебания твердого тела.

Если принять скорость в качестве потоковой величины, а действующие силы — в качестве потенциальных, то введенные для механической системы понятия и полученные соотношения можно перенести на другие технические системы, в которых протекают процессы немеханической природы.

Пример 2. Рассмотрим на рис. 56 электрическую цепь, состоящую из катушки индуктивности L , конденсатора емкости C и резистора, сопротивление $R(I)$ которого зависит от силы I тока в контуре.

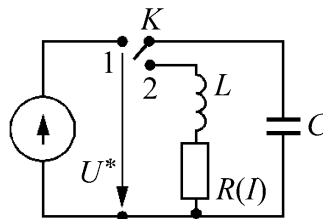


Рис. 56. Электрическая цепь

При достаточно длительном подключении к контуру источника напряжения (ключ K в положении 1) конденсатор накопит электрический заряд Q_e^* пропорционально разности потенциалов U^* на его обкладках, причем

$$Q_e^* = CU^*.$$

Очевидно, что энергия электрического поля, запасенная в конденсаторе, равна

$$E_e^* = \frac{Q_e^* U^*}{2} = \frac{CU^{*2}}{2} = \frac{Q_e^{*2}}{2C}.$$

Пусть в некоторый момент времени $t = t_0$ ключ K переведен из положения 1 в положение 2. Тогда, согласно второму закону Кирхгофа, имеем

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q_e}{C} + IR(I) = 0, \quad (66)$$

где $Q_e(t)$ — электрический заряд конденсатора в момент времени t . Учитывая, что

$$I = \frac{dQ_e}{dt},$$

запишем автономную нормальную систему ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dQ_e}{dt} = I, \\ \frac{dI}{dt} = -\frac{Q_e}{LC} - \frac{IR(I)}{L}, \end{cases}$$

которая является нелинейной ММ данной электрической системы.

Если принять первый вариант электромеханической аналогии, то кинетической энергии соответствует энергия магнитного поля катушки, а потенциальной — энергия электрического поля, запасенная в конденсаторе. Это позволяет перенести полученные ранее соотношения для механической системы на электрическую систему. Действительно, полная энергия рассматриваемой электрической системы равна

$$W = E_m + E_e = \frac{LI^2}{2} + \frac{Q_e^2}{2C},$$

где $E_m = LI^2/2$ — энергия магнитного поля катушки; $E_e = Q_e^2/(2C)$ — энергия электрического поля в конденсаторе. Тогда

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dE_m}{dt} + \frac{dE_e}{dt} = IL \frac{dI}{dt} + \frac{Q_e}{C} \frac{dQ_e}{dt} = IL \frac{dI}{dt} + I \frac{Q_e}{C} = I \left(L \frac{dI}{dt} + \frac{Q_e}{C} \right).$$

Учитывая равенство (66), получаем

$$\frac{dW}{dt} = I(-IR(I)) = -I^2 R(I) \leq 0.$$

Следовательно, рассматриваемая электрическая цепь является диссипативной системой, в которой полная энергия переходит в джоулеву теплоту, выделяющуюся при протекании тока через резистор. Это приводит к затуханию колебаний. Если можно пренебречь сопротивлением R резистора, то электрическая система будет соответствовать консервативной системе, так что ММ такой электрической системы может при определенных условиях описывать периодические колебания.

5.5. Положения равновесия консервативной системы

В ряде случаев динамическую ММ консервативной системы можно привести к автономной нормальной системе ОДУ

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = f(u). \end{cases} \quad (67)$$

Покажем, что первый интеграл этой системы имеет вид

$$F(u, v) = \frac{v^2}{2} + \frac{\psi(u)}{2} = H = \text{const}, \quad (68)$$

где $\psi(u) = -2 \int_{u_0}^u f(s) ds$.

Для этого необходимо доказать, что функция $F(u, v)$ зависит от выбора решения системы (67), но не зависит от переменной t , т.е.

$$\frac{dF}{dt} = 0.$$

В силу системы (67) имеем

$$\frac{dF}{dt} = v \frac{dv}{dt} - f(u) \frac{du}{dt} = v f(u) - f(u) v = 0.$$

Если под искомой функцией $u(t)$ понимать зависимость от времени перемещения материальной точки единичной массой, то $v(t)$ — скорость этой точки, а $f(u)$ — проекция стационарной потенциальной силы, действующей на эту точку. Тогда слагаемые $v^2/2$ и $\psi(u)/2$ в уравнении (68) имеют смысл кинетической и потенциальной энергии механической системы соответственно, а величина H является полной энергией этой простейшей механической системы. Таким образом, уравнение (68) отражает закон сохранения полной энергии консервативной системы.

Если известны начальные условия $u(t_0) = u_0$ и $v(t_0) = v_0$, то можно в уравнении (68) найти константу H . Действительно, из уравнения (68) следует

$$F(u_0, v_0) = \frac{v_0^2}{2} + \frac{\psi(u_0)}{2} = \frac{v_0^2}{2} + 0 = H.$$

Тогда $H = v_0^2 / 2$.

Запишем равенство (68) в виде

$$v^2 = v_0^2 - \psi(u). \quad (69)$$

Пусть в рассматриваемой области D переменных t, u, v существует и, причем единственное, решение системы (67), удовлетворяющее начальным условиям $u(t_0) = u_0$ и $v(t_0) = v_0$, где $(t_0, u_0, v_0) \in D$. Тогда через точку (u_0, v_0) фазовой плоскости uOv проходит фазовая траектория, удовлетворяющая уравнению (69).

Эта траектория симметрична относительно оси Ou и определена при значениях u , для которых справедливо

$$v^2 = v_0^2 - \psi(u) \geq 0 \quad \text{или} \\ \psi(u) \leq v_0^2.$$

Движение изображающей точки по траектории в верхней полуплоскости проходит в сторону возрастания величины u , так как

$$v = \frac{du}{dt} > 0,$$

а в нижней полуплоскости — в сторону убывания u (рис. 57).

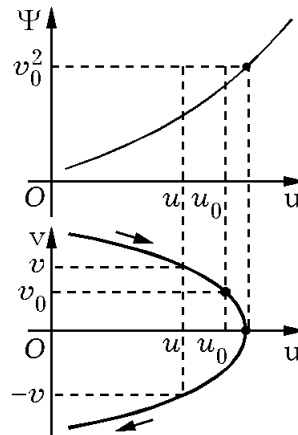


Рис. 57. Иллюстрация к построению фазовой траектории

Пусть функция $f(u)$ имеет $n \in N$ действительных нулей $u_1, u_2, \dots, u_n$, тогда точки $(u_i, 0)$, где $1 \leq i \leq n$, являются положениями равновесия системы ОДУ (67), так как

$$\begin{cases} u(t) = u_i = \text{const}, \\ v(t) = 0 \end{cases}$$

являются частными решениями этой системы, причем каждый нуль функции $f(u)$ является стационарной точкой функции $\psi(u)$. Выясним расположение фазовых траекторий вблизи точек, которые являются положениями равновесия системы ОДУ (67). Для этого рассмотрим следующие варианты: $f'(u_i) < 0$, $f'(u_i) > 0$ и $f'(u_i) = 0$.

Если функция $f(u)$ дифференцируема в точке u_i и $f'(u_i) < 0$, то

$$\psi''(u_i) = -2f'(u_i) > 0.$$

Следовательно, u_i — точка минимума функции $\psi(u)$. Тогда достаточно малая окрестность точки $(u_i, 0)$ заполнена замкнутыми фазовыми траекториями (рис. 58).

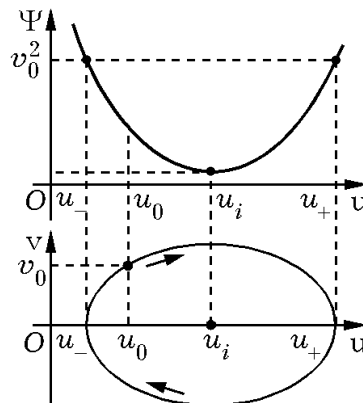


Рис. 58. Иллюстрация к построению фазовых траекторий в окрестности положения равновесия

Действительно, можно указать также значения $v_0^2 > \psi(u_i)$, для которых в окрестности $(u_i, 0)$ определены функции

$$v(u) = \pm \sqrt{v_0^2 - \psi(u)},$$

которые удовлетворяют (69). Эти функции определяют симметричную относительно оси Ou замкнутую фазовую траекторию, которая пересекает ось Ou в точках $(u_-, 0)$ и $(u_+, 0)$, где значения u_- и u_+ соответствуют корням уравнения $v_0^2 - \psi(u) = 0$.

Если v_0^2 приближать к значению $\psi(u_i)$, то точки $(u_-, 0)$ и $(u_+, 0)$ на плоскости uOv сливаются в точку $(u_i, 0)$. Следовательно, существует заполненная замкнутыми фазовыми траекториями окрестность точки $(u_i, 0)$, и система ОДУ (67) имеет периодические решения.

Это означает, что при $f'(u_i) < 0$ положение равновесия $(u_i, 0)$ является центром, а частное решение системы ОДУ

$$\begin{cases} u(t) = u_i = \text{const}, \\ v(t) = 0 \end{cases}$$

устойчиво по Ляпунову.

В случае линейной функции $f(u)$ замкнутые фазовые траектории являются эллипсами, а соответствующие периодические решения системы ОДУ соответствуют гармоническим колебаниям. Действительно, если

$$f(u) = -\omega^2 u - \omega^2 \gamma,$$

где ω и γ — некоторые постоянные величины, причем $\omega \neq 0$, то систему уравнений (67) можно привести к уравнению гармонического осциллятора

$$\frac{d^2 \tilde{u}(t)}{dt^2} + \omega^2 \tilde{u}(t) = 0,$$

где $\tilde{u}(t) = u(t) + \gamma$, а уравнение (69) задает кривую второго порядка — эллипс.

Для нелинейной функции $f(u)$ колебания не будут гармоническими. В силу симметрии фазовой траектории относительно оси Ou период T таких колебаний можно найти как удвоенное время движения изображающей точки, например, по верхней половине траектории. Поскольку в этом случае справедливо

$$dt = \frac{du}{v(u)} = \frac{du}{\sqrt{v_0^2 - \psi(u)}},$$

то

$$T = 2 \int_{u_-}^{u_+} \frac{du}{v(u)} = 2 \int_{u_-}^{u_+} \frac{du}{\sqrt{v_0^2 - \psi(u)}}.$$

Если функция $f(u)$ дифференцируема в точке u_i и $f'(u_i) > 0$, то

$$\psi''(u_i) = -2f'(u_i) < 0.$$

Следовательно, u_i — точка максимума функции $\psi(u)$. Для исследования устойчивости частного решения системы ОДУ

$$\begin{cases} u(t) = u_i = \text{const}, \\ v(t) = 0 \end{cases}$$

можно привлечь теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Замечание. Проведем исследование на устойчивость тривиального решения системы

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (70)$$

где $i = 1, \dots, n$.

Предположим, что все $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируемы в некоторой окрестности начала координат $(0, 0, \dots, 0)$, тогда можно выделить в правой части уравнений системы (70) линейную часть, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + R_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ a_{ij} &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

где $i = 1, \dots, n$.

Во многих случаях при исследовании на устойчивость тривиального решения можно пренебречь членами $R_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в системе (70), заменив ее более простой линейной системой

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad (71)$$

где $i = 1, \dots, n$. Такую систему называют системой первого приближения для системы (70).

Если исследование на устойчивость тривиального решения системы (70) заменяется исследованием на устойчивость тривиального решения линейной системы (71), то в этом случае говорят об исследовании на устойчивость по первому приближению¹.

Систему (70) можно исследовать на устойчивость по первому приближению в следующих случаях.

1. Если все корни характеристического уравнения для системы первого приближения (71) имеют отрицательные действительные части, то тривиальное решение системы (70) асимптотически устойчиво.
2. Если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то тривиальное решение системы (70) неустойчиво.

Указанные случаи не охватывают так называемого критического случая, когда существуют корни характеристического уравнения с нулевой действительной частью, а остальные корни, если они есть, имеют отрицательную действительную часть. В критическом случае исследование на устойчивость по первому приближению, вообще говоря, невозможно, так как на устойчивость начинают влиять нелинейные члены $R_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Итак, системой первого приближения системы (67) является

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = f'(u_i) \cdot (u - u_i). \end{cases} \quad (72)$$

В матричной форме запись системы первого приближения имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f'(u_i)u_i \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(u_i) & 0 \end{pmatrix}.$$

¹ Условия возможности таких исследований были изучены знаменитым русским математиком Александром Михайловичем Ляпуновым (1857–1918).

Найдем корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ f'(u_i) & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - f'(u_i) = 0.$$

Очевидно, что $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{f'(u_i)}$. При $f'(u_i) > 0$ имеем действительные корни разных знаков, тогда частное решение системы ОДУ (67)

$$\begin{cases} u(t) = u_i = \text{const}, \\ v(t) = 0 \end{cases}$$

неустойчиво по Ляпунову. Этому решению соответствует неустойчивое положение равновесия, называемое седлом.

Замечание. В случае $f'(u_i) \leq 0$ действительные части корней равны нулю и теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению неприменимы.

Фазовая траектория на рис. 59, удовлетворяющая начальным условиям $u(t_0) = u_0$ и $v(t_0) = v_0$, где $v_0^2 < \psi(u_i)$, не определена при значениях u , для которых справедливо неравенство

$$v_0^2 < \psi(u),$$

т.е. фазовая траектория не определена при $u_- < u < u_+$. Если v_0^2 приближать к значению $\psi(u_i)$, то точки $(u_-, 0)$ и $(u_+, 0)$ на плоскости uOv сливаются в точку $(u_i, 0)$. Это означает, что при $f'(u_i) > 0$ положение равновесия $(u_i, 0)$ является седлом.

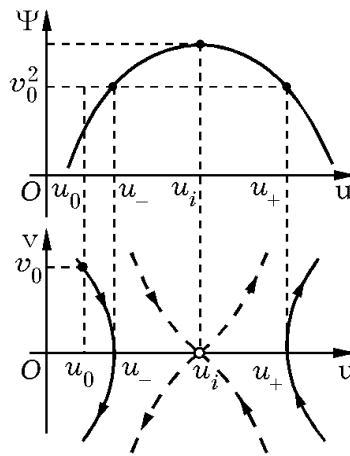


Рис. 59. Иллюстрация к построению фазовых траекторий в окрестности положения равновесия

Если $v_0^2 = \psi(u_i)$, то изображающая точка на фазовой плоскости движется по траектории (штриховые линии на рис. 59), уравнение которой имеет вид

$$v^2 = v_0^2 - \psi(u) = v_0^2 + 2 \int_{u_0}^u f(s) ds,$$

причем эта траектория проходит через точку $(u_i, 0)$. Тогда, принимая начальные условия $u(t_0) = u_0 = u_i$ и $v(t_0) = v_0 = 0$, получим

$$v^2 = 2 \int_{u_i}^u f(s) ds. \quad (73)$$

Если фазовая траектория входит в седло или выходит из седла, то такие фазовые траектории называют *усами*. Уравнение (73) описывает такую фазовую траекторию.

В частном случае, когда $f(u) = f'(u_i)(u - u_i)$ система (67) переходит в систему (72), а уравнение (73) в уравнение

$$v^2 = 2f'(u_i) \int_{u_i}^u (u - u_i) du = f'(u_i)(u - u_i)^2,$$

что соответствует паре пересекающихся прямых. Остальные фазовые траектории будут гиперболой, для которых эти прямые являются асимптотами.

Найдем касательные к усам в точке $(u_i, 0)$ фазовой плоскости uOv . Предположим, что функцию $f(u)$ можно представить в окрестности ее нуля u_i следующим образом

$$f(u) = f(u_i) + \frac{f'(u_i)}{1!} \Delta u + \frac{f''(u_i)}{2!} \Delta u^2 + \dots + \\ + \dots + \frac{f^{(k)}(u_i)}{k!} \Delta u^k + o(\Delta u^k),$$

т.е. справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, где $\Delta u = u - u_i$, причем $f(u_i) = 0$. Тогда из формулы (73) следует

$$v^2 = 2 \int_{u_i}^u f(s) ds = 2 \left[\frac{f'(u_i)}{2!} \Delta u^2 + \frac{f''(u_i)}{3!} \Delta u^3 + \dots + \right. \\ \left. + \dots + \frac{f^{(k)}(u_i)}{(k+1)!} \Delta u^{k+1} + o(\Delta u^{k+1}) \right].$$

Затем, разделив левую и правую части этого уравнения на Δu^2 , получаем

$$\frac{v^2}{\Delta u^2} = 2 \left[\frac{f'(u_i)}{2!} + \frac{f''(u_i)}{3!} \Delta u + \dots \right],$$

причем

$$\frac{v^2}{\Delta u^2} = \left(\frac{v(u) - v(u_i)}{\Delta u} \right)^2 = \left(\frac{\Delta v}{\Delta u} \right)^2,$$

где $v(u_i) = 0$, $\Delta v = v(u) - v(u_i)$. Очевидно, что

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{v^2}{\Delta u^2} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left[f'(u_i) + 2 \frac{f''(u_i)}{3!} \Delta u + \dots \right] = f'(u_i).$$

Тогда

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{v^2}{\Delta u^2} = \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta u} \right)^2 = \left(\frac{dv}{du}(u_i) \right)^2 = f'(u_i)$$

и можно найти тангенс угла φ наклона касательной к фазовой траектории в точке $(u_i, 0)$, т.е.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dv}{du}(u_i) = \pm \sqrt{f'(u_i)}.$$

Следовательно, прямые $v = \pm \sqrt{f'(u_i)}(u - u_i)$ являются касательными к усам в точке $(u_i, 0)$.

Если $f^{(k)}(u_i) = 0$, $k = 1, 2, \dots, 2m$, где $m \in N$, а $f^{(2m+1)}(u_i) > 0$, то

$$\psi^{(k+1)}(u_i) = -2f^{(k)}(u_i) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2m;$$

$$\psi^{(2m+2)}(u_i) = -2f^{(2m+1)}(u_i) < 0.$$

Тогда согласно достаточному условию существования экстремума функция $\psi(u)$ имеет в точке $u = u_i$ локальный максимум. Следовательно, точка $(u_i, 0)$ будет по-прежнему седлом. Однако,

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{f'(u_i)} = 0$$

и характер фазовых траекторий, проходящих через точку, будет иным (рис. 60). Тогда частное решение системы ОДУ (67), соответствующее этому положению равновесия, неустойчиво по Ляпунову.

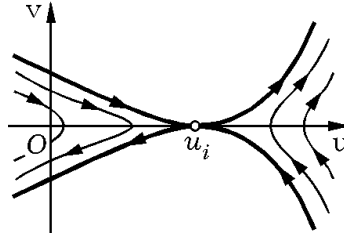


Рис. 60. Характер фазовых траекторий в окрестности положения равновесия системы

Если $f^{(k)}(u_i) = 0$, $k = 1, 2, \dots, 2m$, где $m \in N$, а $f^{(2m+1)}(u_i) < 0$, то

$$\psi^{(k+1)}(u_i) = -2f^{(k)}(u_i) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2m;$$

$$\psi^{(2m+2)}(u_i) = -2f^{(2m+1)}(u_i) > 0,$$

следовательно, в точке $u = u_i$ функция $\psi(u)$ имеет локальный минимум согласно достаточному условию существования экстремума. Точка $(u_i, 0)$ будет по-прежнему центром. Тогда частное решение

$$\begin{cases} u(t) = u_i = \text{const}, \\ v(t) = 0 \end{cases}$$

системы ОДУ (67) устойчиво по Ляпунову.

Если $f^{(k)}(u_i) = 0$, $k = 1, 2, \dots, 2m-1$, где $m \in N$, а $f^{(2m)}(u_i) \neq 0$, то

$$\psi^{(k+1)}(u_i) = -2f^{(k)}(u_i) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2m-1;$$

$$\psi^{(2m+1)}(u_i) = -2f^{(2m)}(u_i) \neq 0.$$

Тогда при $u = u_i$ функция $\psi(u)$ имеет точку перегиба согласно достаточному условию существования точки перегиба.

Точка $(u_i, 0)$ на фазовой плоскости uOv является точкой возврата траектории (рис. 61). Уравнение этой фазовой траектории определяет формула (73). Эта фазовая траектория симметрична относительно оси Ou и определена при значениях u , для которых $\psi(u) \leq v_0^2$, а касательные к ветвям фазовой траектории в точке $(u_i, 0)$ совпадают с осью Ou , так как

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{f'(u_i)} = 0.$$

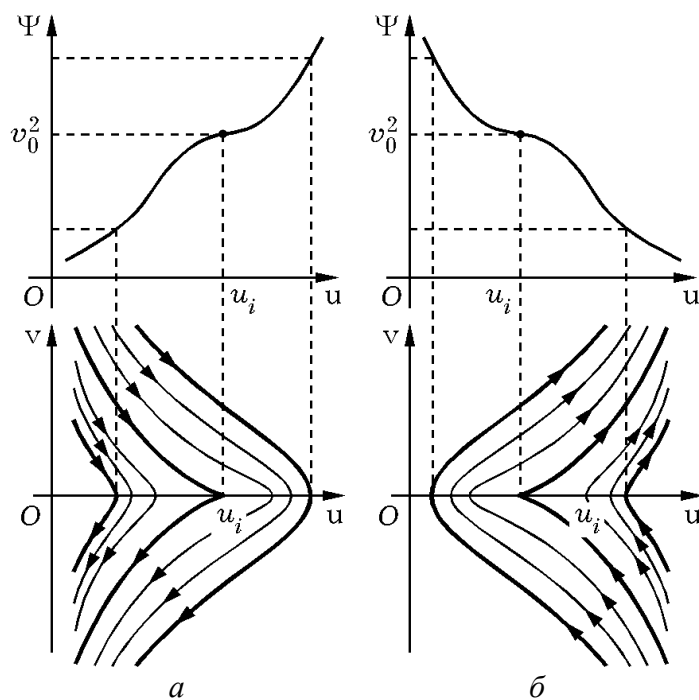


Рис. 61. Иллюстрации к построению фазовых траекторий в окрестности положения равновесия системы в случае возрастающей (а) и убывающей (б) функции $\psi(u)$

В этом случае частное решение

$$\begin{cases} u(t) = u_i = \text{const}, \\ v(t) = 0 \end{cases}$$

системы ОДУ (67), соответствующее положению равновесия $(u_i, 0)$, неустойчиво по Ляпунову.

5.6. Фазовый портрет консервативной системы

Описанный ранее способ построения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия позволяет перейти к анализу фазовых траекторий консервативной системы на всей фазовой плоскости uOv .

Рассмотрим возможные случаи взаимного расположения на плоскости uOy графика функции $y = \psi(u)$ и прямой $y = v_0^2 = \text{const}$. Пусть $\psi(u) < v_0^2$ для всех $u \in \mathbb{R}$ (рис. 62), следовательно, на фазовой плоскости получаем две ветви фазовой траектории, симметричные относительно оси Ou .

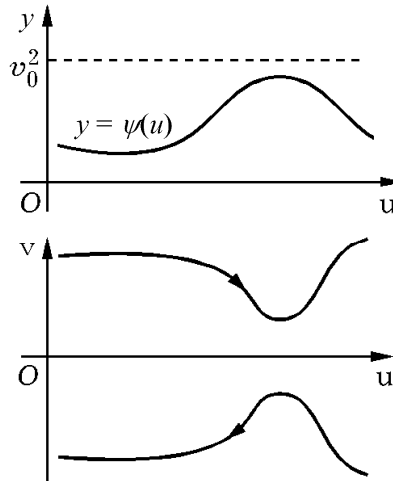


Рис. 62. Иллюстрация к построению фазовой траектории с убегающими ветвями

Изображающая точка на верхней ветви движется в сторону возрастания u , а по нижней — в сторону убывания u . Ветвь фазовой траектории, для которой абсцисса изображающей точки при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$ неограниченно возрастает или убывает, называют *убегающей*.

Если $\psi(u) > v_0^2$, то для всех значений аргумента $u \in \mathbb{R}$ фазовая траектория, соответствующая значению v_0 , не определена.

Пусть функция $y = \psi_1(u)$ является строго монотонной функцией, например, строго возрастающей, то прямая $y = v_0^2$ может пересекать ее график только в одной точке. Следовательно, на фазовой плоскости имеем фазовую траекторию с убегающими ветвями (рис. 63).

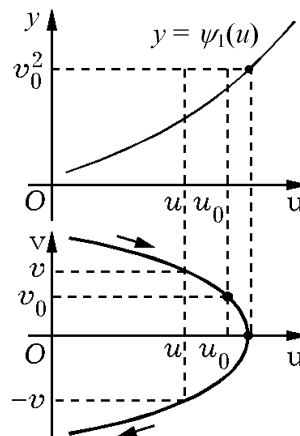


Рис. 63. Пример построения фазовой траектории с убегающими ветвями

Если функция $y = \psi(u)$ имеет только один локальный экстремум (максимум или минимум), то ее график может пересекать прямая $y = v_0^2$ в двух точках (рис. 64). Так, например, при $y = \psi_2(u)$ получаем две траектории с убегаящими ветвями, а при $y = \psi_3(u)$ — только одну замкнутую фазовую траекторию.

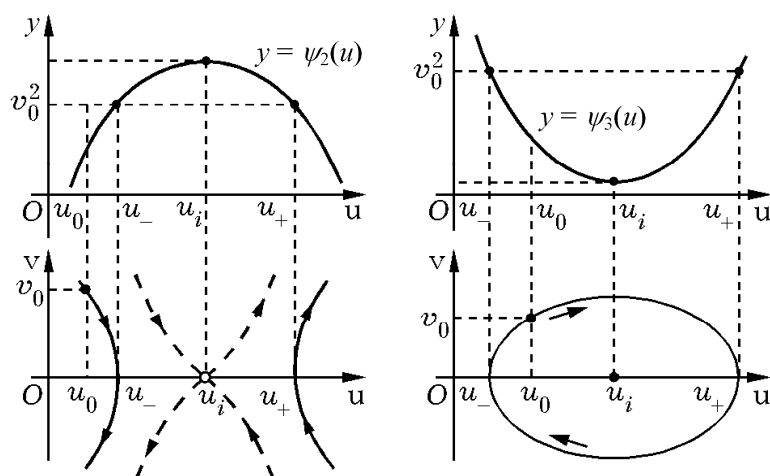


Рис. 64. Примеры построения фазовых траекторий

В общем случае прямая $y = v_0^2$ может не только пересекать кривую $y = \psi(u)$, но и касаться ее, например, при совпадении с одной из штриховых линий на рис. 65. При этом точке локального минимума функции $\psi(u)$ соответствует на фазовой плоскости вырожденная фазовая траектория — точка, которая является центром. При некотором увеличении значения v_0^2 вокруг центра возникает замкнутая фазовая траектория.

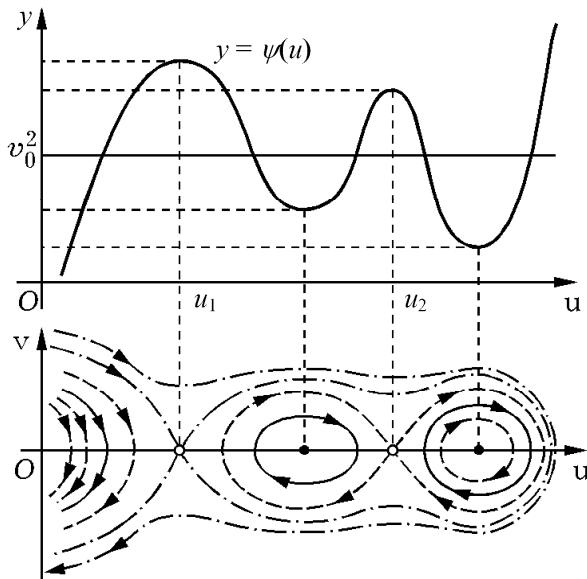


Рис. 65. Иллюстрация к построению фазового портрета консервативной системы

Точке локального максимума функции $\psi(u)$ на фазовой плоскости соответствует положение равновесия — седло. В эту точку входит и из нее выходит фазовая траектория, соответствующая значению $v_0^2 = \psi(u_1)$ или $v_0^2 = \psi(u_2)$. Такую траекторию называют *сепаратрисой* (от латинского слова *separatrix* — разделяющая). Она может входить (или выходить) в более чем одно седло, быть конечной или иметь убегаящие ветви. Например, при $v_0^2 = \psi(u_1)$ сепаратриса имеет убегаящие ветви, а при $v_0^2 = \psi(u_2)$ является конечной.

В случае конечной сепаратрисы при некотором изменении значения $v_0^2 = \psi(u_2)$ возникают замкнутые фазовые траектории, охватывающие сепаратрису при увеличении v_0^2 и расположенные внутри ее “звеньев” при уменьшении v_0^2 , т.е. охватываемые сепаратрисой. Если сепаратриса включает убегающие ветви, то фазовая траектория при увеличении v_0^2 также имеет убегающие ветви.

Для мультимодальной функции $\psi(u)$ точки локального минимума и максимума чередуются. Следовательно, для консервативной системы на оси абсцисс фазовой плоскости чередуются точки, являющиеся центром или седлом.

На рис. 66 изображена прямая $y = v_0^2$, которая является горизонтальной асимптотой графика функции $\psi(u)$. Значению v_0^2 соответствует фазовая траектория, которую иногда относят к сепаратрисе, хотя на оси абсцисс Ou и нет конечной точки, являющейся седлом. Такая фазовая траектория отделяет область фазовой плоскости, заполненной траекториями с убегающими ветвями, от области с замкнутыми фазовыми траекториями.

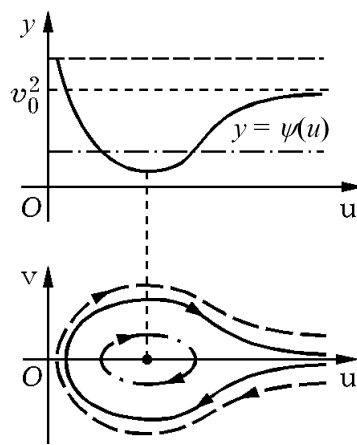


Рис. 66. Пример построения сепаратрисы

Сепаратрисы разделяют фазовую плоскость на ряд областей, которые заполнены фазовыми траекториями различных типов. Поэтому построение сепаратрис важно для выяснения общей картины возможного расположения фазовых траекторий на фазовой плоскости. Эту общую картину обычно называют *фазовым портретом* консервативной системы.

Пример 1. Рассмотрим РС математического маятника, состоящего из невесомого стержня длины l и материальной точки массой m . Пусть стержень может без трения в цилиндрическом шарнире и сопротивления окружающей среды поворачиваться в вертикальной плоскости вокруг точки O на любой угол $\varphi \in \mathbb{R}$ (рис. 67). Отчет этого угла будем вести в направлении против хода часовой стрелки от точки A .

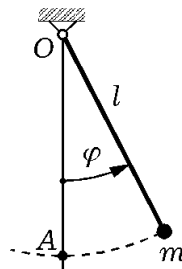


Рис. 67. Расчетная схема математического маятника

Изменение во времени t угла φ описывает ОДУ второго порядка

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi(t), \quad (74)$$

где g — ускорение свободного падения.

Очевидно, что математический маятник является консервативной системой, а ОДУ (74) можно привести к автономной нормальной системе ОДУ вида

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} = f(\varphi), \end{cases} \quad (75)$$

где ω — угловая скорость; $f(\varphi) = -\frac{g}{l}\sin\varphi$. В начальный момент времени t_0 примем

$$\varphi(t_0) = \varphi_0 = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\omega(t_0) = \frac{d\varphi}{dt}(t_0) = \omega_0.$$

Тогда изображающая точка на фазовой плоскости совершает движение по траектории, уравнение которой имеет вид

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \psi(\varphi),$$

$$\psi(\varphi) = -2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} f(s) ds = 2 \frac{g}{l} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin s ds = \frac{2g}{l} (1 - \cos \varphi),$$

причем $\psi(\varphi)$ — периодическая с периодом 2π и бесконечно дифференцируемая функция в области ее определения.

В случае $\omega_0 = 0$ прямая $y = 0$ касается кривой $\psi(\varphi)$ в точках $\varphi = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, локального минимума этой функции. Каждой такой точке на оси абсцисс фазовой плоскости $\varphi O \omega$ соответствует устойчивое положение равновесия — центр (рис. 68).

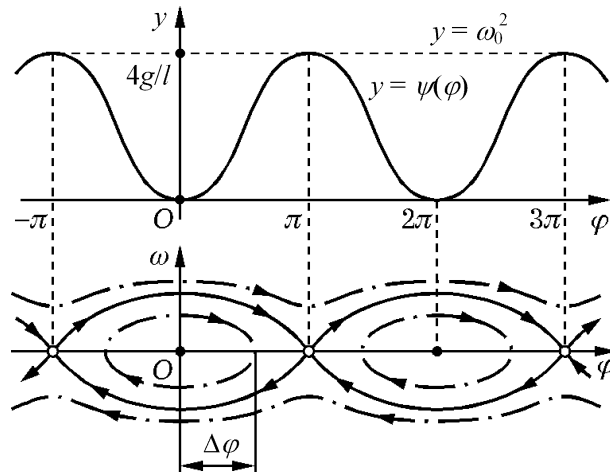


Рис. 68. Иллюстрация к построению фазового портрета математического маятника

Например, если в начальный момент времени $\varphi(t_0) = 0$ и $\omega(t_0) = 0$, т.е. маятник не имеет кинетической энергии, то он остается в положении равновесия, которое соответствует минимуму потенциальной энергии и частному решению системы ОДУ (75)

$$\begin{cases} \varphi(t) = 0, \\ \omega(t) = 0, \end{cases}$$

которое, очевидно, является устойчивым по Ляпунову.

Если $\omega_0 = \pm 2\sqrt{g/l}$, то прямая $y = \omega_0^2$ касается кривой $\psi(\varphi)$ в точках $\varphi = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, максимума этой функции. Каждой такой точке на оси абсцисс фазовой плоскости $\varphi O \omega$ соответствует неустойчивое положение равновесия — седло. В этом случае на фазовой плоскости получаем сепаратрису, которая удовлетворяет уравнению

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \psi(\varphi) = \frac{4g}{l} - \frac{2g}{l}(1 - \cos \varphi) = \frac{2g}{l}(1 + \cos \varphi).$$

Сепаратриса делит фазовую плоскость на области, которые заполнены фазовыми траекториями различных типов. Внутри “звеньев” сепаратрисы вокруг центров расположены замкнутые фазовые траектории, причем замкнутые фазовые траектории соответствуют периодическим решениям системы ОДУ (75) при $\omega_0^2 < 4g/l$. Фазовые траектории, охватывающие сепаратрису, имеют убегающие ветви. Эти фазовые траектории соответствуют решениям системы ОДУ при $\omega_0^2 > 4g/l$.

Построенному фазовому портрету математического маятника можно дать следующую механическую интерпретацию.

Если в точке A кинетическая энергия $ml^2\omega_0^2/2$ маятника больше значения потенциальной энергии $2mgl$ маятника, находящегося в верхнем положении, то маятник будет вращаться вокруг точки O против часовой стрелки или по ее ходу без изменения знака угловой скорости ω . В этом случае получаем фазовую траекторию с убегающими ветвями, которая расположена выше или ниже сепаратрисы.

Если кинетическая энергия отлична от нуля, но меньше значения $2mgl$, то маятник совершает колебания с изменением знака ω дважды каждый период. Такому движению соответствуют замкнутые фазовые траектории внутри “звеньев” сепаратрисы.

В случае равенства кинетической энергии значению $2mgl$ маятник приближается к верхнему положению, где его кинетическая энергия будет равна нулю, что соответствует на фазовой плоскости неустойчивому положению равновесия, которое является седлом. При этом движение изображающей точки в фазовой плоскости происходит по ветви сепаратрисы, входящей в соседнее седло.

При колебаниях маятника его отклонения $\Delta\varphi$ симметричны относительно точки A , поэтому из уравнения

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \psi(\Delta\varphi) = 0$$

можно найти полуразмах его колебаний. Для этого запишем следующее равенство

$$\omega_0^2 = \psi(\Delta\varphi) = \frac{2g}{l}(1 - \cos \Delta\varphi). \quad (76)$$

Тогда

$$\Delta\varphi = \arccos\left(1 - \frac{\omega_0^2 l}{2g}\right),$$

где $0 < \omega_0^2 < 4g/l$.

Затем можно вычислить период T таких колебаний как удвоенное время движения изображающей точки, например, по верхней половине фазовой траектории, т.е.

$$T = 2 \int_{-\Delta\varphi}^{\Delta\varphi} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)} = 4 \int_0^{\Delta\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\omega_0^2 - \psi(\varphi)}} = 4 \int_0^{\Delta\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\omega_0^2 - 2g(1 - \cos \varphi)/l}},$$

где $0 < \Delta\varphi < \pi$. Отсюда, учитывая равенство (76), получаем

$$T = \sqrt{\frac{8l}{g}} \int_0^{\Delta\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \Delta\varphi}}, \quad 0 < \Delta\varphi < \pi.$$

Для нахождения периода T колебаний удобно пользоваться графиком функции

$$\tau(\Delta\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\Delta\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \Delta\varphi}}, \quad 0 < \Delta\varphi < \pi,$$

где $\tau = T/T_0$; $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ — период колебаний математического маятника в случае малых колебаний. График функции $\tau(\Delta\varphi)$ изображен на рис. 69.

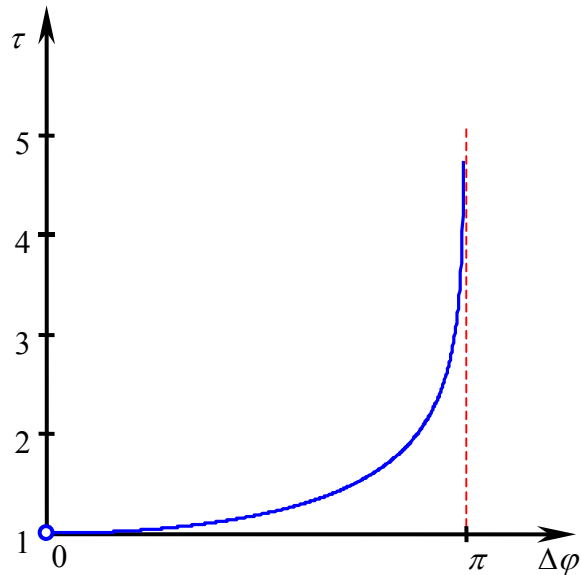


Рис. 69. График функции $\tau(\Delta\varphi)$

5.7. Особенности поведения некоторых консервативных систем

Рассмотрим два примера консервативных систем и выясним особенности их поведения, анализируя расположение фазовых траекторий таких систем на всей фазовой плоскости.

Пример 1. Пусть механическая система состоит из невесомого стержня длиной l , тела массой m и спиральной пружины с жесткостью χ . Стержень в точке O закреплен с помощью цилиндрического шарнира (рис. 70).

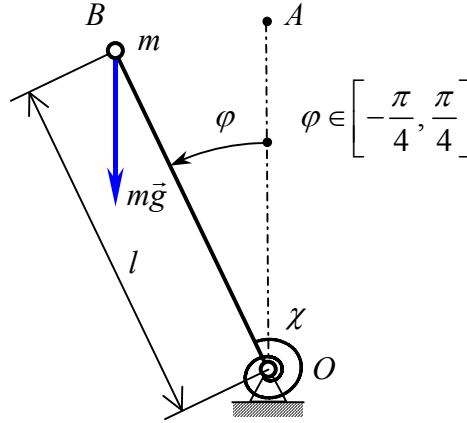


Рис. 70. Расчетная схема механической системы

Считаем, что спиральная пружина не деформирована, если стержень находится в верхнем вертикальном положении. Тело рассматриваем как материальную точку, пренебрегаем сопротивлением окружающей среды и трением в цилиндрическом шарнире. Положение механической системы можно характеризовать углом φ , где $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$.

Эта конструкция, очевидно, является консервативной системой, т.к. сумма ее кинетической и потенциальной энергий остается постоянной.

Потенциальная энергия $\Pi(\varphi)$ системы складывается из потенциальной энергии пружины и потенциальной энергии тела, т.е.

$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{2} \chi \varphi^2 - mgl(1 - \cos \varphi).$$

Кинетическую энергию механической системы определяем по формуле

$$K(\omega) = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{m l^2 \omega^2}{2},$$

где $J = m l^2$ — момент инерции механической системы относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости движения стержня; ω — угловая скорость стержня.

Для консервативной системы справедливо

$$K(\omega) + \Pi(\varphi) = \frac{m l^2}{2} \omega^2 + \frac{\chi \varphi^2}{2} - mgl(1 - \cos \varphi) = \text{const}. \quad (77)$$

Если в момент времени $t = t_0$ известны начальные условия $\varphi(t_0) = \varphi_0$ и $\omega(t_0) = \omega_0$, то можно записать уравнение (77) в виде

$$\frac{m l^2}{2} \omega^2 + \frac{\chi \varphi^2}{2} - mgl(1 - \cos \varphi) = \frac{m l^2}{2} \omega_0^2 + \frac{\chi \varphi_0^2}{2} - mgl(1 - \cos \varphi_0).$$

Тогда

$$\frac{m l^2}{2} \omega^2 = \frac{m l^2}{2} \omega_0^2 - \frac{\chi \varphi^2}{2} + \frac{\chi \varphi_0^2}{2} + mgl(1 - \cos \varphi) - mgl(1 - \cos \varphi_0) \quad \text{или}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \left[\frac{\chi}{ml^2}(\varphi^2 - \varphi_0^2) + \frac{2g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_0) \right] = \omega_0^2 - \psi(\varphi),$$

где $\psi(\varphi) = \frac{\chi}{ml^2}(\varphi^2 - \varphi_0^2) + \frac{2g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$.

Затем найдем стационарные точки функции $\psi(\varphi)$. Для этого запишем уравнение

$$\psi'(\varphi) = \frac{2\chi}{ml^2}\varphi - \frac{2g}{l}\sin \varphi = 0,$$

причем с относительной погрешностью не более 1% можно считать, что

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{6},$$

где $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{mgl}\varphi - \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) &= 0 \quad \text{или} \\ \varphi^3 &= 6 \left(1 - \frac{\chi}{mgl} \right) \varphi. \end{aligned} \tag{78}$$

Если $\chi < mgl$, то это уравнение имеет три различных действительных корня

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \sqrt{6} \sqrt{1 - \frac{\chi}{mgl}} \quad \text{и} \quad \varphi_3 = -\sqrt{6} \sqrt{1 - \frac{\chi}{mgl}}.$$

Если $\chi \geq mgl$, то уравнение (78) имеет один действительный корень $\varphi_1 = 0$. Следовательно, при $\chi < mgl$ существуют три стационарные точки функции $\psi(\varphi)$, а при $\chi \geq mgl$ — только одна.

Выясним, имеет ли функция $\psi(\varphi)$ в этих точках локальный экстремум. Для этого вычислим

$$\psi''(\varphi) = \frac{2\chi}{ml^2} - \frac{2g}{l} \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right),$$

и определим знак этой производной при $\varphi = \varphi_i$, где $i = 1, 2, 3$.

При $\varphi = \varphi_1$ имеем

$$\psi''(\varphi_1) = \frac{2\chi}{ml^2} - \frac{2g}{l} = -2 \left(\frac{g}{l} - \frac{\chi}{ml^2} \right) = -\frac{2g}{l} \left(1 - \frac{\chi}{mgl} \right).$$

Если $\chi < mgl$, то $\psi''(\varphi_1) < 0$, а точка $\varphi = \varphi_1$ является точкой локального максимума. Если $\chi > mgl$, то $\psi''(\varphi_1) > 0$, а точка $\varphi = \varphi_1$ является точкой локального минимума. Эта точка является точкой локального минимума и при $\chi = mgl$, т.к. $\psi''(\varphi_1) = \psi'''(\varphi_1) = 0$, а $\psi^{IV}(\varphi_1) > 0$.

При $\varphi = \varphi_i$, где $i = 2, 3$, имеем

$$\begin{aligned} \psi''(\varphi_i) &= \frac{2\chi}{ml^2} - \frac{2g}{l} \left[1 - 3 \left(1 - \frac{\chi}{mgl} \right) \right] = \frac{2\chi}{ml^2} + \frac{4g}{l} - \frac{6\chi}{ml^2} = \\ &= \frac{4g}{l} - \frac{4\chi}{ml^2} = 4 \left(\frac{g}{l} - \frac{\chi}{ml^2} \right) = \frac{4g}{l} \left(1 - \frac{\chi}{mgl} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, точки $\varphi = \varphi_2$ и $\varphi = \varphi_3$ являются точками локального минимума.

Таким образом, при $\chi \geq mgl$ существует только одна стационарная точка $\varphi = \varphi_1$, которая является точкой локального минимума функции $\psi(\varphi)$. Это означает, что на фазовой плоскости $\varphi O\omega$ существует только одно положение равновесия — точка $(\varphi_1, 0)$, которая является центром (рис. 71).

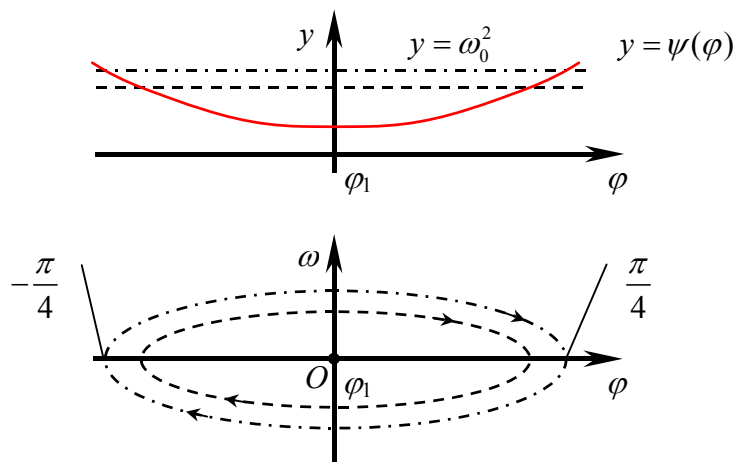


Рис. 71. Иллюстрация к построению фазового портрета механической системы при $\chi \geq mgl$

При $\chi < mgl$ на фазовой плоскости $\varphi O\omega$ имеем три положения равновесия: $(\varphi_1, 0)$, $(\varphi_2, 0)$ и $(\varphi_3, 0)$, первое из которых является седлом и соответствует точке локального максимума функции $\psi(\varphi)$, а два других являются центрами и соответствуют точкам локального минимума этой функции (рис. 72).

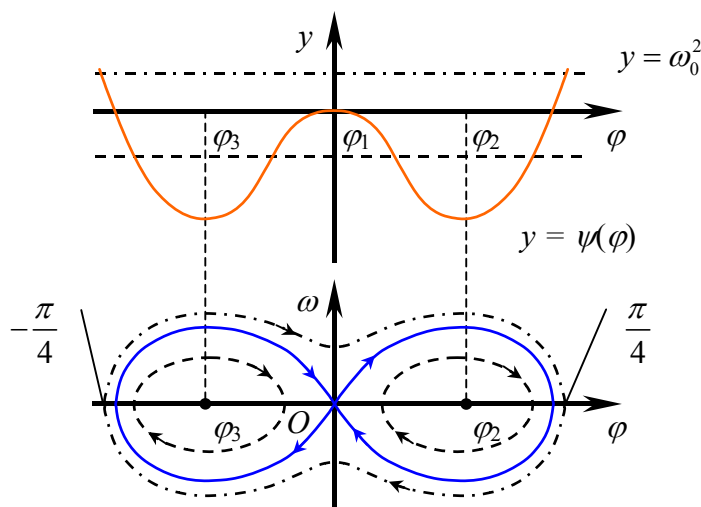


Рис. 72. Иллюстрация к построению фазового портрета механической системы при $\chi < mgl$

Сепаратриса, проходящая через седло, разделяет фазовую плоскость $\varphi O\omega$ на области, которые заполнены фазовыми траекториями различных типов. Фазовые траектории, охватываемые сепаратрисой, описывают периодические колебания в окрестности устойчивых положений равновесия без изменения знака φ . Фазовые траектории, которые охватывают сепаратрису, описывают периодические колебания, при которых φ изменяет знак. Последнее называют *колебаниями с перескоком через неустойчивое положение равновесия*.

Отметим, что при $\chi \rightarrow mgl$ устойчивые положения равновесия сливаются в одну точку — центр, а неустойчивое положение равновесия исчезает.

Пример 2. Рассмотрим механическую систему на рис. 73, которая состоит из двух одинаковых линейно упругих стержней, шарнирно соединенных в точке C . Шарнирное соединение имеет массу m_0 . Другие концы стержней закреплены с помощью шарниров в точках A и B , расстояние между которыми равно $2l$. Каждый стержень имеет площадь поперечного сечения S и длину l_0 в свободном состоянии, причем $l_0 > l$.

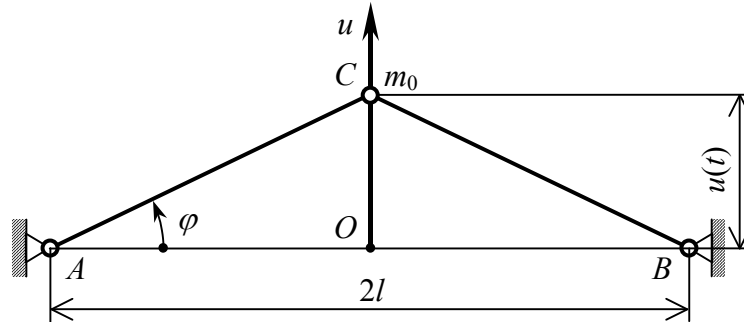


Рис. 73. Расчетная схема механической системы

Предположим, что в рассматриваемой механической системе стержни могут перемещаться в горизонтальной плоскости и шарнир C движется вдоль оси Ou , лежащей в этой плоскости и перпендикулярной отрезку AB . Пусть эти стержни являются невесомыми и не изгибаются при их деформировании, при перемещении стержней трение в шарнирах и сопротивление окружающей среды отсутствуют. Следовательно, эта механическая система является консервативной системой, т.к. сумма ее кинетической и потенциальной энергий остается постоянной.

Положение шарнира C можно характеризовать координатой u , отсчитываемой от пересечения этой оси с отрезком AB , или углом φ , причем $u = l \operatorname{tg} \varphi$. При произвольном значении u длина каждого стержня равна $\sqrt{l^2 + u^2}$, а его относительное удлинение определим по следующей формуле

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{l^2 + u^2} - l_0}{l_0}.$$

Тогда в соответствии с законом Гука в поперечном сечении стержня возникает напряжение, которое равно

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\sqrt{l^2 + u^2} - l_0}{l_0},$$

E — модуль упругости материала (или модуль Юнга). При $\sigma > 0$ стержень растягивают, при $\sigma < 0$ стержень сжимают. При деформировании стержней возникают силы упругости, которые являются стационарными потенциальными силами.

Перемещение du шарнира C вызовет изменение потенциальной энергии $\Pi(u)$ системы, т.е.

$$\begin{aligned} d\Pi(u) &= 2S\sigma \sin \varphi du = 2SE \frac{\sqrt{l^2 + u^2} - l_0}{l_0} \frac{u}{\sqrt{l^2 + u^2}} du = \\ &= 2SE \left(\frac{u}{l_0} - \frac{u}{\sqrt{l^2 + u^2}} \right) du, \end{aligned} \quad (79)$$

где $S\sigma \sin \varphi$ — проекция силы упругости на ось Ou , взятая с противоположным знаком.

Пусть потенциальная энергия механической системы равна нулю при $u = u_*$. Тогда, используя уравнение (79), запишем

$$\begin{aligned}\Pi(u) &= \int_{u_*}^u 2SE \left(\frac{u}{l_0} - \frac{u}{\sqrt{l^2 + u^2}} \right) du = SE \left(\frac{u^2}{l_0} - 2\sqrt{l^2 + u^2} \right) \Big|_{u_*}^u = \\ &= SE \left(\frac{u^2}{l_0} - 2\sqrt{l^2 + u^2} \right) - SE \left(\frac{u_*^2}{l_0} - 2\sqrt{l^2 + u_*^2} \right).\end{aligned}$$

Очевидно, что кинетическая энергия данной механической системы равна

$$K(v) = \frac{m_0 v^2}{2}.$$

Для консервативной механической системы справедливо

$$K(v) + \Pi(u) = m_0 \frac{v^2}{2} + SE \left(\frac{u^2}{l_0} - 2\sqrt{l^2 + u^2} \right) - SE \left(\frac{u_*^2}{l_0} - 2\sqrt{l^2 + u_*^2} \right) = \text{const}. \quad (80)$$

Если в момент времени $t = t_0$ известны начальные условия $u(t_0) = u_0$ и $v(t_0) = v_0$, то из уравнения (80) получим

$$m_0 \frac{v^2}{2} + SE \left(\frac{u^2}{l_0} - 2\sqrt{l^2 + u^2} \right) = m_0 \frac{v_0^2}{2} + SE \left(\frac{u_0^2}{l_0} - 2\sqrt{l^2 + u_0^2} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned}m_0 \frac{v^2}{2} - m_0 \frac{v_0^2}{2} + ES \left(\frac{u^2 - u_0^2}{l_0} - 2\sqrt{l^2 + u^2} + 2\sqrt{l^2 + u_0^2} \right) &= 0 \quad \text{или} \\ v^2 &= v_0^2 - \frac{2ES}{m_0} \left(\frac{u^2 - u_0^2}{l_0} - 2\sqrt{l^2 + u^2} + 2\sqrt{l^2 + u_0^2} \right) = v_0^2 - \psi(u),\end{aligned}$$

где $\psi(u) = \frac{2ES}{m_0} \left(\frac{u^2 - u_0^2}{l_0} - 2\sqrt{l^2 + u^2} + 2\sqrt{l^2 + u_0^2} \right).$

Затем найдем стационарные точки функции $\psi(u)$. Для этого составим уравнение

$$\psi'(u) = \frac{4ES}{m_0} \left(\frac{u}{l_0} - \frac{u}{\sqrt{l^2 + u^2}} \right) = 0.$$

Очевидно, что уравнение

$$\left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{\sqrt{l^2 + u^2}} \right) u = 0$$

при $l_0 > l$ имеет три действительных корня

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \sqrt{l_0^2 - l^2} \quad \text{и} \quad u_3 = -\sqrt{l_0^2 - l^2}.$$

Следовательно, существуют только три стационарные точки функции $\psi(u)$.

Выясним, существует ли локальный экстремум функции $\psi(u)$ в этих точках. Для этого вычислим

$$\psi''(u) = \frac{4ES}{m_0} \left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{(l^2 + u^2)^{1/2}} + \frac{u^2}{(l^2 + u^2)^{3/2}} \right) = \frac{4ES}{m_0} \left(\frac{1}{l_0} - \frac{l^2}{(l^2 + u^2)^{3/2}} \right).$$

По знаку второй производной функции $\psi(u)$ устанавливаем, что точка $u_1 = 0$ является точкой локального максимума функции $\psi(u)$, т.к. при $l_0 > l$ получаем, что

$$\psi''(0) = \frac{4ES}{m_0} \left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l} \right) < 0.$$

Точки $u = u_i$, где $i = 2, 3$, являются точками локального минимума, т.к. при $l_0 > l$ получаем, что справедливо следующее неравенство

$$\psi''(u_i) = \frac{4ES}{m_0} \left(\frac{1}{l_0} - \frac{l^2}{l_0^3} \right) = \frac{4ES}{m_0 l_0^3} (l_0^2 - l^2) > 0.$$

Таким образом, на фазовой плоскости uOv имеем три положения равновесия $(u_1, 0)$, $(u_2, 0)$ и $(u_3, 0)$, первое из которых является седлом и соответствует точке локального максимума функции $\psi(u)$, а два других являются центрами и соответствуют точкам локального минимума этой функции (рис. 74).

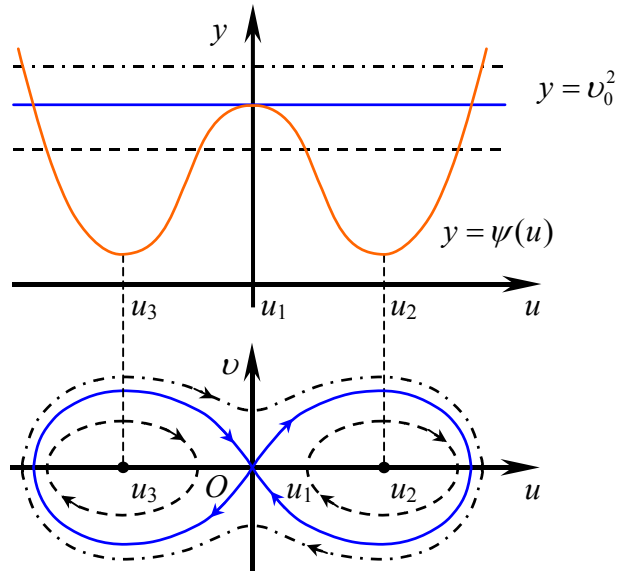


Рис. 74. Иллюстрация к построению фазового портрета механической системы

Сепаратриса, проходящая через седло, разделяет фазовую плоскость uOv на области, которые заполнены фазовыми траекториями различных типов. Фазовые траектории, охватываемые сепаратрисой, описывают периодические колебания в окрестности устойчивых положений равновесия без изменения знака u . Фазовые траектории, которые охватывают сепаратрису, описывают периодические колебания, при которых u изменяет знак. Последние относят к колебаниям с перескоком через неустойчивое положение равновесия.

Если $l_0 \rightarrow l$, то устойчивые положения равновесия сливаются в одну точку — центр, которая является началом координат на фазовой плоскости, а неустойчивое положение равновесия исчезает.

5.8. Математические модели некоторых диссипативных систем

Математические модели консервативных систем не учитывают потери энергии реальным ТО. Учет таких потерь приводит к необходимости построения моделей диссипативных систем.

Далее рассмотрим пример построения нелинейной ММ диссипативной механической системы с одной степенью свободы и проведем анализ этой модели.

Пример. Механическая система состоит из тела массой m , движущегося по горизонтальной поверхности при наличии сухого трения и связанного с неподвижной опорой пружиной жесткостью c (рис. 75).

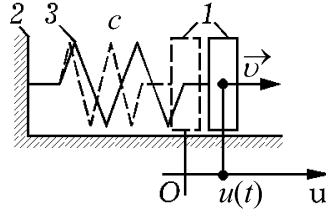


Рис. 75. Схема механической системы: 1 — тело; 2 — неподвижное основание; 3 — пружина

Пружина действует на тело силой, проекция которой на положительное направление координатной оси Ou равна

$$P = -cu.$$

где u — перемещение тела относительно положения, в котором пружина не деформирована.

Пусть коэффициент трения скольжения k равен коэффициенту трения покоя $k_{\text{п}}$. Тогда для определения проекции силы трения на положительное направление оси Ou воспользуемся следующей формулой

$$P_{\text{тр}} = \begin{cases} -P_0, & P_0 \leq P, \quad 0 < v; \\ -P, & -P_0 \leq P \leq P_0, \quad v = 0; \\ P_0, & P \leq -P_0, \quad v < 0, \end{cases}$$

где P_0 — наибольшая величина силы трения покоя; v — проекция вектора скорости тела на положительное направление оси Ou . Если тело неподвижно, то проекцию силы трения находят из уравнения

$$P_{\text{тр}} = -P,$$

причем $-P_0 \leq P_{\text{тр}} \leq P_0$.

Из второго закона Ньютона следует, что

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = P + P_{\text{тр}}. \quad (81)$$

Тогда движение рассматриваемой механической системы описывает автономная нормальная система ОДУ

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{P}{m} + \frac{P_{\text{тр}}}{m}. \end{cases}$$

Это означает, что рассматриваемая механическая система является не только диссипативной, но и автономной. При отсутствии трения между телом и поверхностью данная механическая система становится гармоническим осциллятором.

Пусть скорость тела v не равна нулю, тогда

$$P_{\text{тр}} = -P_0 \operatorname{sgn} v ,$$

где $\operatorname{sgn} v$ — функция-сигнум (знак). Тогда из нелинейного ОДУ (81) можно получить два линейных ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами, которые описывают движение тела при $v > 0$ и $v < 0$ соответственно:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -cu - P_0 = -c \left(u + \frac{P_0}{c} \right); \quad (82)$$

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -cu + P_0 = -c \left(u - \frac{P_0}{c} \right). \quad (83)$$

Пусть $a = P_0 / c$ — наибольшее по абсолютной величине перемещение тела, при котором сила трения уравнивает реакцию пружины. Тогда представим уравнения (82) и (83) в виде

$$\frac{d^2 u_+}{dt^2} + \omega_0^2 u_+ = 0, \quad \frac{du_+}{dt} > 0; \quad (84)$$

$$\frac{d^2 u_-}{dt^2} + \omega_0^2 u_- = 0, \quad \frac{du_-}{dt} < 0, \quad (85)$$

где $u_+ = u + a$; $u_- = u - a$; $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ — угловая частота собственных колебаний гармонического осциллятора, соответствующего рассматриваемой механической системе при отсутствии трения.

Уравнение (84) описывает колебания тела относительно положения $u = -a$ в течение времени, когда $v > 0$, а уравнение (85) описывает колебания тела относительно положения $u = a$ в течение времени, когда $v < 0$.

Если в момент времени $t = 0$ принять начальные условия

$$u(0) = u_0 < -a \quad \text{и} \quad v(0) = 0 ,$$

то пружина будет сжата и $P > P_0$. Следовательно, при $t > 0$ тело начнет движение в положительном направлении оси Ou . Тогда движение тела описывает уравнение (84), для которого запишем:

$$u_+(0) = u_0 + a < 0 \quad \text{и} \quad \frac{du_+}{dt}(0) = 0 .$$

Решение уравнения (84) имеет вид

$$u_+(t) = (u_0 + a) \cos \omega_0 t .$$

Оно справедливо до тех пор, пока

$$v = \frac{du_+}{dt} = -(u_0 + a) \omega_0 \sin \omega_0 t > 0 ,$$

т.е. при $t \in (0, \pi / \omega_0)$.

В момент времени $t_1 = \pi / \omega_0$ скорость тела обращается в нуль, и можно установить, что

$$u_+(t_1) = -(u_0 + a) > 0 \quad \text{и} \quad u(t_1) = u_+(t_1) - a = -u_0 - 2a = |u_0| - 2a .$$

Если $u(t_1) \in [-a, a]$, то сила трения уравнивает реакцию пружины и тело прекратит свое дальнейшее движение. Если же $u(t_1) > a$ или $u_-(t_1) = u(t_1) - a > 0$, то при $t > t_1$ тело начнет движение в отрицательном направлении оси Ou . Тогда движение тела описывает уравнение (85), для которого запишем начальные условия

$$u_-(t_1) = u(t_1) - a = |u_0| - 3a > 0 \quad \text{и} \quad \frac{du_-}{dt}(t_1) = 0.$$

Решение уравнения (85) имеет вид

$$u_-(t) = (u(t_1) - a) \cos \omega_0(t - t_1) = (|u_0| - 3a) \cos \omega_0(t - t_1).$$

Оно справедливо до тех пор, пока скорость тела отрицательна

$$\begin{aligned} \frac{du_-}{dt} &= -(|u_0| - 3a) \omega_0 \sin \omega_0(t - t_1) = \\ &= -(|u_0| - 3a) \omega_0 (\sin \omega_0 t \cos \omega_0 t_1 - \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t_1) = \\ &= (|u_0| - 3a) \omega_0 \sin \omega_0 t < 0, \end{aligned}$$

т.е. при $t \in (t_1, 2\pi / \omega_0)$.

В момент времени $t_2 = 2\pi / \omega_0$ скорость тела обращается в нуль, и можно установить, что

$$u_-(t_2) = -(|u_0| - 3a) = u_0 + 3a < 0 \quad \text{и} \quad u(t_2) = u_-(t_2) + a = u_0 + 4a.$$

Если $u(t_2) \in [-a, a]$, то сила трения уравнивает реакцию пружины и тело прекратит свое дальнейшее движение. Если же $u(t_2) < -a$, то при $t > t_2$ тело начнет движение в положительном направлении оси Ou .

Таким образом, решение уравнения (84) дает начальные условия для уравнения (85) при $t = (2n - 1)\pi / \omega_0$, $n \in \mathbb{N}$. Решая уравнение (85), получаем начальные условия для уравнения (84) при $t = 2n\pi / \omega_0$, $n \in \mathbb{N}$, и так далее до тех пор, пока не выполнится следующее условие:

$$-a \leq u(t_m) \leq a, \tag{86}$$

где $t_m = (m - 1)\pi / \omega_0$, $m \in \mathbb{N}$.

При этом график функции $u(t)$ состоит из полувольт косинусоиды (рис. 76). Две соседние полуволны описывают движение тела в течение условного периода $T = 2\pi / \omega_0$ затухающих колебаний относительно положения $u = 0$ системы. Полуразмахи этих колебаний составляют убывающую арифметическую прогрессию. Разность арифметической прогрессии равна $4a$ за период T , в отличие от линейного осциллятора, полуразмахи которого убывают по геометрической прогрессии.

Характер движения тела зависит от начальных условий, определяющих запас ее полной энергии. При достаточно большом запасе полной энергии тело совершает конечное число колебаний до тех пор, пока не будет выполнено условие (86). С целью более глубокого понимания материала постройте график функции $u(t)$, если $k_{\Pi} > k$.

Несложно убедиться, что для данной механической системы фазовые траектории на фазовой плоскости образуют два семейства полуокружностей с центром в точках $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ при соответствующем выборе масштабов (рис. 77).

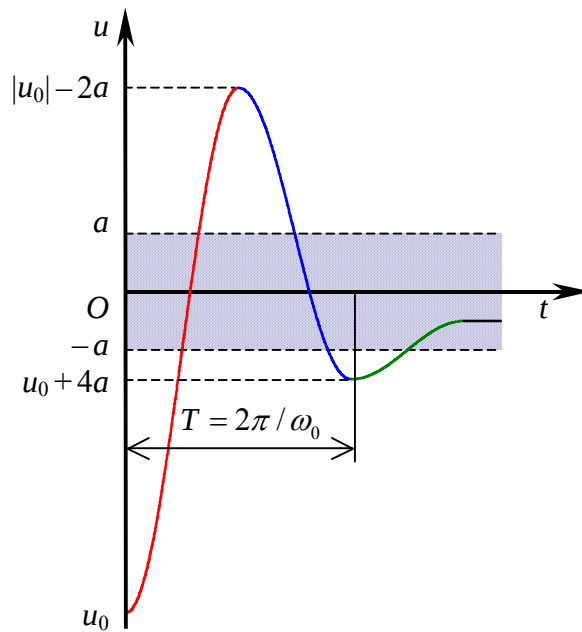


Рис. 76. График функции $u(t)$

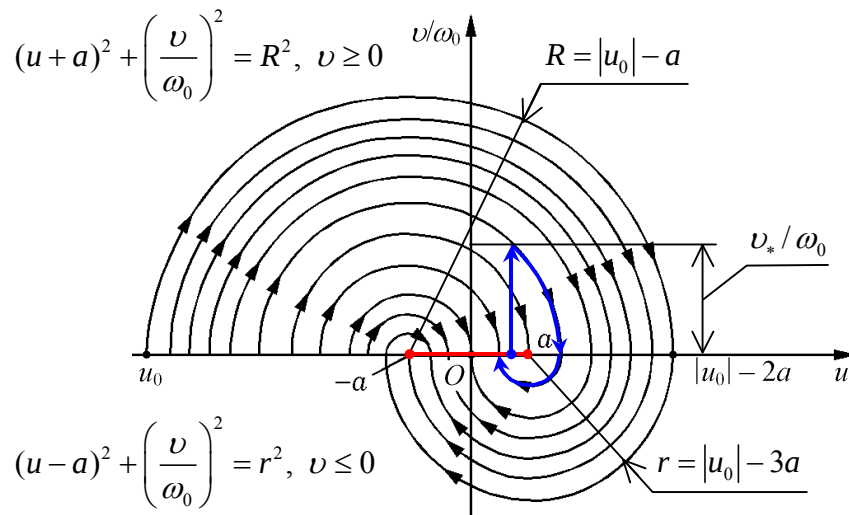


Рис. 77. Фазовый портрет диссипативной системы

Любая точка отрезка $[-a, a]$ оси Ou фазовой плоскости является положением равновесия рассматриваемой системы. Например, стрелка измерительного стрелочного прибора вследствие трения в опорах ее оси останавливается в некоторой зоне нечувствительности на шкале прибора в окрестности значения измеряемой величины. По той же причине стрелка может не вернуться к нулевой отметке на этой шкале при отключении прибора.

Если в некотором положении равновесия $(u_*, 0)$ сообщить телу скорость v_* , то изображающая точка перейдет на соответствующую фазовую траекторию, а затем по ней вернется на отрезок $[-a, a]$ оси Ou , но не обязательно в ту же точку $(u_*, 0)$.

При одинаковых по абсолютной величине и малых возмущениях скорости тела изображающая точка может в зависимости от знака v_* приближаться к одному из концов отрезка $[-a, a]$. Если при «встряхивании» механической системы, находящейся в одном из положений равновесия, оба направления вектора скорости тела равновероятны, то изображающая точка может приближаться к середине этого отрезка.

5.9. Автоколебательные системы

Консервативная система может совершать периодические незатухающие колебания. При переменном внешнем воздействии такие колебания возможны и в технической системе, которая не является консервативной. Однако часто встречаются неконсервативные системы, в которых при отсутствии таких внешних воздействий возможны периодические незатухающие колебания. Период этих колебаний зависит лишь от параметров самой системы, которая регулирует поступление энергии (или другой физической субстанции) для поддержания постоянного полуразмаха колебаний. Такие системы принято называть *автоколебательными*, а возникающие в них периодические колебания — *автоколебаниями*.

Автоколебания могут возникать в системах автоматического управления, в элементах подвески транспортных машин, в различных электромеханических устройствах (например, в обычном электрическом звонке). К автоколебательным системам относятся часовой механизм, генераторы электромагнитных колебаний и т.п.

Каждая автоколебательная система имеет источник энергии или физической субстанции. В автоколебательной системе установлена обратная связь между основной колебательной системой и источником энергии (или физической субстанции). Таким образом, при анализе автоколебательных систем полезно различать следующие основные элементы:

- 1) основную колебательную систему;
- 2) источник энергии (или физической субстанции), который восполняет расход энергии (или физической субстанции) основной колебательной системы;
- 3) обратную связь, управляющую отбором энергии (или физической субстанции) от источника.

Рассмотрим примеры автоколебательных систем, для которых основная колебательная система имеет только одну степень свободы. Особенностью таких систем является наличие на фазовой плоскости хотя бы одного предельного цикла. *Предельный цикл* — это замкнутая фазовая траектория, для которой существует область фазовой плоскости, не содержащая кроме этой других замкнутых фазовых траекторий, т.е. фазовые траектории, находящиеся в этой области либо “навиваются”, либо “свиваются” с этой замкнутой фазовой траекторией. Промежуток времени T , за который изображающая точка проходит предельный цикл, называют *периодом автоколебаний*. Автоколебательная система может иметь более одного предельного цикла.

Предельный цикл называют *устойчивым*, если на фазовой плоскости можно указать такую область, содержащую этот цикл, что все фазовые траектории, начинающиеся в этой области, неограниченно приближаются к нему при $t \rightarrow +\infty$. В противном случае предельный цикл называют *неустойчивым*.

Пример 1. Выберем в качестве основной колебательной системы диссипативную механическую систему с одной степенью свободы, являющуюся линейным осциллятором. Эта механическая система состоит из тела массой m , движущегося по горизонтальной поверхности при наличии линейного трения и связанное с неподвижной опорой пружиной жесткостью c (рис. 78).

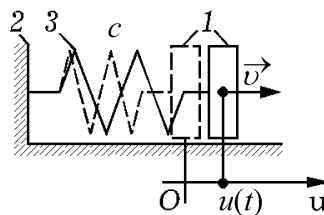


Рис. 78. Схема механической системы: 1 — тело; 2 — неподвижное основание; 3 — пружина

В соответствии со вторым законом Ньютона запишем

$$m \frac{dv}{dt} = -cu - k_{\text{TP}} Sv, \quad (87)$$

где v — скорость тела; u — перемещение тела относительно положения, в котором пружина не деформирована; k_{TP} — коэффициент вязкого трения при движении тела по горизонтальной плоскости; S — площадь поверхности контакта тела с этой плоскостью. Запишем уравнение (87) в виде ОДУ второго порядка

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + k_{\text{TP}} S \frac{du(t)}{dt} + cu(t) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2h \frac{du(t)}{dt} + \omega^2 u(t) = 0, \quad (88)$$

где $h = \frac{k_{\text{TP}} S}{2m} \geq 0$, $\omega^2 = \frac{c}{m}$.

Рассмотрим частный случай ОДУ (88) когда $0 < h < \omega$. Если известны начальные условия $u(0) = 0$ и $v(0) = \frac{du}{dt}(0) = v_0 > 0$, то решение этого уравнения имеет вид

$$u(t) = e^{-ht} \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - h^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - h^2} t = e^{-ht} \frac{v_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t, \quad (89)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - h^2}$ — условная угловая частота колебаний. Это уравнение описывает затухающие колебания, полуразмахи которых с течением времени уменьшаются. Из уравнения (89) получим

$$v(t) = \frac{du}{dt}(t) = v_0 e^{-ht} \left(\cos \omega_1 t - \frac{h}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right). \quad (90)$$

Уравнения (89) и (90) в параметрической форме задают фазовую траекторию в фазовой плоскости uOv . Она имеет вид спирали, которая при $t \rightarrow +\infty$ “наматывается” на точку O , изображенную на рис. 79. Эта точка соответствует асимптотически устойчивому частному решению ОДУ (88) и является положением равновесия — устойчивым фокусом.

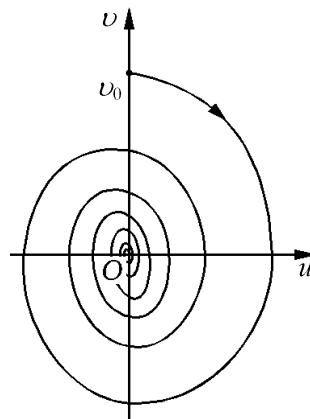


Рис. 79. Фазовая траектория, соответствующая колебаниям линейного осциллятора

Из формулы (89) следует, что перемещение $u(t)$ изменяет знак с минуса на плюс в моменты времени

$$t = 2n\pi / \omega_1 = nT_1, \quad n \in \mathbb{N},$$

т.е. через одинаковые промежутки времени $T_1 = 2\pi / \omega_1$, где T_1 — условный период затухающих колебаний. В эти моменты времени в соответствии с формулой (90) скорость принимает значения

$$v(n T_1) = v_0 e^{-h n T_1} \left(\cos 2n\pi - \frac{h}{\omega_1} \sin 2n\pi \right) = v_0 e^{-h n T_1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, через одинаковые промежутки времени T_1 скорость уменьшается в $e^{h T_1}$ раз и, следовательно, уменьшается кинетическая энергия механической системы, а потенциальная энергия становится равной нулю, т.к.

$$u(n T_1) = e^{-h n T_1} \frac{v_0}{\omega_1} \sin 2n\pi = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Это означает, что уменьшается полная энергия механической системы и рассматриваемая система является диссипативной системой.

Если при помощи специального устройства сообщать системе утраченную долю кинетической энергии каждый раз при смене знака $u(t)$ с минуса на плюс, то будут возникать автоколебания.

Действительно, если в моменты времени $t = n T_1$, где $n \in \mathbb{N}$, когда изображающая точка находится в положении A , сообщить телу приращение скорости

$$\Delta v = v_0 (1 - e^{-h T_1}),$$

то изображающая точка перейдет в положение B и продолжит движение по витку спирали, который снова приведет ее в положение A (рис. 80). Осуществляя это каждый раз при смене знака $u(t)$ с минуса на плюс, получаем замкнутую фазовую траекторию $ABCA$.

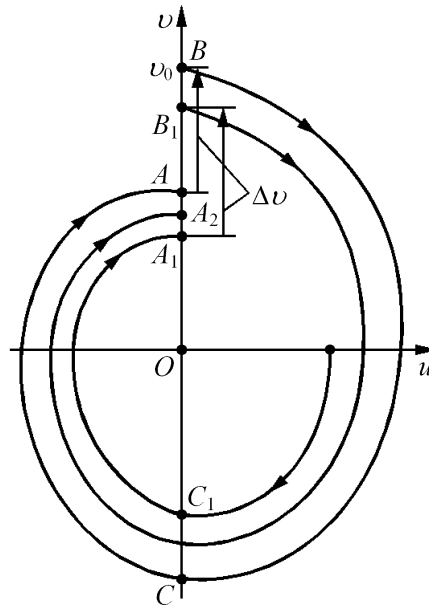


Рис. 80. Фазовые траектории, соответствующие колебаниям линейного осциллятора

При этом начало координат на фазовой плоскости uOv утрачивает свойство устойчивого фокуса. Действительно, при любых отклонениях от положения равновесия изображающая точка придет в положение A_1 и, совершив скачок вдоль оси координат Ov на величину Δv , перейдет в точку B_1 на новый виток спирали, охватывающий прежний, и т.д. Таким образом, отклонения от точки O будут нарастать. Поскольку фазовая плоскость непрерывно заполнена спиралевидными фазовыми траекториями, то изображающая точка будет стремиться перейти на замкнутую траекторию $ABCA$.

Самостоятельный переход технической системы к движению по устойчивому предельному циклу называют *самовозбуждением*. В рассматриваемом случае осуществляется переход системы из состояния неустойчивого положения равновесия к движению по устойчивому предельному циклу. Такой переход называют *мягким самовозбуждением*.

Наличие устройства, способного сообщить телу мгновенное приращение скорости Δv в моменты времени $t = n T_1$, где $n \in \mathbb{N}$, наделяет механическую систему свойством самовозбуждения колебаний.

Пример 2. Теперь в качестве основной колебательной системы выберем диссипативную механическую систему не с линейным, а с сухим трением. Такая механическая система уже была рассмотрена ранее. Пусть она снабжена устройством, передающим ей дополнительную кинетическую энергию в моменты времени, когда $u(t) = -a$ и $v(t) > 0$.

Если происходит приращение кинетической энергии такой механической системы на постоянную величину ΔK , то это приводит к приращению Δv скорости тела массой m . Действительно, справедливы следующие уравнения:

$$\Delta K = \frac{m}{2}(\Delta v + v)^2 - \frac{m}{2}v^2 \text{ и } \Delta v = \sqrt{v^2 + \frac{2}{m}\Delta K} - v.$$

Пусть изображающая точка в верхней полуплоскости фазовой плоскости находится на полуокружности радиуса

$$R_0 = |u_0| - a = v / \omega_0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ — угловая частота собственных колебаний гармонического осциллятора, соответствующего рассматриваемой механической системе при отсутствии трения. В результате приращения кинетической энергии она перейдет на полуокружность радиуса

$$R_1 = R_0 + \frac{\Delta v}{\omega_0} = \frac{v}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_0} \sqrt{v^2 + \frac{2}{m}\Delta K} - \frac{v}{\omega_0} = \sqrt{\frac{v^2}{\omega_0^2} + \frac{2}{m\omega_0^2}\Delta K}, \quad (91)$$

а в нижней полуплоскости — на полуокружность радиуса $r = R_1 - 2a$ (рис. 81).

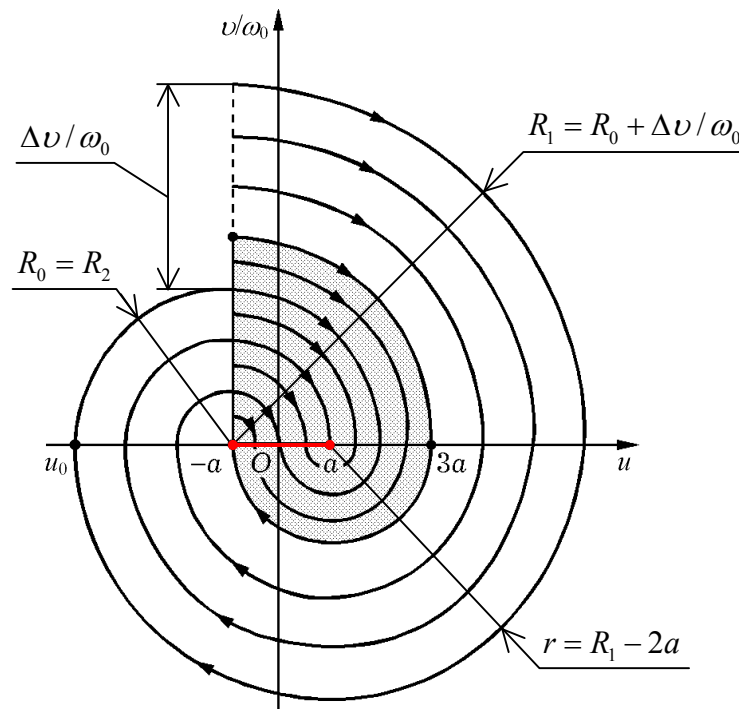


Рис. 81. Фазовые траектории, соответствующие колебаниям осциллятора с сухим трением

Затем в верхней полуплоскости изображающая точка перейдет на полуокружность радиуса

$$R_2 = r - 2a = R_1 - 4a ,$$

причем $R_2 = R_0$. Тогда должно выполняться следующее равенство

$$R_1 = R_0 + 4a . \quad (92)$$

Из уравнения (91) следует, что

$$R_1^2 = \frac{\nu^2}{\omega_0^2} + \frac{2}{m \omega_0^2} \Delta K = R_0^2 + \frac{2}{m \omega_0^2} \Delta K ,$$

где $R_0 = \nu / \omega_0$. Учитывая равенство (92), получим

$$R_1^2 = (R_0 + 4a)^2 = R_0^2 + \frac{2}{m \omega_0^2} \Delta K .$$

Тогда можно найти

$$\Delta K = \frac{m \omega_0^2}{2} (8a R_0 + 16a^2) = 4m \omega_0^2 a (R_0 + 2a) = 4ca (R_0 + 2a) .$$

Таким образом, при выполнении этого условия возможны автоколебания, причем рассматриваемая механическая система не обладает свойством самовозбуждения колебаний. Действительно, если в области, заштрихованной на рис. 81, находится изображающая точка, то она не сможет перейти к движению по предельному циклу и займет одно из положений равновесия на отрезке $[-a, a]$, расположенном на оси Ou .

Для возникновения автоколебаний необходимо возмущение, выводящее изображающую точку за пределы заштрихованной области. В этом случае говорят о *жестком самовозбуждении*, т.е. о переходе технической системы из состояния устойчивого равновесия к движению по устойчивому предельному циклу, причем для этого необходимо достаточно большое начальное возмущение.

5.10. Приближенные аналитические методы анализа динамических моделей

В связи с развитием и совершенствованием вычислительной техники выросла роль численных методов. Но при этом не утратили своего значения приближенные аналитические методы решения задач. Известно большое число приближенных аналитических методов, используемых для анализа нелинейных динамических моделей не только автономных технических систем, но и технических систем, которые не являются автономными.

Сначала рассмотрим автономную нормальную систему ОДУ

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = -\omega^2 u + f(u, v), \end{cases} \quad (93)$$

где $u(t)$ и $v(t)$ — функции, зависящие от времени t ; $f(u, v)$ — функция двух аргументов u и v , которая явно не зависит от t .

Если под функцией $u(t)$ понимать зависимость от времени перемещения материальной точки единичной массой, то $v(t)$ — скорость этой точки. Тогда слагаемые $-\omega^2 u$ и $f(u, v)$ являются проекциями на выбранное положительное направление сил, которые действуют на материальную точку.

Систему ОДУ (93) можно привести к виду ОДУ второго порядка

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u - f(u, u') = 0. \quad (94)$$

Пусть в данной технической системе возникают установившиеся колебания, близкие по форме к гармоническим с угловой частотой ω . В первом приближении считаем, что

$$\tilde{u}(t) = A \cos \omega t, \quad (95)$$

где $A = \text{const} > 0$ — полуразмах колебаний. Очевидно, что зависимость (95) не является решением ОДУ (94), так как в общем случае

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dt^2} + \omega^2 \tilde{u} - f(\tilde{u}, \tilde{u}') = -f(\tilde{u}, \tilde{u}') \neq 0.$$

Функцию $f(u, v)$ можно трактовать как проекцию непотенциальной силы, которая приложена к материальной точке единичной массой. Если за период колебаний работа этой силы отрицательна, то полная энергия такой простейшей механической системы убывает, и колебания затухают, а если положительна, то полная энергия возрастает, и полуразмах колебаний увеличиваются. Поэтому существование установившихся колебаний в технической системе возможно только при равенстве нулю работы непотенциальной силы за период колебаний. Условие равенства нулю работы за период T колебаний имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \int_0^T f(\tilde{u}(t), \tilde{u}'(t)) \tilde{u}'(t) dt &= \int_0^T f(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t)(-A\omega \sin \omega t) dt = 0 \quad \text{или} \\ I(A) &= \int_0^T f(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) \sin \omega t dt = 0. \end{aligned} \quad (96)$$

Из этого интегрального соотношения можно найти значение параметра A и установить искомые зависимости:

$$\tilde{u}(t) = A \cos \omega t \quad \text{и} \quad \tilde{v}(t) = -A\omega \sin \omega t.$$

Такой подход к нахождению приближенного решения системы ОДУ (93) лежит в основе метода энергетического баланса.

Теперь проанализируем процесс установления колебаний в данной технической системе, принимая в момент времени $t = 0$ следующие начальные условия:

$$u(0) = A_0 > 0 \quad \text{и} \quad v(0) = \frac{du}{dt}(0) = 0.$$

Пусть полуразмах колебаний в течение одного периода колебаний изменяется не существенно. Тогда в зависимости (95) считаем величину $A = A(t)$ настолько медленно изменяющейся во времени t , что в течение одного периода колебаний в первом приближении ее можно считать постоянной. Тогда приращение полной энергии данной технической системы за один период колебаний составит

$$\Delta W = \int_0^T f(u(t), v(t)) v(t) dt \approx -\omega A I(A). \quad (97)$$

Полную энергию W технической системы вычислим как сумму кинетической и потенциальной энергий гармонического осциллятора, который состоит из тела единичной массы и пружины жесткостью $c = \omega^2$, т.е.

$$W = \frac{v^2}{2} + \omega^2 \frac{u^2}{2}.$$

При этом в течение одного периода колебаний можно считать, что $u(t) = A \cos \omega t$ и $v(t) = -A \omega \sin \omega t$, тогда

$$W = \frac{\omega^2 A^2}{2} \sin^2 \omega t + \frac{\omega^2 A^2}{2} \cos^2 \omega t = \frac{\omega^2 A^2}{2}.$$

Следовательно, приращение полной энергии технической системы за период T колебаний установим из следующего уравнения

$$\Delta W = \frac{\omega^2}{2} (A + \Delta A)^2 - \frac{\omega^2}{2} A^2,$$

где ΔA — приращение величины A за период колебаний. Если пренебречь величиной $(\Delta A)^2$ по сравнению с малым приращением ΔA за период колебаний, то находим

$$\Delta W = \frac{\omega^2}{2} (A^2 + 2\Delta A A + (\Delta A)^2 - A^2) \approx \omega^2 A \Delta A.$$

Используя приближенное равенство (97), запишем

$$\Delta W \approx -\omega A I(A) \approx \omega^2 A \Delta A.$$

Тогда

$$\Delta A \approx -\frac{I(A)}{\omega}.$$

Так как $\omega = 2\pi/T$, то полученное приближенное равенство можно записать в следующем виде

$$\frac{\Delta A}{T} \approx -\frac{I(A)}{2\pi}.$$

Отношение $\Delta A/T$ характеризует среднюю скорость изменения величины $A(t)$ за период T колебаний. Представим это отношение в виде

$$\Delta A/T = (A_k - A_{k-1})/T,$$

где A_k — значение $A(t)$ в момент времени $t = kT$, $k \in \mathbb{N}$. Если в момент времени $t = 0$ известно, что $A(0) = A_0$, то можно найти

$$A_k = A_{k-1} - \frac{I(A_{k-1})}{\omega},$$

где $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, получена рекуррентная формула, которая позволяет последовательно определять полуразмах колебаний в моменты времени $t = kT$, где $k \in \mathbb{N}$.

Далее рассмотрим один из методов построения фазовой траектории в случае, когда техническая система не является автономной.

Пусть, например, в системе ОДУ (93) функция f явно зависит от времени t , т.е.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = -\omega^2 u + f(t, u, v). \end{cases} \quad (98)$$

Эту систему уравнений можно привести к ОДУ второго порядка

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u - f(t, u, v) = 0.$$

Введем следующие величины: $\tau = \omega t$ и $v = v / \omega$. Затем вместо ОДУ второго порядка запишем

$$\begin{aligned} \omega^2 \frac{dv}{d\tau} + \omega^2 u - f(\tau / \omega, u, \omega v) &= 0 \quad \text{или} \\ \frac{dv}{d\tau} + u + \delta(\tau, u, v) &= 0, \end{aligned} \quad (99)$$

где $\delta(\tau, u, v) = -f(\tau / \omega, u, \omega v) / \omega^2$. Рассмотрим v как функцию от u , т.е. $v = v(u)$, тогда

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{dv}{du} \frac{du}{d\tau} = v \frac{dv}{du} = \frac{1}{2} \frac{d(v)^2}{du}.$$

Следовательно, уравнение (99) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d(v)^2}{du} + u + \delta(\tau, u, v) &= 0 \quad \text{или} \\ d(v)^2 + 2(u + \delta(\tau, u, v)) du &= 0. \end{aligned} \quad (100)$$

Если в некоторый момент времени $t = t_{k-1}$, где $k \in \mathbb{N}$, известно, что

$$u = u_{k-1} \quad \text{и} \quad v = v_{k-1},$$

то фазовая траектория проходит через точку (u_{k-1}, v_{k-1}) фазовой плоскости uOv , где $v_{k-1} = v_{k-1} / \omega$. Через достаточно малый промежуток времени $\Delta t_{k-1} = t_k - t_{k-1}$ изображающая точка перейдет в положение (u_k, v_k) . Найдем приближенные значения величин u_k и v_k .

Для этого считаем, что за промежуток времени Δt_{k-1} изменение функции $\delta(\tau, u, v)$ незначительно, т.е.

$$\delta(\tau, u, v) \approx \delta_{k-1} = \text{const}.$$

Тогда вместо уравнения (100) запишем

$$d(v^2) + d(u + \delta_{k-1})^2 = 0.$$

Очевидно, что общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$v^2 + (u + \delta_{k-1})^2 = r_{k-1}^2 = \text{const},$$

где r_{k-1} соответствует радиусу дуги γ_{k-1} окружности с центром в точке $(-\delta_{k-1}, 0)$, причем эта дуга должна проходить через точку (u_{k-1}, v_{k-1}) фазовой плоскости uOv (рис. 82).

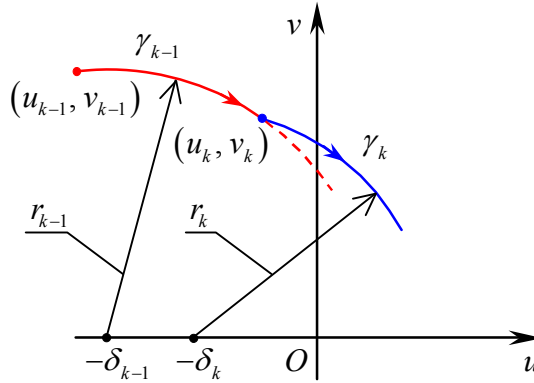


Рис. 82. Построение участка фазовой траектории

Тогда можно определить радиус дуги γ_{k-1} окружности по следующей формуле

$$r_{k-1} = \sqrt{v_{k-1}^2 + (u_{k-1} + \delta_{k-1})^2}.$$

Переместим изображающую точку из положения (u_{k-1}, v_{k-1}) в достаточно близкое положение (u_k, v_k) . Учитывая, что дуга γ_{k-1} окружности проходит через точку (u_k, v_k) , приходим к следующему выражению

$$v_k^2 + (u_k + \delta_{k-1})^2 = r_{k-1}^2 = v_{k-1}^2 + (u_{k-1} + \delta_{k-1})^2. \quad (101)$$

Из приближенного равенства

$$\frac{v_k + v_{k-1}}{2} \approx \frac{u_k - u_{k-1}}{\omega \Delta t_{k-1}}$$

находим, что

$$v_k = 2 \frac{u_k - u_{k-1}}{\omega \Delta t_{k-1}} - v_{k-1}. \quad (102)$$

Тогда согласно выражению (101) имеем

$$\left(2 \frac{u_k - u_{k-1}}{\omega \Delta t_{k-1}} - v_{k-1} \right)^2 + (u_k + \delta_{k-1})^2 = v_{k-1}^2 + (u_{k-1} + \delta_{k-1})^2.$$

Из этого уравнения можно определить приближенное значение величины u_k , а затем из уравнения (102) найти значение величины v_k , причем $v_k = \omega v_k$.

Теперь перейдем к нахождению следующего участка фазовой траектории. Для этого считаем, что за достаточно малый промежуток времени Δt_k изменение функции $\delta(\tau, u, v)$ незначительно, т.е.

$$\delta(\tau, u, v) \approx \delta_k = \text{const}.$$

Тогда участок фазовой траектории проходит через точку (u_k, v_k) и является дугой γ_k окружности радиуса r_k с центром в точке $(-\delta_k, 0)$. Радиус дуги γ_k окружности определяем по формуле

$$r_k = \sqrt{v_k^2 + (u_k + \delta_k)^2}.$$

Затем находим следующее положение (u_{k+1}, v_{k+1}) изображающей точки и т.д. Таким образом, можно построить фазовую траекторию в случае, когда техническая система не является автономной.

Описанный прием построения фазовой траектории получил название *дельта-метода*. Очевидно, что этот метод применим и в случаях, когда функция f в системе ОДУ (98) является функцией любого сочетания двух из трех аргументов t , u и v или же зависит только от одного аргумента. Если в общем случае нормальная система ОДУ имеет вид

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = F(t, u, v), \end{cases}$$

где $F(t, u, v)$ — функция трех аргументов t , u и v , то эту систему можно легко привести в виду (98), положив

$$F(t, u, v) = f(t, u, v) - \omega^2 u.$$

6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МИКРОУРОВНЯ

Ранее были рассмотрены ММ макроуровня. Они описывают процессы в системах с сосредоточенными параметрами, т.е. в дискретных системах. Модели микроуровня описывают процессы в системах с распределенными параметрами, т.е. в континуальных системах.

Теоретической основой построения моделей микроуровня являются механика и электродинамика сплошных сред. В этой части остановимся в основном на особенностях одномерных моделей микроуровня объектов, в которых протекают процессы различной физической природы.

6.1. Математические модели микроуровня простейших элементов электрических систем

Рассмотрим прямолинейный проводник с круглым поперечным сечением. С увеличением частоты колебаний переменного тока, протекающего по проводнику, возрастает неравномерность распределения плотности тока в поперечном сечении проводника, т.е. плотность тока возрастает с увеличением расстояния от оси проводника. Такое явление носит название *поверхностного эффекта* или *скин-эффекта* (от английского слова skin — кожа, оболочка). Для исследования реального распределения плотности переменного тока и выяснения влияния поверхностного эффекта на комплексное сопротивление проводника необходимо привлечь уравнения Максвелла.

Первое уравнение Максвелла в интегральной форме является обобщением закона электромагнитной индукции Фарадея

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}, \quad (103)$$

где ε_i — электродвижущая сила электромагнитной индукции в контуре L ; $\vec{E}$ — напряженность электрического поля (силовая характеристика действия электрического поля на заряженные частицы); Φ_m — магнитный поток сквозь поверхность S , ограниченной контуром L .

Явление электромагнитной индукции заключается в том, что в проводящем контуре L , находящемся в переменном магнитном поле, возникает индуцированное электрическое поле. Энергетической мерой этого поля служит электродвижущая сила ε_i электромагнитной индукции. Если контур замкнут, то в нем под действием индуцированного электрического поля происходят упорядоченное движение электронов, т.е. возникает электрический ток, который называют *индуцированным током*.

Это справедливо не только для проводящего, но и для любого замкнутого контура, мысленно выбранного в переменном магнитном поле. Переменное магнитное поле создает в любой точке пространства вихревое электрическое поле независимо от того, находится в этой точке проводник или нет.

Если воспользоваться выражением для магнитного потока

$$\Phi_m = \iint_S \vec{B} d\vec{S} = \iint_S \vec{n} \cdot \vec{B} ds,$$

где $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции (основная характеристика магнитного поля), и теоремой Стокса¹ из векторного анализа

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = \iint_S \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{E} dS,$$

¹ Циркуляция векторного поля $\vec{E}$ по произвольному кусочно-гладкому контуру L равна потоку векторного поля $\text{rot } \vec{E}$ через поверхность S , ограниченную этим контуром, в направлении ее внешней нормали $\vec{n}$.

то можно перейти от уравнения (103) к *первому уравнению Максвелла в дифференциальной форме*

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1')$$

Максвелл обобщил закон полного тока, предположив, что переменное электрическое поле, так же как и электрический ток, является источником магнитного поля. Закон полного тока для магнитного поля в веществе запишем в виде

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_{\text{макро}} + I_{\text{микро}}),$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная; $I_{\text{макро}}$ и $I_{\text{микро}}$ — силы *макродтоков* и *микродтоков* через поверхность, натянутую на замкнутый контур L . *Макродтоками* называют токи проводимости² и конвекционные³ токи. *Микродтоками* называют токи, обусловленные движением электронов в атомах, молекулах и ионах. Закон полного тока для магнитного поля в произвольной среде имеет вид

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{макро}},$$

где $\vec{H}$ — напряженность магнитного поля (векторная характеристика магнитного поля). В случае однородной и изотропной среды напряженность магнитного поля связана с $\vec{B}$ следующим образом:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

где μ — относительная магнитная проницаемость среды (безразмерная величина, характеризующая магнитные свойства среды, например, для вакуума $\mu = 1$).

Количественной мерой магнитного действия переменного электрического поля является ток смещения сквозь произвольную поверхность S :

$$I_{\text{см}} = \iint_S \vec{j}_{\text{см}} d\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S},$$

где $\vec{j}_{\text{см}}$ — вектор плотности тока смещения сквозь эту поверхность S ; $\vec{D}$ — вектор электрического смещения или вектор электрической индукции. Для однородной и изотропной среды справедливо

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

где $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная; ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды (безразмерная величина, характеризующая электрические свойства среды, например, для вакуума $\varepsilon = 1$).

Максвелл добавил в правую часть уравнения, описывающего закон полного тока, ток смещения и записал этот закон в форме

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{макро}} + I_{\text{см}}. \quad (104)$$

Полученное уравнение называют *вторым уравнением Максвелла в интегральной форме*.

С помощью теоремы Стокса и выражения для полного тока

² Током проводимости называют всякое упорядоченное движение свободных электрических зарядов, возникающее в проводящих средах под действием электрического поля, созданного в этих средах.

³ Конвекционный ток — упорядоченное движение в пространстве заряженных макроскопических тел.

$$I = I_{\text{макро}} + I_{\text{см}} = \iint_S (\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}) d\vec{S} = \iint_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S},$$

где $\vec{j}$ — вектор плотности тока проводимости (предполагаем, что конвекционные токи отсутствуют), можно записать *второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме*

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2')$$

Полная система уравнений Максвелла в интегральной форме помимо уравнений (103) и (104) включает в себя еще два уравнения:

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{D} d\vec{S} &= q_{\text{св}}, \\ \oiint_S \vec{B} d\vec{S} &= 0, \end{aligned} \quad (105)$$

где $q_{\text{св}}$ — алгебраическая сумма *свободных электрических зарядов*, охватываемых замкнутой поверхностью S . *Свободные электрические заряды* — заряды, не являющиеся связанными⁴. Максвелл предположил, что формула (105) справедлива не только для электростатического поля, но и для переменного электрического поля, а магнитное поле всегда является вихревым.

С помощью теоремы Гаусса-Остроградского⁵ из векторного анализа можно, введя объемную плотность свободных зарядов

$$\rho = \frac{dq_{\text{св}}}{dv},$$

получить *третье и четвертое уравнение Максвелла в дифференциальной форме*:

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad (3')$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (4')$$

Таким образом, полная система уравнений Максвелла в дифференциальной форме состоит из четырех уравнений:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho;$$

$$\text{div } \vec{B} = 0.$$

Эту систему уравнений Максвелла дополняют уравнениями, характеризующими электрические и магнитные свойства среды. Для однородной и изотропной среды эти уравнения имеют вид:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

⁴ Связанные заряды — заряды, которые входят в состав атомов и молекул, а так же заряды ионов в кристаллических твердых телах с ионной решеткой.

⁵ Поток векторного поля $\vec{A}$ через замкнутую поверхность S в направлении ее внешней нормали, равен тройному интегралу по области V , ограниченной этой поверхностью, от дивергенции этого векторного поля.

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

где ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные; ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды; μ — относительная магнитная проницаемость среды; γ — удельная электрическая проводимость.

Если существует граница раздела двух сред, то необходимо задать условия на этой границе для векторов $\vec{E}_i$ и $\vec{D}_i$, $\vec{B}_i$ и $\vec{H}_i$, характеризующих электромагнитное поле в i -ой среде, где $i = 1, 2$, т.е.

$$E_{1\tau} = E_{2\tau},$$

$$B_{1n} = B_{2n},$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma,$$

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = j_{\text{пов}},$$

где B_{in} и D_{in} — проекции векторов $\vec{B}_i$ и $\vec{D}_i$ на направление вектора $\vec{n}$; $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к границе, направленный из среды 2 в среду 1; $H_{i\tau}$ и $E_{i\tau}$ — проекции векторов $\vec{H}_i$ и $\vec{E}_i$ на направление вектора $\vec{\tau}$; $\vec{\tau}$ — единичный вектор касательной к границе; σ — поверхностная плотность свободных электрических зарядов; $j_{\text{пов}}$ — проекция вектора плотности поверхностных токов на направление вектора $\vec{\tau} \times \vec{n}$.

При задании начальных и граничных условий система уравнений Максвелла имеет единственное решение.

В дальнейшем считаем, что рассматриваемые среды являются однородными и изотропными с постоянными величинами ε , μ и γ , причем свободные электрические заряды отсутствуют, т.е. $\rho = 0$. Тогда из уравнений (1') и (2') получим

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{B}) = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{H}) = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mu \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right);$$

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{rot}(\gamma \vec{E}) + \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{D}) = \gamma \text{rot } \vec{E} + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{E}) = \gamma \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right).$$

Используя уравнения (3') и (4'), где $\rho = 0$, и учитывая, что оператор Лапласа векторного поля $\vec{A}$ определяют как

$$\Delta \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A},$$

приходим к следующим уравнениям

$$\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \mu \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{или}$$

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + b \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (106)$$

$$\text{grad div } \vec{H} - \Delta \vec{H} = -\mu_0 \mu \gamma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad \text{или}$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + b \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (107)$$

где $a = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} = c/\sqrt{\varepsilon \mu}$; $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 2,9979 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме; $b = \mu_0 \mu \gamma$.

В декартовой прямоугольной системе координат для векторного поля

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ — единичные базисные векторы декартовой прямоугольной системы координат, справедливо

$$\Delta \vec{A} = (\Delta A_x) \vec{i} + (\Delta A_y) \vec{j} + (\Delta A_z) \vec{k}.$$

Тогда для рассматриваемых однородных и изотропных сред, неподвижных относительно инерциальной декартовой прямоугольной системы координат каждая из проекций векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на координатные оси удовлетворяет уравнению вида

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (108)$$

которое называют *телеграфным уравнением*.

В непроводящей среде ($\gamma = 0$ и, следовательно, $b = \mu_0 \mu \gamma = 0$) формулы (106) и (107) принимают вид

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{и} \quad \Delta \vec{H} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

Тогда, применяя оператор Даламбера, запишем

$$\square \vec{E} = \vec{0} \quad \text{и} \quad \square \vec{H} = \vec{0}.$$

Таким образом, в случае непроводящей среды для каждой проекции векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ справедливо волновое уравнение

$$\square u = 0.$$

Если среда обладает большой проводимостью и можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости, т.е. положить $\varepsilon = 0$ в формулах (106) и (107), то приходим к следующим уравнениям

$$\Delta \vec{E} = b \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \Delta \vec{H} = b \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

В этом случае для каждой проекции векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ будет справедливо уравнение параболического типа

$$\Delta u = b \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Пример 1. Далее рассмотрим прямолинейный проводник длиной l с круглым поперечным сечением радиуса r_* , причем r_* намного меньше l . Материал проводника считаем однородным и изотропным, величины ε , μ и γ постоянными, а $\rho = 0$. Пусть через поперечное сечение провода течет переменный во времени t электрический ток силой

$$I(t) = I_0 \cos \omega t = \operatorname{Re}(\hat{I} e^{i\omega t}),$$

где I_0 — амплитуда колебаний силы тока; ω — угловая частота колебаний; $\hat{I} = I_0$ — комплексная амплитуда силы тока. Процесс колебания напряженности электрического поля считаем установившимся, т.е. угловая частота колебаний совпадает с угловой частотой колебаний силы тока в проводнике.

Введем цилиндрическую систему координат, так чтобы ось Oz совпадает с осью проводника (рис. 83).

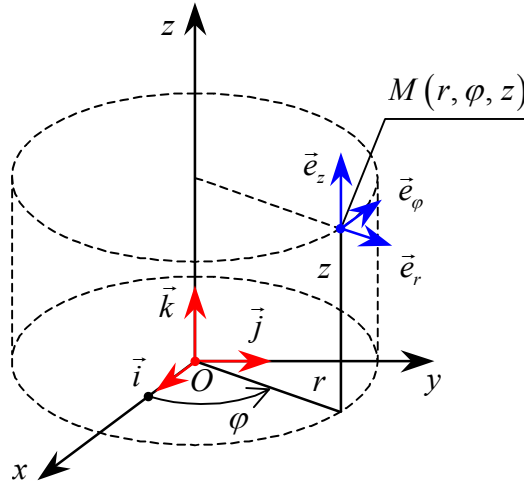


Рис. 83. Цилиндрическая система координат

В силу осевой симметрии проводника и равнозначности любого его поперечного сечения вектор $\vec{E}$ зависит только от времени t и радиальной координаты r . Затем покажем, что этот вектор имеет только одну отличную от нуля проекцию E_z на ось Oz .

Из уравнения (3') при $\rho = 0$ получим

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

В силу независимости проекций вектора $\vec{E}$ от φ и z имеем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) = 0.$$

Тогда $E_r = C(t)/r$, где $C(t)$ — функция, зависящая только от t . Однако модуль вектора $\vec{E}$ ограничен при $r = 0$, следовательно, $C(t) = 0$ и $E_r = 0$. Из постановки задачи следует, что

$$\vec{e}_z \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{e}_z \cdot \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_r & r E_\varphi & E_z \end{vmatrix} = 0,$$

где $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ — единичные базисные векторы цилиндрической системы координат. Тогда

$$\vec{e}_z \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z \right] = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = 0.$$

В силу независимости проекций вектора $\vec{E}$ от φ приходим к равенству

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) = 0.$$

Тогда $E_\varphi = C(t)/r$, где $C(t)$ — функция, зависящая только от t . Однако модуль вектора $\vec{E}$ ограничен при $r = 0$, следовательно, $C(t) = 0$ и $E_\varphi = 0$, что и требовалось показать.

Для отличной от нуля проекции E_z на ось Oz справедливо уравнение (108), которое в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\Delta E_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + b \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z(t, r)}{\partial r} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 E_z(t, r)}{\partial t^2} + b \frac{\partial E_z(t, r)}{\partial t}.$$

Учитывая следующее равенство

$$E_z(t, r) = \frac{j_z(t, r)}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \operatorname{Re}(\hat{j}(r) e^{i\omega t}),$$

приходим к уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \operatorname{Re}(\hat{j}(r) e^{i\omega t})}{\partial r} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \operatorname{Re}(\hat{j}(r) e^{i\omega t})}{\partial t^2} + b \frac{\partial \operatorname{Re}(\hat{j}(r) e^{i\omega t})}{\partial t}.$$

где $\hat{j}(r)$ — зависящая только от r комплексная амплитуда плотности тока.

Линейные операции над действительной или мнимой частью комплексной функции можно заменить этими операциями непосредственно над комплексной функцией с последующим выделением действительной или мнимой части полученного результата. Тогда

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\hat{j}(r)}{dr} \right) = \hat{j}(r) \left(-\frac{\omega^2}{a^2} + i\omega b \right) \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\tilde{j}(\xi)}{d\xi} \right) + h^2 \tilde{j}(\xi) = 0, \quad (109)$$

где $\xi = \frac{r}{r_*}$; $\tilde{j}(\xi) = \frac{\hat{j}(\xi r_*)}{j_0}$; $j_0 = \frac{I_0}{\pi r_*^2}$; $h = r_* \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - i\omega b}$.

Это уравнение можно привести к уравнению Бесселя нулевого порядка (или к уравнению цилиндрических функций нулевого порядка). Общее решение уравнения (109) имеет вид

$$\tilde{j}(\xi) = C_1 J_0(h\xi) + C_2 N_0(h\xi),$$

где J_0 и N_0 — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка; C_1 и C_2 — постоянные величины, подлежащие определению.

В силу ограниченности $|\tilde{j}(\xi)|$ при $\xi = 0$ необходимо положить константу C_2 равной нулю. Константу C_1 находим из условия

$$I(t) = \operatorname{Re}(\hat{I} e^{i\omega t}) = \int_0^{r_*} 2\pi r \operatorname{Re}(\hat{j}(r) e^{i\omega t}) dr.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \int_0^{r_*} 2\pi r \hat{j}(r) dr = 2I_0 \int_0^{r_*} \frac{r}{r_*} \frac{\hat{j}(r)}{j_0} \frac{dr}{r_*} = 2I_0 \int_0^1 \xi C_1 J_0(h\xi) d\xi = \\ &= \frac{2C_1 I_0}{h^2} \int_0^h x J_0(x) dx = \frac{2C_1 I_0}{h^2} [x J_1(x)]_0^h = \frac{2C_1 I_0 J_1(h)}{h},\end{aligned}$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода первого порядка. Тут следует иметь в виду, что в общем случае

$$\frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x),$$

где J_n — функция Бесселя первого рода n -го порядка, а при $n = 1$ справедливо

$$\frac{d}{dx} (x J_1(x)) = x J_0(x).$$

Если через поперечное сечение провода течет переменный во времени t ток силой

$$I(t) = I_0 \cos \omega t = \operatorname{Re}(\hat{I} e^{i\omega t}),$$

то

$$\hat{I} = I_0 = \frac{2C_1 I_0 J_1(h)}{h}.$$

Тогда можно установить, что

$$C_1 = \frac{h}{2J_1(h)}.$$

С учетом найденных значений C_1 и C_2 запишем

$$\tilde{j}(\xi) = \frac{h}{2} \frac{J_0(h\xi)}{J_1(h)}.$$

Следовательно, проекция вектора плотности тока на ось Oz имеет вид

$$j_z(t, r) = \operatorname{Re}(\hat{j}(r) e^{i\omega t}) = j_0 \operatorname{Re}\left(\frac{h}{2} \frac{J_0(hr/r_*)}{J_1(h)} e^{i\omega t}\right).$$

При $\omega \rightarrow +0$ имеем $h = r_* \sqrt{\omega^2 / a^2 - i\omega b} \rightarrow 0$ и, следовательно,

$$J_0(hr/r_*) \rightarrow 1 \quad \text{и} \quad \frac{h^2}{h J_1(h)} \rightarrow 2.$$

Поэтому

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} j_z(t, r) = j_0.$$

Таким образом, в случае постоянного тока силой I_0 его плотность по сечению проводника постоянна и равна j_0 . С увеличением угловой частоты ω , возникает неравномерное распределение плотности в поперечном сечении проводника.

Проекция вектора плотности электрического тока на ось Oz имеет вид

$$\begin{aligned} j_z(t, r) &= \operatorname{Re}(\tilde{j}(r) e^{i\omega t}) = j_0 \operatorname{Re}[(\operatorname{Re} \tilde{j}(r/r_*) + i \operatorname{Im} \tilde{j}(r/r_*))(\cos \omega t + i \sin \omega t)] = \\ &= j_0 (\operatorname{Re} \tilde{j}(r/r_*) \cos \omega t - \operatorname{Im} \tilde{j}(r/r_*) \sin \omega t) = A(r/r_*) \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

где $A(r/r_*) = j_0 \sqrt{(\operatorname{Re} \tilde{j}(r/r_*))^2 + (\operatorname{Im} \tilde{j}(r/r_*))^2} = j_0 |\tilde{j}(r/r_*)|$ — амплитуда колебаний плотности тока; $\omega t + \varphi$ — фаза колебаний, причем

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Re} \tilde{j}(r/r_*)}{-\operatorname{Im} \tilde{j}(r/r_*)} \right).$$

Далее установим зависимость активного сопротивления прямолинейного проводника длиной l с круглым поперечным сечением от угловой частоты колебаний ω переменного тока.

Известно, что при равномерном распределении плотности тока в поперечном сечении проводника площадью S за один период колебаний $T = 2\pi/\omega$ силы переменного тока мощность тепловыделения равна

$$W = \frac{A_0^2}{2} \frac{l}{S\gamma},$$

где A_0 — амплитуда колебаний силы тока; γ — удельная электрическая проводимость. Активное сопротивление прямолинейного проводника длиной l с круглым поперечным сечением радиуса r_* при равномерном распределении плотности тока в поперечном сечении этого проводника находим по формуле

$$R_0 = \frac{l}{S\gamma} = \frac{l}{\pi r_*^2 \gamma}.$$

Рассмотрим изображенный на рис. 84 проводник длиной l , толщина стенки которого равна Δr . При достаточно малом значении Δr можно считать, что плотность тока в поперечном сечении такого проводника распределена равномерно. Следовательно, мощность тепловыделения ΔW за один период колебаний T вычисляем по формуле

$$\Delta W = \frac{A_0^2}{2} \frac{l}{(2\pi r \Delta r) \gamma} = \frac{(2\pi r \Delta r A)^2}{2} \frac{l}{(2\pi r \Delta r) \gamma} = \frac{\pi r l}{\gamma} A^2 \Delta r,$$

где A — амплитуда колебаний плотности тока.

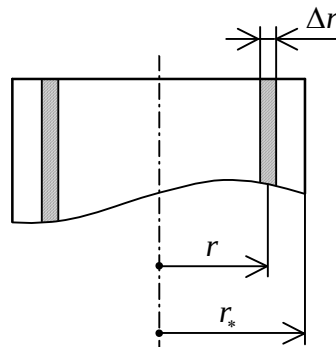


Рис. 84. Прямолинейный проводник длиной l

Следовательно, мощность тепловыделения прямолинейного проводника длиной l с круглым поперечным сечением радиуса r_* при неравномерном распределении плотности тока в поперечном сечении этого проводника равна

$$W = \int_0^{r_*} \frac{\pi r l}{\gamma} [A(r/r_*)]^2 dr = \frac{\pi l}{\gamma} \int_0^{r_*} j_0^2 |\tilde{j}(r/r_*)|^2 r dr \quad \text{или}$$

$$W = \frac{I_0^2}{2} R = \frac{(\pi r_*^2 j_0)^2}{2} R,$$

где R — искомое активное сопротивление проводника. Полученные уравнения позволяют определить отношение R/R_0 . Действительно, из равенства

$$\frac{(\pi r_*^2 j_0)^2}{2} \frac{R}{R_0} = \frac{1}{R_0} \frac{\pi l}{\gamma} \int_0^{r_*} j_0^2 |\tilde{j}(r/r_*)|^2 r dr = \frac{\pi r_*^2 \gamma}{l} \frac{\pi l}{\gamma} \int_0^{r_*} j_0^2 |\tilde{j}(r/r_*)|^2 r dr$$

получим

$$\frac{R}{R_0} = \frac{2}{(\pi r_*^2 j_0)^2} \frac{\pi r_*^2 \gamma}{l} \frac{\pi l}{\gamma} \int_0^{r_*} j_0^2 |\tilde{j}(r/r_*)|^2 r dr = \frac{2}{r_*^2} \int_0^{r_*} |\tilde{j}(r/r_*)|^2 r dr = 2 \int_0^1 |\tilde{j}(\xi)|^2 \xi d\xi.$$

Далее вычислим индуктивность прямолинейного проводника с круглым поперечным сечением при малых значениях ω , пренебрегая током смещения по сравнению с током проводимости. Для этого определим сначала энергию E_1 магнитного поля внутри проводника, а затем энергию E_2 магнитного поля вне проводника. Поскольку энергия E_m магнитного поля проводника индуктивности L равна

$$E_m = L \frac{I^2}{2},$$

то приходим к следующему равенству

$$L = \frac{2}{I^2} E_m = \frac{2}{I^2} (E_1 + E_2).$$

Рассмотрим магнитное поле внутри проводника. С учетом принятых ранее допущений вектор $\vec{H}$ зависит только от времени t и радиальной координаты r . Можно показать, что этот вектор имеет лишь одну отличную от нуля проекцию $H_\varphi(t, r)$. Для нахождения этой проекции используем второе уравнение Максвелла в интегральной форме. Тогда, пренебрегая током смещения по сравнению с током проводимости, запишем

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L H_\varphi(t, r) dl = \int_0^{2\pi} H_\varphi(t, r) r d\varphi = 2\pi r H_\varphi(t, r) = I,$$

где L — замкнутый контур, который расположен в плоскости, перпендикулярной оси симметрии проводника и представляет собой окружность радиуса r с центром на этой оси, причем $0 \leq r \leq r_*$; I — сила тока проводимости через поверхность, натянутую на контур L . Из равенства

$$2\pi r H_\varphi(t, r) = I = \int_0^r 2\pi j_z(t, r) \eta d\eta$$

следует, что

$$H_\varphi(t, r) = \frac{1}{r} \int_0^r j_z(t, \eta) \eta d\eta = \frac{1}{r} \int_0^r \frac{I}{\pi r_*^2} \eta d\eta = \frac{I}{2\pi r_*^2} r,$$

где $0 \leq r \leq r_*$.

Известно, что объемная плотность энергии любого магнитного поля равна

$$e_m = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2,$$

где B и H — модули векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ в рассматриваемой точке магнитного поля. Тогда

$$\begin{aligned} E_1 &= \iiint_V \frac{\mu_0 \mu}{2} H_\varphi^2 dV = \iiint_V \frac{\mu_0 \mu}{2} H_\varphi^2 r dr d\varphi dz = \\ &= 2\pi l \int_0^{r_*} \frac{\mu_0 \mu}{2} \left(\frac{I}{2\pi r_*^2} r \right)^2 r dr = \frac{\mu_0 \mu l}{4\pi r_*^4} I^2 \int_0^{r_*} r^3 dr = \frac{\mu_0 \mu l}{16\pi} I^2, \end{aligned}$$

где V — объем, заключенный внутри проводника.

Для нахождения энергии E_2 магнитного поля вне проводника найдем модуль вектора магнитной индукции в любой точке магнитного поля, создаваемого тонким прямолинейным проводником длиной l , по которому течет постоянный электрический ток силой I (рис. 85).

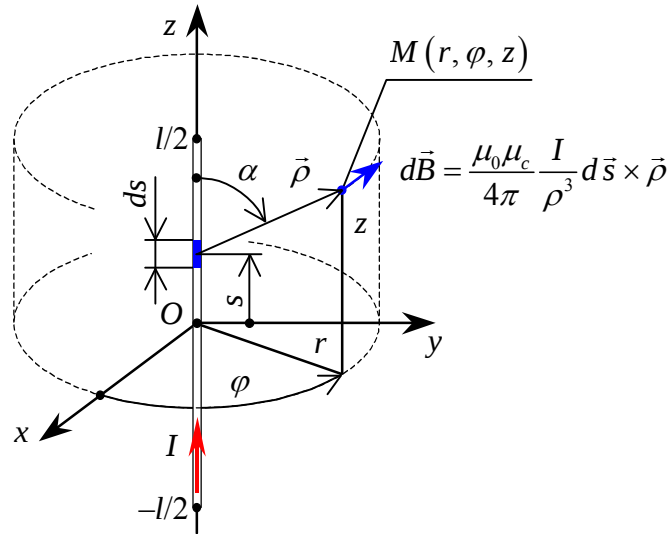


Рис. 85. Иллюстрация к определению модуля вектора магнитной индукции

Согласно закону Био-Савара-Лапласа модуль вектора магнитной индукции в любой точке $M(r, \varphi, z)$ магнитного поля, создаваемого элементом проводника длиной ds , по которому течет электрический ток силой I , вычисляется по формуле

$$dB = \frac{\mu_0 \mu_c}{4\pi} \frac{I}{\rho^2} \sin \alpha ds,$$

где μ_c — относительная магнитная проницаемость среды, окружающей проводник; ρ — модуль вектора $\vec{\rho}$. Учитывая следующие равенства:

$$\rho \sin \alpha = r \text{ и } \rho^2 = r^2 + (z - s)^2,$$

запишем

$$dB = \frac{\mu_0 \mu_c}{4\pi} \frac{I}{(r^2 + (z - s)^2)^{3/2}} r ds.$$

Тогда

$$B(r, z) = \frac{\mu_0 \mu_c}{4\pi} I r \int_{-l/2}^{l/2} \frac{ds}{(r^2 + (z-s)^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \mu_c}{4\pi} I r \int_{-l/2-z}^{l/2-z} \frac{dx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 \mu_c}{4\pi} I r \left(\frac{x}{r^2 \sqrt{x^2 + r^2}} \right) \Big|_{-l/2-z}^{l/2-z} = \frac{\mu_0 \mu_c}{4\pi} \frac{I}{r} \left[\frac{l/2-z}{\sqrt{(l/2-z)^2 + r^2}} + \frac{l/2+z}{\sqrt{(l/2+z)^2 + r^2}} \right].$$

Следовательно, энергия магнитного поля, заключенного в объеме V равна

$$E = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0 \mu_c} dV = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0 \mu_c} r dr d\varphi dz =$$

$$= \iiint_V \frac{\mu_0 \mu_c}{32\pi^2} \frac{I^2}{r} \left[\frac{z+l/2}{\sqrt{(z+l/2)^2 + r^2}} - \frac{z-l/2}{\sqrt{(z-l/2)^2 + r^2}} \right]^2 dr d\varphi dz.$$

Введем новые переменные интегрирования: $\xi = z/l$ и $\eta = r/l$. Тогда, учитывая, что функция в квадратных скобках четная, запишем

$$E = \frac{\mu_0 \mu_c}{32\pi^2} I^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_*}^{+\infty} \frac{l}{r} \frac{dr}{l} 2l \int_0^{+\infty} \left[\frac{z/l+1/2}{\sqrt{(z/l+1/2)^2 + (r/l)^2}} - \frac{z/l-1/2}{\sqrt{(z/l-1/2)^2 + (r/l)^2}} \right]^2 \frac{dz}{l} =$$

$$= \frac{\mu_0 \mu_c l}{8\pi} I^2 \int_{r_*/l}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\xi+1/2}{\sqrt{(\xi+1/2)^2 + \eta^2}} - \frac{\xi-1/2}{\sqrt{(\xi-1/2)^2 + \eta^2}} \right]^2 d\xi = \frac{\mu_0 \mu_c l}{8\pi} I^2 \psi(r_*/l),$$

$$\text{где } \psi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\xi+1/2}{\sqrt{(\xi+1/2)^2 + \eta^2}} - \frac{\xi-1/2}{\sqrt{(\xi-1/2)^2 + \eta^2}} \right]^2 d\xi.$$

Для нахождения значений функции $\psi(x)$ удобно пользоваться графиком этой функции, используя логарифмическую шкалу по оси абсцисс (рис. 86).

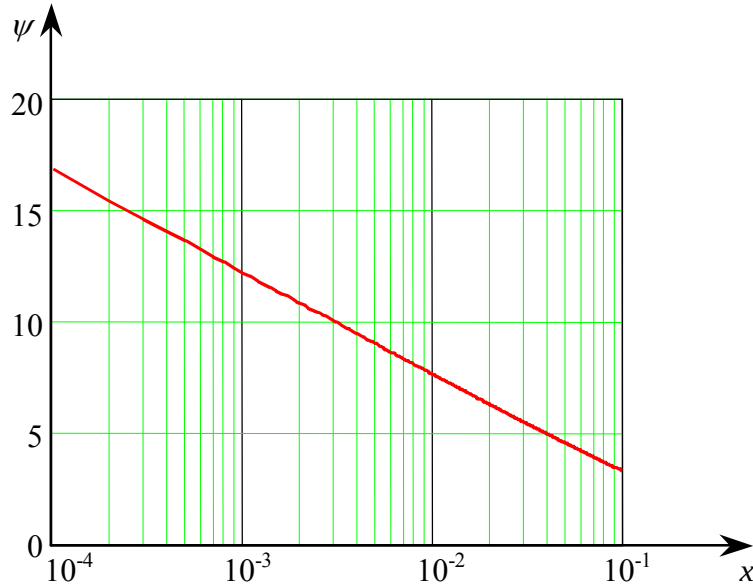


Рис. 86. График функции $\psi(x)$

В рамках квазистационарной модели, которая не учитывает конечную скорость распространения электрических и магнитных полей, можно принять, что

$$E_2 = E = \frac{\mu_0 \mu_c l}{8\pi} I^2 \psi(r_*/l).$$

Поскольку энергия магнитного поля прямолинейного проводника равна

$$E_m = E_1 + E_2 = \frac{\mu_0 \mu l}{16\pi} I^2 + \frac{\mu_0 \mu_c l}{8\pi} I^2 \psi(r_*/l),$$

то индуктивность такого проводника вычислим по формуле

$$L = \frac{2}{I^2} E_m = \frac{2}{I^2} (E_1 + E_2) = \frac{\mu_0 \mu l}{8\pi} + \frac{\mu_0 \mu_c l}{4\pi} \psi(r_*/l).$$

Таким образом, вычислив активное сопротивление R и индуктивность L прямолинейного проводника, комплексное сопротивление этого проводника равно

$$Z = R + i\omega L.$$

Пример 2. Выясним зависимость комплексного сопротивления плоского конденсатора от угловой частоты ω колебаний разности потенциалов $U(t) = U_0 \cos \omega t$ на обкладках конденсатора (рис. 87).

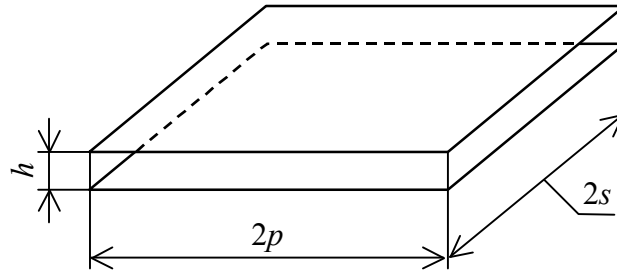


Рис. 87. Схема плоского конденсатора

Примем, что обкладки являются хорошо проводящими длинными параллельными листами шириной $2p$ и длиной $2s$, расположенными с зазором h , причем h намного меньше $2p$. Между обкладками конденсатора расположен слой диэлектрика, материал которого считаем однородным и изотропным, а значения относительных диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостей — постоянными. Удельная электрическая проводимость диэлектрика γ ничтожно мала, и можно принять, что $\gamma = 0$.

Из курса физики известно, что работа, совершенная силами электростатического поля¹ над зарядом q при перемещении его из точки 1 в точку 2, равна

$$A_{12} = \int_{L_{12}} q \vec{E} d\vec{l},$$

где L_{12} — участок кусочно-гладкой кривой с началом в точке 1 и концом в точке 2; $\vec{E}$ — напряженность электростатического поля. Та же работа может быть вычислена по формуле

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU,$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов в начальной и конечной точках. Приравнявая друг к другу правые части этих двух уравнений и сократив на q , получим

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{L_{12}} \vec{E} d\vec{l}.$$

Введем в рассмотрение декартовую прямоугольную систему координат $Oxyz$ (рис. 88).

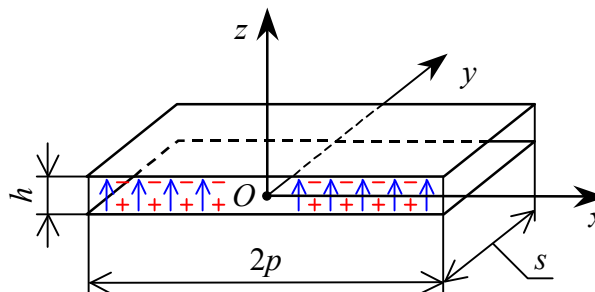


Рис. 88. Расположение декартовой прямоугольной системы координат

¹ Электростатическое поле — стационарное электрическое поле, создаваемое неподвижными зарядами.

При колебаниях разности потенциалов на обкладках конденсатора можно считать, что всюду, кроме небольшой зоны у края обкладок, вектор $\vec{E}$ перпендикулярен обкладкам, причем он не зависит от y , так как длина $2s$ обкладок конденсатора достаточно велика, и при небольшом зазоре h не зависит от z .

Если на обкладках конденсатора поддерживать постоянную разность потенциалов U_0 , то в слое диэлектрика между обкладками возникает электростатическое поле. Тогда проекция вектора $\vec{E}$ на ось Oz равна

$$E_0 = \frac{U_0}{h},$$

здесь учтено, что

$$U_0 = \int_{-h/2}^{h/2} E_0 dz.$$

При колебаниях разности потенциалов на обкладках конденсатора проекция E_z вектора $\vec{E}$ на ось Oz зависит только от времени t и координаты x . Так как удельная электрическая проводимость диэлектрика равна нулю, проекция $E_z(t, x)$ должна удовлетворять волновому уравнению

$$\Delta E_z = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}, \quad (110)$$

где $a = c / \sqrt{\epsilon \mu}$, которое получают из телеграфного уравнения в случае непроводящей среды.

Пусть процесс колебаний напряженности электрического поля является установившимся, т.е.

$$E_z(t, x) = A(x) \cos \omega t, \quad (111)$$

где $A(x)$ — амплитуда гармонических колебаний. Тогда, учитывая зависимость (111), от уравнения (110) приходим к ОДУ второго порядка

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{\omega^2}{a^2} A = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$A(x) = C_1 \sin\left(\frac{\omega x}{a}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\omega x}{a}\right),$$

где C_1 и C_2 — постоянные величины. В силу симметрии относительно координатной плоскости yOz константа C_1 равна нулю. Если $\omega = 0$, то $A = E_0 = U_0 / h$ и, следовательно, $C_2 = U_0 / h$. Тогда приходим к зависимости

$$E_z(t, x) = A(x) \cos \omega t = \frac{U_0}{h} \cos \frac{\omega x}{a} \cos \omega t. \quad (112)$$

Таким образом, если $\omega = 0$, то магнитное поле отсутствует и существует только однородное электростатическое поле. Если $\omega > 0$, то это приводит к возникновению переменного электрического поля, которое порождает магнитное.

Вектор магнитной индукции $\vec{B}$, используемый для характеристики магнитного поля в диэлектрике, не зависит от координат y и z по тем же причинам, по которым вектор $\vec{E}$ не зависит от этих координат. Следовательно, вектор $\vec{B}$ зависит только от времени t и координаты x .

Можно показать, что проекции вектора $\vec{B}$ на оси Ox и Oz введенной декартовой прямоугольной системы координат равны нулю. В этой системе координат первое, второе и четвертое уравнения Максвелла в проекциях на оси координат имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}; \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial E_z}{\partial t}; \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}$$

Учитывая, что проекции векторов $\vec{B}$ и $\vec{E}$ не зависят от y и z , причем проекции вектора $\vec{E}$ на оси Ox и Oy равны нулю, запишем

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0; \quad (113)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial E_z}{\partial t}; \quad (114)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0. \quad (115)$$

Из уравнений (113) и (115) следует, что $B_x = C_1 = const$ и $B_z = C_2 = const$. Значения констант C_1 и C_2 определим при $\omega = 0$. В этом случае $B_x = 0$ и $B_z = 0$, следовательно, $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. Таким образом, вектор магнитной индукции имеет только одну не равную нулю проекцию на ось Oy , что и требовалось показать.

Используя уравнения (112) и (114), можно с точностью до постоянной величины восстановить функцию $B_y(t, x)$. Для этого запишем

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial B_y}{\partial x} dx &= \int \frac{1}{a^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} dx = \frac{1}{a^2} \int -\frac{U_0}{h} \omega \cos\left(\frac{\omega x}{a}\right) \sin \omega t dx = \\ &= -\frac{U_0}{a h} \sin \omega t \int \frac{\omega}{a} \cos\left(\frac{\omega x}{a}\right) dx = -\frac{U_0}{a h} \sin\left(\frac{\omega x}{a}\right) \sin \omega t + \psi(t),\end{aligned}$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, которая зависит только от t . Это означает, что

$$B_y(t, x) = -\frac{U_0}{a h} \sin\left(\frac{\omega x}{a}\right) \sin \omega t + \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — искомая функция, зависящая от t . Тогда справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{U_0}{a h} \sin\left(\frac{\omega x}{a}\right) \sin \omega t + \varphi(t) \right) = -\frac{U_0 \omega}{a h} \sin\left(\frac{\omega x}{a}\right) \cos \omega t + \varphi'(t) \quad \text{и} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{U_0 \omega}{a h} \sin\left(\frac{\omega x}{a}\right) \cos \omega t.\end{aligned}$$

Приравняв друг к другу правые части этих двух равенств, находим, что $\varphi'(t) = 0$. Следовательно, искомая функция не зависит от t и равна постоянной величине C . Из условия равенства нулю проекций вектора магнитной индукции при $\omega = 0$ получим, что $C = 0$. Тогда

$$B_y(t, x) = -\frac{U_0}{a h} \sin\left(\frac{\omega x}{a}\right) \sin \omega t. \quad (116)$$

Затем, используя полученные зависимости (112) и (116), вычислим энергию $E_e(t)$ электрического поля и энергию $E_m(t)$ магнитного поля.

Известно, что объемная плотность энергии любого электрического поля равна

$$e_e = \frac{1}{2} DE = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} E^2,$$

где E и D — модули векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в рассматриваемой точке этого поля. Тогда

$$\begin{aligned} E_e(t) &= \iiint_V \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} E_z^2 dV = \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-s}^s dy \int_{-p}^p \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \frac{U_0^2}{h^2} \cos^2\left(\frac{\omega x}{a}\right) (\cos \omega t)^2 dx = \\ &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \frac{U_0^2}{h} 2s (\cos \omega t)^2 2 \int_0^p \cos^2\left(\frac{\omega x}{a}\right) dx = \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon \frac{2s}{h} (U_0 \cos \omega t)^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{a}{4\omega} \sin\left(\frac{2\omega x}{a}\right) \right) \Big|_0^p = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{s}{h} U^2 \left(p + \frac{a}{2\omega} \sin\left(\frac{2\omega p}{a}\right) \right), \end{aligned}$$

где V — объем, заключенный между обкладками конденсатора; U — разность потенциалов на его обкладках.

Находим объемную плотность энергии магнитного поля по формуле

$$e_m = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2\mu_0 \mu} B^2,$$

где B и H — модули векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ в рассматриваемой точке магнитного поля. Тогда

$$\begin{aligned} E_m(t) &= \iiint_V \frac{1}{2\mu_0 \mu} B_y^2 dV = \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-s}^s dy \int_{-p}^p \frac{1}{2\mu_0 \mu} \frac{U_0^2}{a^2 h^2} \sin^2\left(\frac{\omega x}{a}\right) (\sin \omega t)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2\mu_0 \mu} \frac{2s}{a^2 h} (U_0 \sin \omega t)^2 2 \int_0^p \sin^2\left(\frac{\omega x}{a}\right) dx = \\ &= \frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{2s}{a^2 h} (U_0 \sin \omega t)^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{a}{4\omega} \sin\left(\frac{2\omega x}{a}\right) \right) \Big|_0^p = \frac{1}{\mu_0 \mu} \frac{s}{a^2 h} (U_0 \sin \omega t)^2 \left(p - \frac{a}{2\omega} \sin\left(\frac{2\omega p}{a}\right) \right). \end{aligned}$$

Поскольку энергия электрического поля конденсатора равна

$$E_e = C \frac{U^2}{2},$$

где C — емкость конденсатора, то

$$C = \frac{2}{U^2} E_e = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{2sp}{h} \left(1 + \frac{a}{2\omega p} \sin\left(\frac{2\omega p}{a}\right) \right).$$

Из курса физики известно, что емкость плоского конденсатора, состоящего из двух параллельных пластин, расположенных на расстоянии h друг от друга, равна

$$C_0 = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{h},$$

где $S = 2s \cdot 2p$ — площадь прямоугольной пластины конденсатора. Нетрудно установить, что

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} C(\omega) = C_0.$$

Таким образом, емкость конденсатора зависит от угловой частоты ω колебаний разности потенциалов на его обкладках и ее можно вычислить по следующей формуле:

$$C(\omega) = \frac{C_0}{2} \left(1 + \frac{a}{2\omega p} \sin\left(\frac{2\omega p}{a}\right) \right).$$

Изменение разности потенциалов $U(t)$ приводит к возникновению в цепи, внешней по отношению к конденсатору, переменного тока силой

$$I(t) = C(\omega) \frac{dU}{dt} = -\omega C(\omega) U_0 \sin \omega t.$$

Следовательно, через конденсатор протекает полный ток силой $I(t)$, а наличие магнитного поля в диэлектрике означает, что конденсатор обладает некоторой индуктивностью L , причем:

$$E_m = L \frac{I^2}{2},$$

где I — сила полного тока. Тогда

$$\begin{aligned} L(\omega) &= \frac{2}{I^2} E_m = 2 \frac{\frac{1}{\mu_0 \mu a^2} \frac{sp}{h} (U_0 \sin \omega t)^2 \left(1 - \frac{a}{2\omega p} \sin\left(\frac{2\omega p}{a}\right) \right)}{(-\omega C(\omega) U_0 \sin \omega t)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \frac{4sp}{h} \left(1 - \frac{a}{2\omega p} \sin\left(\frac{2\omega p}{a}\right) \right)}{\left[\omega \frac{C_0}{2} \left(1 + \frac{a}{2\omega p} \sin\left(\frac{2\omega p}{a}\right) \right) \right]^2} = \frac{2}{\omega^2 C_0} \frac{1 - \frac{a}{2\omega p} \sin\left(\frac{2\omega p}{a}\right)}{\left(1 + \frac{a}{2\omega p} \sin\left(\frac{2\omega p}{a}\right) \right)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, комплексное сопротивление рассматриваемого конденсатора равно

$$Z(\omega) = i\omega L(\omega) - i \frac{1}{\omega C(\omega)} = i \left(\omega L(\omega) - \frac{1}{\omega C(\omega)} \right).$$

6.2. Одномерные математические модели теплопроводности

Математическое моделирование процессов теплопроводности в элементах конструкций и техническом оборудовании широко применяют при проектировании и исследовании различных ТО. Построению моделей микроуровня процессов теплопроводности посвящена обширная учебная и научная литература. Рассмотрим характерные примеры построения одномерных стационарных и нестационарных моделей теплопроводности.

6.2.1. Одномерные стационарные модели теплопроводности

Ранее был рассмотрен установившийся процесс теплопроводности в плоской стенке толщиной h (рис. 89). Материал стенки имеет постоянный коэффициент теплопроводности λ , а площадь поверхности стенки равна S .

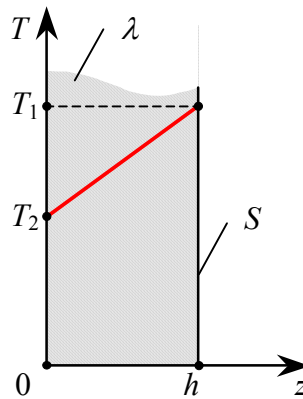


Рис. 89. Расчетная схема плоской стенки

Если на поверхностях стенки заданы постоянные значения температуры T_1 и T_2 , то установившееся распределение температуры по толщине стенки будет линейным:

$$T(z) = T_2 + (T_1 - T_2) \frac{z}{h} = T_2 + \Delta T \frac{z}{h}, \quad (117)$$

где $\Delta T = T_1 - T_2$ — разность (перепад) температур; z — координата, отсчитываемая внутрь стенки от поверхности с температурой T_2 , причем $z \in (0, h)$.

Очевидно, что термическое сопротивление такой стенки равно

$$R_T = \frac{h}{\lambda S}. \quad (118)$$

В конструкции, подверженной тепловому воздействию, часто применяют покрытие из теплоизоляционного материала. Это позволяет решить проблему тепловой защиты поверхности конструкции и поддерживать на этой поверхности допустимую температуру при постоянной величине плотности теплового потока, воспринимаемого конструкцией.

При интенсивном тепловом воздействии повышение термического сопротивления слоя теплоизоляционного материала приводит к возрастанию температуры материала этого слоя, что может привести к разрушению теплозащитного покрытия, например, в результате плавления, сублимации, химического превращения в материале и т.п.

Для решения проблемы тепловой защиты поверхности конструкции при таком интенсивном тепловом воздействии используют пористый теплозащитный материал, через поры которого навстречу тепловому потоку направляют охлажденный газ или жидкость.

Выясним влияние охлаждающей жидкости (или газа) на термическое сопротивление плоского слоя пористого теплозащитного материала толщиной h , на поверхности которого заданы постоянные значения температуры T_1 и T_2 (рис. 90).

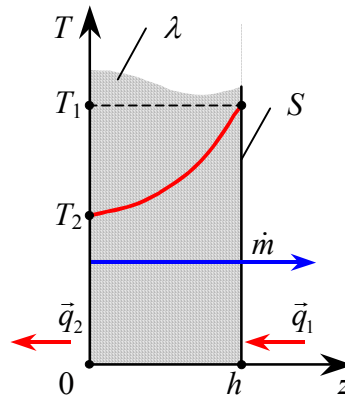


Рис. 90. Расчетная схема пористого теплозащитного слоя

Температуру жидкости при $z = z_*$, где $0 < z_* < h$, можно считать совпадающей с температурой $T(z_*)$ “скелета” пористого теплозащитного материала в силу интенсивного теплообмена жидкости со “скелетом”. Тогда для части слоя пористого теплозащитного материала при установившемся процессе теплообмена справедливо уравнение теплового баланса

$$Sq(z) - Sq_2 = \int_{T_2}^{T(z)} \dot{m} S c(\tau) d\tau,$$

где $q(z)$ — величина плотности теплового потока, соответствующей координате z ; q_2 — величина плотности теплового потока при $z = 0$; $\dot{m}$ — удельный массовый расход жидкости, измеряемый в $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$; $c(T)$ — удельная массовая теплоемкость жидкости, измеряемая в $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$. Левая часть этого уравнения определяет количество тепловой энергии, которую воспринимает материал за единицу времени, а правая часть — количество тепловой энергии, отводимой из материала за единицу времени.

От уравнения теплового баланса переходим к следующему равенству

$$\lambda \frac{dT(z)}{dz} - q_2 = \dot{m} \int_{T_2}^{T(z)} c(\tau) d\tau, \quad (119)$$

где $\lambda = s\lambda_l + (1-s)\lambda_s$ — коэффициент теплопроводности пористого материала, заполненного жидкостью; λ_l и λ_s — коэффициенты теплопроводности жидкости и “скелета” соответственно; s — степень пористости, причем $s \in (0, 1)$.

Из уравнения (119) получим

$$z = \int_{T_2}^{T(z)} \frac{\lambda dT}{q_2 + \dot{m} \int_{T_2}^T c(\tau) d\tau}. \quad (120)$$

Величину q_2 можно найти, используя граничное условие на поверхности $z = h$. На этой поверхности $T(h) = T_1$, следовательно, от уравнения (120) переходим к равенству

$$h = \int_{T_2}^{T_1} \frac{\lambda dT}{q_2 + \dot{m} \int_{T_2}^T c(\tau) d\tau}. \quad (121)$$

Из этого равенства можно определить искомую величину q_2 . Если известна величина q_2 , то можно определить величину плотности теплового потока через поверхность $z = h$ по формуле

$$q_1 = q_2 + \dot{m} \int_{T_2}^{T_1} c(\tau) d\tau. \quad (122)$$

Если λ и c допустимо считать постоянными величинами, то из уравнения (121) следует

$$\begin{aligned} h = \int_{T_2}^{T_1} \frac{\lambda dT}{q_2 + \dot{m} c (T - T_2)} &= \frac{\lambda}{\dot{m} c} \ln [q_2 + \dot{m} c (T - T_2)] \Big|_{T_2}^{T_1} = \\ &= \frac{\lambda}{\dot{m} c} \ln [q_2 + \dot{m} c (T_1 - T_2)] - \frac{\lambda}{\dot{m} c} \ln q_2 = \frac{\lambda}{\dot{m} c} \ln \left[1 + \frac{\dot{m} c (T_1 - T_2)}{q_2} \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$q_2 = \frac{\dot{m} c (T_1 - T_2)}{e^{\alpha h} - 1},$$

где $\alpha = \dot{m} c / \lambda$. Согласно формуле (122) получим

$$q_1 = q_2 + \dot{m} c (T_1 - T_2) = \dot{m} c (T_1 - T_2) \frac{e^{\alpha h}}{e^{\alpha h} - 1}.$$

Затем из уравнения (120) можно установить зависимость температуры от координаты z . Для этого запишем следующее равенство

$$\begin{aligned} z = \int_{T_2}^{T(z)} \frac{\lambda dT}{q_2 + \dot{m} c (T - T_2)} &= \frac{\lambda}{\dot{m} c} \ln [q_2 + \dot{m} c (T - T_2)] \Big|_{T_2}^{T(z)} = \\ &= \frac{\lambda}{\dot{m} c} \ln [q_2 + \dot{m} c (T(z) - T_2)] - \frac{\lambda}{\dot{m} c} \ln q_2 = \frac{\lambda}{\dot{m} c} \ln \left[1 + \frac{\dot{m} c (T(z) - T_2)}{q_2} \right]. \end{aligned}$$

Из этого равенства получим

$$e^{\alpha z} - 1 = \frac{\dot{m} c (T(z) - T_2)}{q_2} = \frac{T(z) - T_2}{T_1 - T_2} (e^{\alpha h} - 1).$$

Таким образом, искомая зависимость имеет вид

$$T(z) = T_2 + (T_1 - T_2) \frac{e^{\alpha z} - 1}{e^{\alpha h} - 1} = T_2 + \Delta T \frac{e^{\alpha z} - 1}{e^{\alpha h} - 1}, \quad (123)$$

где $z \in (0, h)$. Она позволяет установить распределение температуры по толщине плоской пористой теплозащитной стенки. Сравните зависимости (117) и (123).

Определим термическое сопротивление R слоя пористого материала, а затем сравним полученное выражение с термическим сопротивлением R_T , определяемым по формуле (118), что соответствует случаю неподвижной жидкости в пористом материале. Тогда

$$R = \frac{\Delta T}{S q_2} = \frac{T_1 - T_2}{S \dot{m} c (T_1 - T_2)} (e^{\alpha h} - 1) = \frac{e^{\alpha h} - 1}{S \dot{m} c}.$$

Используя это равенство, запишем отношение

$$\frac{R}{R_T} = \frac{e^{\alpha h} - 1}{\alpha h} = \frac{e^{\beta} - 1}{\beta},$$

где $\beta = \alpha h = \dot{m} c h / \lambda$.

Очевидно, что полученное отношение возрастает с ростом параметра β . Обычно параметр β ограничен допустимым значением удельного массового расхода жидкости. Дополнительного эффекта можно добиться путем выбора такого режима, когда происходит испа-

рение жидкости внутри слоя пористого материала, при этом расходуется существенная часть тепловой энергии, которую воспринимает теплозащитный слой. Это дает возможность увеличить термическое сопротивление пористого теплозащитного слоя, однако не всегда удается стабилизировать положение фронта испарения внутри самого слоя материала.

Такой способ тепловой защиты нашел широкое применение в современной технике. Так, например, из пористого материала выполняют лопатки газовых турбин, сопла реактивных двигателей, камеры сгорания и т.п.

Теперь рассмотрим построение стационарной модели микроуровня процесса теплопроводности в стенке толщиной h , которая в общем случае не является плоской (рис. 91). Пусть на внутренней и внешней поверхностях стенки заданы температуры $T(0) = T_1$ и $T(h) = T_2$ соответственно.

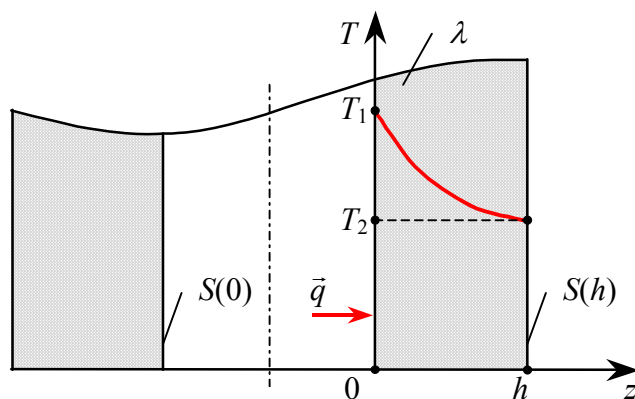


Рис. 91. Расчетная схема цилиндрической стенки

Так как тепловой поток, проходящий через внутреннюю и внешнюю поверхности, одинаков при стационарном процессе теплообмена, то в соответствии с законом теплопроводности Фурье запишем

$$-\lambda(z, T)S(z)\frac{dT(z)}{dz} = qS(0) = Q = const,$$

где $\lambda(z, T)$ — коэффициент теплопроводности материала, который в общем случае зависит координаты z и температуры T ; $S(z)$ — площадь изотермической поверхности, положение которой зависит от координаты z ; q — величина плотности теплового потока, воспринимаемого внутренней поверхностью; Q — величина теплового потока, проходящего через рассматриваемую стенку.

Для неоднородного материала с независимым от температуры коэффициентом теплопроводности найдем

$$T(z) = T_1 - \int_0^z Q \frac{d\xi}{\lambda(\xi)S(\xi)} = T_1 - Q \int_0^z \frac{d\xi}{\lambda(\xi)S(\xi)}.$$

Из граничных условий известны значения T_1 и T_2 на поверхностях стенки, тогда можно вычислить величину Q , а затем найти распределение температуры по толщине слоя материала.

Для однородного материала с зависящим от температуры коэффициентом теплопроводности получим

$$\int_{T_1}^{T(z)} \lambda(\tau) d\tau = -Q \int_0^z \frac{d\xi}{S(\xi)}.$$

Это равенство позволяет установить распределение температуры, если предварительно найти величину Q при помощи граничных условий.

Пусть в материале стенки происходит тепловыделение объемной мощностью $q_V(z, T)$, которое в общем случае зависит от координаты z и температуры T . Внутреннее тепловыделение возникает, например, при поглощении проникающего в материал излучения, при прохождении электрического тока, при ядерных реакциях, фазовых и химических превращениях в материале и т.п.

Объемную мощность тепловыделения за счет поглощения проникающего в слой материала излучения можно вычислить по формуле

$$q_V(z) = kq \frac{S(0)}{S(z)} e^{-kz},$$

где k — показатель поглощения, который зависит от химического состава и состояния материала и от характеристик излучения; q — плотность потока излучения, падающего на внутреннюю поверхность, площадь которой равна $S(0)$.

Если считать распределение температуры в стенке установившимся, то для слоя материала, заключенного между внутренней поверхностью и изотермической поверхностью, задаваемой координатой z , справедливо уравнение теплового баланса

$$-\lambda(z, T) S(z) \frac{dT(z)}{dz} - Q = \int_0^z q_V(\xi, T) S(\xi) d\xi, \quad (124)$$

где $Q = q S(0)$ — величина теплового потока через внутреннюю поверхность стенки.

Для слоя неоднородного материала с независимыми от температуры величинами λ и q_V найдем

$$T(z) = T_1 - \int_0^z \left(Q + \int_0^\eta q_V(\xi) S(\xi) d\xi \right) \frac{d\eta}{\lambda(\eta) S(\eta)},$$

где величину Q можно найти из граничных условий.

Для однородного материала при $\lambda = \lambda(T)$ в случае $q_V = q_V(z)$ получим

$$\int_{T_1}^{T(z)} \lambda(\tau) d\tau = - \int_0^z \left(Q + \int_0^\eta q_V(\xi) S(\xi) d\xi \right) \frac{d\eta}{S(\eta)}.$$

Это равенство позволяет установить распределение температуры, если предварительно при помощи граничных условий найти значение Q .

Если $\lambda = \lambda(T)$ и $q_V = q_V(T)$, то в случае плоской стенки, состоящей из однородного материала, в уравнении теплового баланса можно использовать подстановку

$$p(T) = -\lambda(T) \frac{dT(z)}{dz}.$$

После дифференцирования левой и правой частей уравнения (124) по z получим ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= q_V(T) \quad \text{или} \\ -\lambda(T) \frac{dp}{dz} &= -\lambda(T) q_V(T). \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{dp^2}{dT} = -2q_v(T) \lambda(T),$$

здесь учтено, что

$$-\lambda(T) \frac{dp}{dz} = -\lambda(T) \frac{dp}{dT} \frac{dT}{dz} = p \frac{dp}{dT} = \frac{1}{2} \frac{dp^2}{dT}.$$

Общее решение ОДУ с разделяющимися переменными имеет вид

$$p(T) = -\lambda(T) \frac{dT}{dz} = \pm \sqrt{C_1 - 2 \int_{T_1}^T q_v(\tau) \lambda(\tau) d\tau},$$

где C_1 — постоянная величина, а выбор знака в правой части уравнения зависит от направления вектора теплового потока, т.е. при совпадении направления вектора теплового потока с направлением оси Oz выбираем знак плюс, в противном случае — минус. Затем приходим к следующему равенству

$$z = C_2 \mp \int_{T_1}^{T(z)} \frac{\lambda(T) dT}{\sqrt{C_1 - 2 \int_{T_1}^T q_v(\tau) \lambda(\tau) d\tau}}, \quad (125)$$

где $C_2 = 0$, так как $T(0) = T_1$, а величину C_1 находим с помощью граничного условия $T(h) = T_2$.

Полученное равенство (125) позволяет определить распределение температуры при граничных условиях первого рода. Однако приведенные выше результаты можно использовать для нахождения распределения температуры и при других граничных условиях.

Замечание. Уравнение теплового баланса (124) справедливо в случае установившегося процесса теплообмена. При возбуждении некоторых химических реакций скорость тепловыделения в объеме вещества может быть такой, что тепловая энергия уже не может быть отведена путем теплопроводности. Это явление получило название *теплового взрыва*.

Иногда условие возникновения теплового взрыва можно сформулировать в виде неравенства, в которое входят параметры, характеризующие химическую реакцию, теплофизические свойства материала; параметры, определяющие формы и размеры тела, а также параметры, характеризующие условия теплообмена.

Исследование таких процессов и формирование условий возникновения теплового взрыва приводит обычно к необходимости рассмотрения достаточно сложных нестационарных ММ.

6.2.2. Одномерные нестационарные модели теплопроводности

Рассмотрим одномерные ММ микроуровня применительно к нестационарным процессам теплопроводности.

Пример 1. Пусть плоская стенка толщиной h разделяет две среды с неизменяемыми температурами T_1 и T_2 (рис. 92). На поверхностях стенки происходит конвективный теплообмен, характеризуемый коэффициентами теплоотдачи α_1 и α_2 . Кроме того, поверхности стенки воспринимают от источников излучения тепловые потоки, плотности которых q_1^* и q_2^* постоянны.

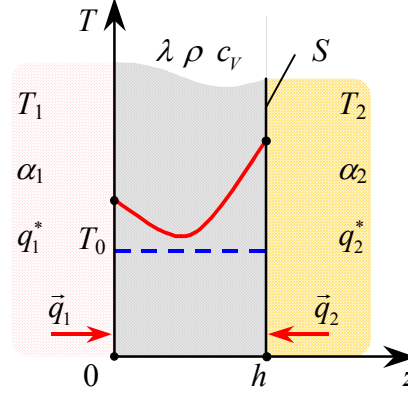


Рис. 92. Расчетная схема плоской стенки

При постоянных значениях плотности ρ , удельной теплоемкости c_V и коэффициента теплопроводности λ функция $T(t, z)$, определяющая распределение температуры в материале плоской стенки, должна удовлетворять одномерному уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad t > 0, \quad z \in (0, h), \quad (126)$$

где $a^2 = \lambda / (\rho c_V)$ — коэффициент температуропроводности (при изохорическом процессе), и граничным условиям:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(t, 0) = \alpha_1 (T_1 - T(t, 0)) + q_1^*, \quad t > 0 \quad (127)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(t, h) = \alpha_2 (T_2 - T(t, h)) + q_2^*, \quad t > 0. \quad (128)$$

В момент времени $t = 0$, принятый за начальный, считаем, что

$$T(0, z) = T_0 = \text{const}, \quad z \in [0, h]. \quad (129)$$

Затем введем следующие безразмерные параметры:

$$\theta(\tau, \xi) = \frac{T(t, z) - T_0}{T_2^* - T_0}, \quad \theta_i = \frac{T_i^* - T_0}{T_2^* - T_0},$$

где $\tau = a^2 t / h^2$ — число Фурье; $\xi = z / h$ — безразмерная координата; $T_i^* = T_i + q_i^* / \alpha_i$, $i = 1, 2$.

К безразмерным параметрам добавим величины

$$b_i = \frac{\frac{h}{\lambda S}}{\frac{1}{\alpha_i S}} = \frac{\alpha_i h}{\lambda},$$

где $i = 1, 2$. Величина b_i является числом Био и равна отношению термического сопротивления стенки к термическому сопротивлению теплоотдачи на соответствующей поверхности стенки.

Тогда уравнения (126) – (129) запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}, \quad \tau > 0, \quad \xi \in (0, 1); \quad (130)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\tau, 0) = b_1 (\theta(\tau, 0) - \theta_1), \quad \tau > 0; \quad (131)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\tau, 1) = b_2 (\theta_2 - \theta(\tau, 1)), \quad \tau > 0; \quad (132)$$

$$\theta(0, \xi) = 0, \quad \xi \in [0, 1]. \quad (133)$$

Для решения сформулированной краевой задачи используем преобразование Лапласа по переменной τ . Тогда изображение оригинала $\theta(\tau, \xi)$ по переменной τ имеет вид

$$\vartheta(p, \xi) = \int_0^{+\infty} \theta(\tau, \xi) e^{-p\tau} d\tau,$$

где p — комплексный параметр.

Применив преобразование Лапласа с учетом теоремы о дифференцировании оригинала, из уравнений (130) – (133) при фиксированном значении параметра p получим краевую задачу для ОДУ второго порядка:

$$\frac{d^2 \vartheta}{d\xi^2} - p\vartheta = 0, \quad \xi \in (0, 1); \quad (134)$$

$$\frac{d\vartheta}{d\xi}(p, 0) = b_1 \left(\vartheta(p, 0) - \frac{\theta_1}{p} \right), \quad (135)$$

$$\frac{d\vartheta}{d\xi}(p, 1) = b_2 \left(\frac{\theta_2}{p} - \vartheta(p, 1) \right). \quad (136)$$

Общее решение однородного ОДУ (134) имеет вид:

$$\vartheta(p, \xi) = C_1 \operatorname{sh} \sqrt{p} \xi + C_2 \operatorname{ch} \sqrt{p} \xi.$$

Затем, используя краевые условия (135) и (136), найдем постоянные C_1 и C_2 . Тогда из уравнений (135) и (136) получим

$$\begin{aligned} C_1 \sqrt{p} \operatorname{ch} 0 + C_2 \sqrt{p} \operatorname{sh} 0 &= b_1 \left(C_1 \operatorname{sh} 0 + C_2 \operatorname{ch} 0 - \frac{\theta_1}{p} \right), \\ C_1 \sqrt{p} \operatorname{ch} \sqrt{p} + C_2 \sqrt{p} \operatorname{sh} \sqrt{p} &= b_2 \left(\frac{\theta_2}{p} - C_1 \operatorname{sh} \sqrt{p} - C_2 \operatorname{ch} \sqrt{p} \right). \end{aligned}$$

Это позволяет составить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \sqrt{p} C_1 - b_1 C_2 &= -b_1 \frac{\theta_1}{p}, \\ (\sqrt{p} \operatorname{ch} \sqrt{p} + b_2 \operatorname{sh} \sqrt{p}) C_1 + (\sqrt{p} \operatorname{sh} \sqrt{p} + b_2 \operatorname{ch} \sqrt{p}) C_2 &= b_2 \frac{\theta_2}{p}. \end{aligned}$$

Решая СЛАУ, получим

$$C_1 = b_1 \frac{b_2 \theta_2 - (\sqrt{p} \operatorname{sh} \sqrt{p} + b_2 \operatorname{ch} \sqrt{p}) \theta_1}{p Z(p) \sqrt{p}},$$

$$C_2 = \frac{\theta_1}{p} + \frac{b_2 \theta_2 - (\sqrt{p} \operatorname{sh} \sqrt{p} + b_2 \operatorname{ch} \sqrt{p}) \theta_1}{p Z(p)} = \frac{b_2 \theta_2 + b_1 \theta_1 \left(\operatorname{ch} \sqrt{p} + \frac{b_2}{\sqrt{p}} \operatorname{sh} \sqrt{p} \right)}{p Z(p)},$$

где $Z(p) = (b_1 + b_2) \operatorname{ch} \sqrt{p} + \left(\frac{b_1 b_2}{\sqrt{p}} + \sqrt{p} \right) \operatorname{sh} \sqrt{p}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(p, \xi) &= b_1 \frac{b_2 \theta_2 - (\sqrt{p} \operatorname{sh} \sqrt{p} + b_2 \operatorname{ch} \sqrt{p}) \theta_1}{p Z(p)} \cdot \frac{\operatorname{sh} \sqrt{p} \xi}{\sqrt{p}} + \frac{b_2 \theta_2 + b_1 \theta_1 \left(\operatorname{ch} \sqrt{p} + \frac{b_2}{\sqrt{p}} \operatorname{sh} \sqrt{p} \right)}{p Z(p)} \operatorname{ch} \sqrt{p} \xi = \\ &= \frac{b_1 \theta_1 \operatorname{ch} \sqrt{p} (1 - \xi) + b_2 \theta_2 \operatorname{ch} \sqrt{p} \xi + \frac{b_1 b_2}{\sqrt{p}} (\theta_1 \operatorname{sh} \sqrt{p} (1 - \xi) + \theta_2 \operatorname{sh} \sqrt{p} \xi)}{p Z(p)}. \end{aligned}$$

Если

$$\begin{aligned} \varphi(p, \xi) &= b_1 \theta_1 \operatorname{ch} \sqrt{p} (1 - \xi) + b_2 \theta_2 \operatorname{ch} \sqrt{p} \xi + \frac{b_1 b_2}{\sqrt{p}} (\theta_1 \operatorname{sh} \sqrt{p} (1 - \xi) + \theta_2 \operatorname{sh} \sqrt{p} \xi) \quad \text{и} \\ \psi(p) &= p Z(p), \end{aligned}$$

то изображение оригинала $\theta(\tau, \xi)$ по переменной τ имеет вид

$$\mathcal{G}(p, \xi) = \frac{\varphi(p, \xi)}{\psi(p)}.$$

Для отыскания оригинала функции $\mathcal{G}(p, \xi)$ используем третью теорему разложения. Тогда необходимо предварительно найти все особые точки функции

$$\mathcal{G}(p, \xi) e^{p\tau} = \frac{\varphi(p, \xi)}{\psi(p)} e^{p\tau}.$$

Особыми точками являются нули функции $\psi(p)$:

$$p_0, p_1, \dots, p_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $p_0 = 0$; p_n — корни уравнения $Z(p) = 0$. Выделяя однозначную ветвь многозначной функции $\sqrt{p}$, запишем

$$\sqrt{p} = \nu + i\mu,$$

где ν и μ — действительные числа. Можно доказать, что уравнение $Z(p) = 0$ имеет корни тогда и только тогда, когда $\nu = 0$. Поэтому принимаем следующее равенство

$$\sqrt{p} = i\mu.$$

Это равенство позволяет записать уравнение $Z(p) = 0$ в виде:

$$(b_1 + b_2) \frac{\operatorname{ch} i\mu}{2} = -i \left(\frac{b_1 b_2}{i\mu} + i\mu \right) \frac{\operatorname{sh} i\mu}{2i} \quad \text{или} \quad (b_1 + b_2) \cos \mu = \left(\mu - \frac{b_1 b_2}{\mu} \right) \sin \mu.$$

Тогда приходим к трансцендентному уравнению

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu - \frac{b_1 b_2}{\mu}}{b_1 + b_2}.$$

Из рис. 93 видно, что полученное уравнение при $\mu > 0$ имеет счетное множество простых корней:

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n,$$

где $n \in \mathbb{N}$.

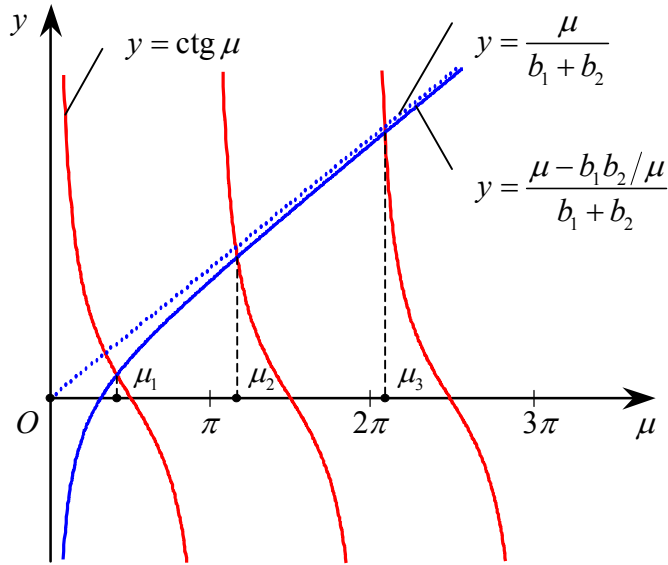


Рис. 93. Иллюстрация к нахождению корней трансцендентного уравнения

Функции в обеих частях трансцендентного уравнения нечетные, следовательно,

$$-\mu_1, -\mu_2, \dots, -\mu_n,$$

где $n \in \mathbb{N}$, являются также корнями уравнения, но это не изменит значения p_n , так как

$$p_n = -\mu_n^2,$$

где $n \in \mathbb{N}$. Можно показать, что $p_0, p_1, \dots, p_n$, где $n \in \mathbb{N}$, являются простыми нулями функции $\psi(p)$ и простыми полюсами функции

$$\mathcal{G}(p, \xi) e^{p\tau} = \frac{\varphi(p, \xi)}{\psi(p)} e^{p\tau}.$$

Тогда согласно третьей теореме разложения имеем

$$\theta(\tau, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}_{p=p_n} [\mathcal{G}(p, \xi) e^{p\tau}].$$

Для нахождения вычетов в каждом простом полюсе воспользуемся формулой:

$$\text{Res}_{p=p_n} [\mathcal{G}(p, \xi) e^{p\tau}] = \text{Res}_{p=p_n} \left[\frac{\varphi(p, \xi) e^{p\tau}}{\psi(p)} \right] = \frac{\varphi(p_n, \xi)}{\psi'(p_n)} e^{p_n \tau},$$

где $\varphi(p, \xi) e^{p\tau}$ и $\psi(p)$ — функции, аналитические в окрестности точек $p = p_n$ и удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} \varphi(p_n, \xi) e^{p_n \tau} &\neq 0, \\ \psi(p_n) &= 0 \text{ и } \psi'(p_n) \neq 0. \end{aligned}$$

Несложно проверить, что в данном случае все эти условия выполнены. Тогда

$$\theta(\tau, \xi) = \frac{\theta_1/b_2 + \theta_2/b_1 + \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1)\xi}{1 + 1/b_1 + 1/b_2} - \sum_{n=1}^{\infty} L_n \left[b_1 \theta_1 \cos \mu_n (1 - \xi) + b_2 \theta_2 \cos \mu_n \xi + \right. \quad (137)$$

$$\left. + \frac{b_1 b_2}{\mu_n} (\theta_1 \sin \mu_n (1 - \xi) + \theta_2 \sin \mu_n \xi) \right] e^{-\mu_n^2 \tau},$$

$$\text{где } L_n = \frac{2 \sin \mu_n}{(b_1 + b_2)(\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n) + 2b_1 b_2 \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n}}.$$

Таким образом, получено решение, к которому также можно прийти, используя метод разделения переменных, разработанный Фурье.

К рассмотренной ММ может быть сведена модель процесса теплопроводности в двухслойной плоской стенке при неидеальном тепловом контакте между слоями (рис. 94).

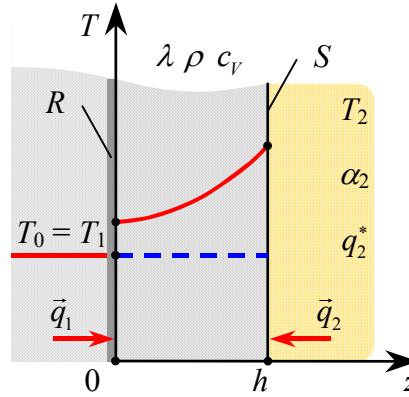


Рис. 94. Расчетная схема двухслойной плоской стенки

Пример 2. Пусть температуру T_1 первого слоя стенки поддерживают неизменной, равной начальной температуре T_0 конструкции. Тепловой контакт между слоями считаем неидеальным и обладающим термическим сопротивлением

$$R = \frac{1}{\alpha_1 S},$$

где α_1 — коэффициент контактного теплообмена. На поверхности второго слоя происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой постоянна и равна T_2 , коэффициент теплоотдачи равен α_2 . Эта поверхность воспринимает от источника излучения тепловой поток, величина плотности которого постоянна и равна q_2^* .

При постоянных значениях плотности ρ , удельной теплоемкости c_v и коэффициента теплопроводности λ вместо уравнений (126) – (129) запишем

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad t > 0, \quad z \in (0, h);$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(t, 0) = \alpha_1 (T_0 - T(t, 0)), \quad t > 0;$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(t, h) = \alpha_2 (T_2 - T(t, h)) + q_2^*, \quad t > 0;$$

$$T(0, z) = T_0 = T_1 = \text{const}, \quad z \in [0, h].$$

Применяя введенные ранее безразмерные комбинации, приходим к уравнениям (130) – (133), где $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = 1$. Тогда, используя формулу (137), решение сформулированной краевой задачи для уравнения теплопроводности можно представить в следующем виде:

$$\theta(\tau, \xi) = \frac{1/b_1 + \xi}{1 + 1/b_1 + 1/b_2} - \sum_{n=1}^{\infty} L_n \left[b_2 \cos \mu_n \xi + \frac{b_1 b_2}{\mu_n} \sin \mu_n \xi \right] e^{-\mu_n^2 \tau}. \quad (138)$$

Величина μ_n^2 , входящая сомножителем в показатель экспоненты в формулах (137) и (138), быстро возрастает с увеличением номера n . Следовательно, начиная с некоторого значения τ_1 , с заданной точностью можно пренебречь всеми членами ряда, кроме первого.

Этап нестационарного процесса теплопроводности, описываемого при $\tau \geq \tau_1$ зависимостями вида (137) и (138), в которых удержан лишь первый член ряда, называют *этапом регулярного нагрева*. Нестационарный процесс теплопроводности при $\tau < \tau_1$ называют *этапом начального нагрева*.

При достаточно больших значениях $\tau \geq \text{Fo}_{\infty}$ распределение температуры уже перестает существенно отличаться от установившегося. В примере 1 установившееся распределение температуры по толщине стенки определяет первое слагаемое в правой части уравнения (137), а в примере 2 установившееся распределение температуры по толщине второго слоя стенки описывает первое слагаемое в правой части уравнения (138).

Таким образом, при $\tau = \text{Fo}_{\infty}$ процесс теплопроводности можно считать установившимся. Учитывая, что в этом случае реализуется этап регулярного нагрева, значение Fo_{∞} определяют по значению μ_1 и заданному наибольшему отклонению распределения температуры от установившегося распределения.

6.3. Одномерные нестационарные модели гидравлических систем

При движении жидкости по трубопроводу могут возникать изменения давления и массового расхода жидкости в результате срабатывания регулирующих устройств гидравлической системы и работы насоса, нагнетающего жидкость в трубопровод. Для исследования таких процессов используют нестационарные модели микроуровня.

Ограничимся рассмотрением движения жидкости в прямолинейном горизонтальном трубопроводе, считая ее невязкой, но сжимаемой. Всестороннее сжатие жидкости приводит к уменьшению объема жидкости и к возникновению упругих сил, стремящихся вернуть ей первоначальный объем. Величину, численно равную относительному изменению объема при изменении действующего давления на единицу, называют *сжимаемостью*. Величина K , обратная сжимаемости, носит название *модуля объемной упругости*. Если жидкость при давлении p_0 занимает объем V_0 и имеет плотность ρ_0 , то

$$\frac{V_0 - V}{V_0} = \frac{p - p_0}{K} \quad \text{или} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{V}{V_0} = 1 - \frac{p - p_0}{K},$$

где V и ρ — объем и плотность жидкости при давлении равном p . Например, для воды модуль объемной упругости равен 2,1 ГПа при температуре 20°C и давлении 0,1–10 МПа. Тогда плотность ρ жидкости можно вычислить по формуле:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{p - p_0}{K}\right)^{-1}.$$

Учитывая, что существует разложение в ряд

$$(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

который сходится при $-1 < x < 1$, запишем

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{K}\right). \quad (139)$$

В горизонтальном трубопроводе выделим участок длиной dx (рис. 95). Считаем, что давление p , плотность ρ и скорость v жидкости зависят только от времени t и координаты x поперечного сечения.

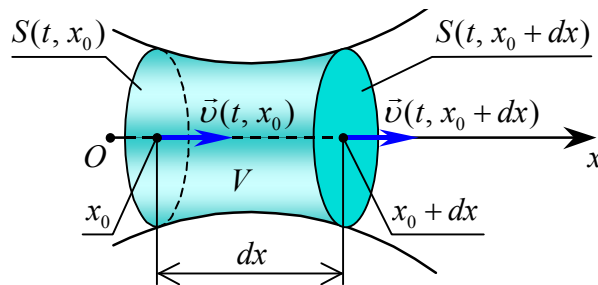


Рис. 95. Участок горизонтального трубопровода

Так как стенки трубопровода могут деформироваться под действием давления, то площадь S поперечного сечения в предположении линейной упругости материала стенок трубопровода можно определить по аналогичной (139) формуле:

$$S = S_0 \left(1 + k \frac{p - p_0}{E}\right), \quad (140)$$

где S_0 — площадь поперечного сечения трубопровода при давлении p_0 ; E — модуль упругости материала стенки; k — коэффициент податливости трубопровода, который зависит от

формы поперечного сечения и толщины стенки. Согласно этому уравнению площадь поперечного сечения S также является функцией t и x .

Для толстостенной цилиндрической трубы с круглым поперечным сечением, которая подвергается действию равномерно распределенных наружного давления p_0 и внутреннего давления p , известна формула для определения радиального перемещения точки такой трубы, расположенной на расстоянии r от оси ее симметрии:

$$u(r) = \frac{1}{E(R_0^2 - R^2)} \left[(1 - \mu)(pR^2 - p_0R_0^2)r + (1 + \mu)(p - p_0)\frac{R^2R_0^2}{r} \right], \quad (141)$$

где R_0 и R — внешний и внутренний радиусы трубы соответственно, причем $R_0 = R + h$, здесь h — толщина стенки трубы; μ — коэффициент Пуассона, причем для различных материалов $0 < \mu < 0,5$. Например, для стали коэффициент Пуассона равен 0,25–0,30, а для ряда других металлов (чугуна, цинка, бронзы, меди) он принимает значения от 0,23 до 0,36.

Если $p = p_0$, то радиальное перемещение точки, расположенной на внутренней поверхности трубы, согласно уравнению (141) равно

$$u_0 = \frac{1}{E(R_0^2 - R^2)} (1 - \mu)(p_0R^2 - p_0R_0^2)R.$$

Тогда приращение внутреннего радиуса при увеличении внутреннего давления на величину $\Delta p = p - p_0$ составит

$$\begin{aligned} \Delta u = u(R) - u_0 &= \frac{1}{E(R_0^2 - R^2)} \left[(1 - \mu)(pR^2 - p_0R_0^2 - p_0R^2 + p_0R_0^2)R + (1 + \mu)(p - p_0)RR_0^2 \right] = \\ &= \frac{(p - p_0)R}{E(R_0^2 - R^2)} \left[(1 - \mu)R^2 + (1 + \mu)R_0^2 \right] = \frac{p - p_0}{E} \left[(1 + \mu)R + \frac{2R^3}{R_0^2 - R^2} \right]. \end{aligned}$$

Если учесть, что $R_0^2 = (R + h)^2$, то

$$\Delta u = \frac{p - p_0}{E} \left((1 + \mu)R + \frac{2R^2}{2h + h^2/R} \right) = \frac{p - p_0}{E} \left((1 + \mu)R + \frac{2R^2/h}{2 + h/R} \right).$$

Увеличение внутреннего давления на $\Delta p = p - p_0$ вызывает изменение площади поперечного сечения трубы на величину

$$\Delta S = \pi(R_* + \Delta u)^2 - \pi R_*^2 = 2\pi R_* \Delta u + \pi(\Delta u)^2,$$

где $R_* = R + u_0$ — внутренний радиус трубы при давлении $p = p_0$. Тогда

$$\frac{S}{S_0} = 1 + \frac{\Delta S}{S_0} = 1 + \frac{2R_* \Delta u + (\Delta u)^2}{R_*^2}.$$

где $S_0 = \pi R_*^2$ — площадь поперечного сечения трубы при давлении $p = p_0$. Считая величины Δu и u_0 достаточно малыми по сравнению с R_* , получим

$$S = S_0 \left[1 + \left(2(1 + \mu) + \frac{2R/h}{1 + h/(2R)} \right) \frac{p - p_0}{E} \right].$$

Затем сравним это уравнение с формулой (140), что позволяет найти коэффициент податливости трубопровода. Тогда запишем

$$k = 2(1 + \mu) + \frac{2R/h}{1 + h/(2R)}.$$

Следовательно, для тонкостенного трубопровода с круглым поперечным сечением справедливо равенство

$$k = \frac{2R}{h},$$

так как h намного меньше R , а $(1 + \mu)$ намного меньше R/h .

Пусть в фиксированный момент времени t в объеме V выделенного участка трубопровода находится масса жидкости $\rho(t, x_0)S(t, x_0)dx$. Согласно закону сохранения массы для рассматриваемого участка трубопровода скорость изменения массы жидкости равна разности массовых расходов через входное и выходное сечения, т.е.

$$\frac{\rho(t + dt, x_0)S(t + dt, x_0) - \rho(t, x_0)S(t, x_0)}{dt}dx = \dot{m}(t, x_0) - \dot{m}(t, x_0 + dx),$$

где $\dot{m}(t, x)$ — массовый расход жидкости в момент времени t через поперечное сечение, соответствующее координате x . Тогда

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t}(t, x_0)dx = -\frac{\partial \dot{m}}{\partial x}(t, x_0)dx,$$

что позволяет записать *уравнение неразрывности*:

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} = -\frac{\partial \dot{m}}{\partial x}. \quad (142)$$

Со стороны входного и выходного поперечных сечений на индивидуальный объем V действуют поверхностные силы, проекция равнодействующей которых на ось Ox равна

$$p(t, x_0)S(t, x_0) - p(t, x_0 + dx)S(t, x_0 + dx) = -\frac{\partial(pS)}{\partial x}(t, x_0)dx.$$

Проекция на ось Ox поверхностной силы со стороны стенок трубопровода равна

$$p(t, x_0)(S(t, x_0 + dx) - S(t, x_0)) = p(t, x_0)\frac{\partial S}{\partial x}(t, x_0)dx.$$

В соответствии с законом сохранения количества движения сумма равнодействующих всех внешних сил, действующих на индивидуальный объем V , равна скорости изменения количества движения жидкости в этом объеме, тогда

$$\left(-\frac{\partial(pS)}{\partial x}(t, x_0) + p(t, x_0)\frac{\partial S}{\partial x}(t, x_0) \right)dx = \frac{d}{dt}(\rho(t, x_0)v(t, x_0)S(t, x_0))dx,$$

где $v(t, x)$ — проекция вектора скорости жидкости на ось Ox в момент времени t в поперечном сечении, которое соответствует координате x . Учитывая, что

$$\frac{d}{dt}(\rho(t, x_0)v(t, x_0)S(t, x_0))dx = \frac{\partial \dot{m}}{\partial t}(t, x_0)dx,$$

запишем

$$\left(-\frac{\partial(pS)}{\partial x}(t, x_0) + p(t, x_0)\frac{\partial S}{\partial x}(t, x_0) \right)dx = \frac{\partial \dot{m}}{\partial t}(t, x_0)dx.$$

Тогда справедливо следующее равенство

$$-\left(S \frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial S}{\partial x} \right) + p \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial \dot{m}}{\partial t}.$$

Таким образом, приходим к уравнению движения:

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial t} = -S \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (143)$$

С учетом уравнений (139) и (140) получим

$$\rho S = \rho_0 S_0 \left(1 + \frac{\Delta p}{K} + k \frac{\Delta p}{E} + k \frac{\Delta p}{E} \frac{\Delta p}{K} \right).$$

Тогда, пренебрегая последним слагаемым в скобках по сравнению с остальными, запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} &= \rho_0 S_0 \left(\frac{1}{K} + \frac{k}{E} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\rho_0 S_0}{K} \left(1 + \frac{kK}{E} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{S_0}{K / \rho_0} \left(1 + \frac{kK}{E} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{или} \\ \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} &= \frac{S_0}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t}, \end{aligned}$$

где $a^2 = a_0^2 / (1 + kK / E)$; $a_0 = \sqrt{K / \rho_0}$ — скорость распространения возмущений (скорость звука) в неограниченном объеме жидкости при давлении p_0 . В трубопроводе при деформировании его стенок скорость звука в жидкости меньше a_0 и равна a .

Если площадь S_0 поперечного сечения или толщина стенок трубопровода изменяются по его длине, то скорость звука a жидкости зависит от координаты x . Тогда уравнение неразрывности (142) запишем в виде

$$\frac{S_0(x)}{a(x)^2} \frac{\partial p}{\partial t}(t, x) = -\frac{\partial \dot{m}}{\partial x}(t, x). \quad (144)$$

Если продифференцировать левую и правую части уравнения (144) по t , а затем продифференцировать левую и правую части уравнения (143) по x , то можно исключить смешанную частную производную и записать

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{a^2}{S_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (145)$$

Аналогичным образом можно получить еще одно уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a^2}{S_0} \frac{\partial \dot{m}}{\partial x} \right). \quad (146)$$

Если трубопровод имеет постоянное поперечное сечение, а стенки трубопровода являются недеформируемыми, то $S(t, x) = S_0 = \text{const}$ и $a = a_0 = \text{const}$. Тогда вместо уравнений (145) – (146) получим одномерные волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (147)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{m}}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \dot{m}}{\partial x^2}. \quad (148)$$

Далее рассмотрим некоторые варианты граничных условий для уравнений (145) – (146) или (147) – (148).

На конце трубопровода в поперечном сечении, соответствующем координате $x = 0$, изменение давления жидкости во времени t задает функция $\varphi(t)$, т.е. $p(t, 0) = \varphi(t)$. В этом случае из уравнения (144) получим

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial x}(t, 0) = -\frac{S_0(0)}{a(0)^2} \varphi'(t).$$

В частном случае при $\varphi(t) = \text{const}$ имеем

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial x}(t, 0) = 0.$$

Если в этом сечении задан массовый расход жидкости, т.е. $\dot{m}(t, 0) = \psi(t)$, то из уравнения (143) следует

$$\frac{\partial p}{\partial x}(t, 0) = -\frac{\psi'(t)}{S(t, 0)}.$$

Если конец трубопровода в поперечном сечении, соответствующем координате $x = 0$, перекрыт, то $\dot{m}(t, 0) = 0$. Тогда в соответствии с уравнением (143) запишем

$$\frac{\partial p}{\partial x}(t, 0) = 0.$$

На конце трубопровода в поперечном сечении $x = l$ может быть установлен демпфер — устройство, в котором объем жидкости изменяется в зависимости от ее давления.

Если изменение объема жидкости в демпфере на величину ΔV происходит за счет упругости стенок демпфера, то, пренебрегая инерцией стенок, можно считать приращение ΔV пропорциональным изменению $\Delta p = p - p_0$ давления жидкости, т. е.

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \chi \frac{\Delta p}{p_0},$$

где V_0 — объем жидкости при давлении p_0 , а χ — безразмерный коэффициент пропорциональности. Тогда с учетом уравнения (144) запишем

$$\frac{dV}{dt} = \chi \frac{V_0}{p_0} \frac{\partial p}{\partial t}(t, l) = -\chi \frac{V_0}{p_0} \frac{a(l)^2}{S_0(l)} \frac{\partial \dot{m}}{\partial x}(t, l).$$

Однако скорость изменения объема жидкости в демпфере равна объемному расходу жидкости через поперечное сечение $x = l$, т.е.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\dot{m}(t, l)}{\rho(t, l)}.$$

Тогда граничное условие имеет вид

$$\frac{\dot{m}(t, l)}{\rho(t, l)} + \chi \frac{V_0}{p_0} \frac{a(l)^2}{S_0(l)} \frac{\partial \dot{m}}{\partial x}(t, l) = 0.$$

Отметим, что при установке демпфера на другом конце трубопровода в поперечном сечении, соответствующем координате $x = 0$, скорость изменения объема жидкости в демпфере равна

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\dot{m}(t, 0)}{\rho(t, 0)},$$

поэтому

$$\frac{\dot{m}(t, 0)}{\rho(t, 0)} - \chi \frac{V_0}{p_0} \frac{a(0)^2}{S_0(0)} \frac{\partial \dot{m}}{\partial x}(t, 0) = 0.$$

Демпфер может представлять собой полость объемом V_D , частично заполненную газом (или воздухом). При повышении давления p жидкости газ сжимается, что приводит к увеличению объема V , занятого жидкостью в таком демпфере.

Связь между величинами V и p зависит от термодинамического процесса сжатия газа. Так, например, при изотермическом процессе имеем

$$p(V_D - V) = p_0(V_D - V_0),$$

где V_0 — объем жидкости в демпфере при давлении p_0 . Тогда справедливо равенство

$$V = -(V_D - V_0) \frac{p_0}{p} + V_D.$$

Следовательно, скорость изменения объема жидкости в демпфере равна

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V_D - V_0}{p_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^2 \frac{dp}{dt}.$$

При установке демпфера на конце трубопровода в поперечном сечении, соответствующем координате $x = l$, учитывая уравнение (144), запишем

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V_D - V_0}{p_0} \left(\frac{p_0}{p(t, l)} \right)^2 \frac{\partial p}{\partial t}(t, l) = - \frac{V_D - V_0}{p_0} \left(\frac{p_0}{p(t, l)} \right)^2 \frac{a(l)^2}{S_0(l)} \frac{\partial \dot{m}}{\partial x}(t, l).$$

Учитывая, что скорость изменения объема жидкости в демпфере равна

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\dot{m}(t, l)}{\rho(t, l)},$$

приходим к уравнению

$$\frac{\dot{m}(t, l)}{\rho(t, l)} + \frac{V_D - V_0}{p_0} \left(\frac{p_0}{p(t, l)} \right)^2 \frac{a(l)^2}{S_0(l)} \frac{\partial \dot{m}}{\partial x}(t, l) = 0.$$

При установке демпфера на другом конце трубопровода в поперечном сечении, соответствующем координате $x = 0$, получим

$$\frac{\dot{m}(t, 0)}{\rho(t, 0)} - \frac{V_D - V_0}{p_0} \left(\frac{p_0}{p(t, 0)} \right)^2 \frac{a(0)^2}{S_0(0)} \frac{\partial \dot{m}}{\partial x}(t, 0) = 0.$$

Замечание 1. В гидравлических системах часто встречаются объединенные в один узел горизонтальные трубопроводы (рис. 96).

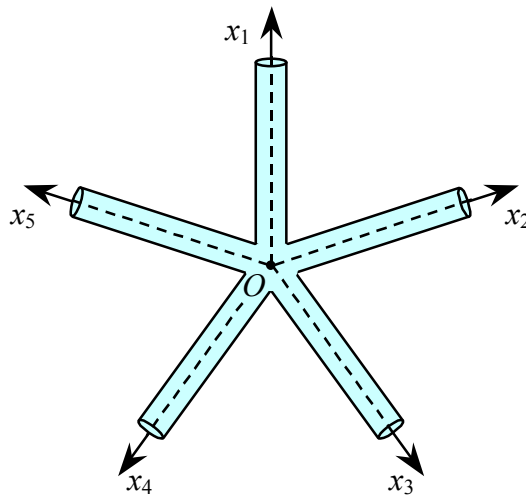


Рис. 96. Объединенные в один узел горизонтальные трубопроводы

Пусть n горизонтальных трубопроводов объединены в один узел, от которого вдоль оси каждого из них отчитывают координаты x_i , где $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда в любой момент времени t давление жидкости при $x_i = 0$ одинаково, т.е.

$$p_1(t, 0) = p_2(t, 0) = \dots = p_n(t, 0),$$

где $p_i(t, x_i)$ — давление жидкости в i -ом трубопроводе, которое зависит от времени t и координаты x_i соответствующего поперечного сечения. Кроме того, при $x_i = 0$ алгебраическая сумма массовых расходов в любой момент времени равна нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^n \dot{m}_i(t, 0) = 0,$$

где $\dot{m}_i(t, x_i)$ — массовый расход жидкости в i -ом трубопроводе в момент времени t через поперечное сечение, определяемое координатой x_i .

Тогда, учитывая уравнения (143) и (144), запишем

$$f_1 \frac{\partial \dot{m}_1}{\partial x_1}(t, 0) = f_2 \frac{\partial \dot{m}_2}{\partial x_2}(t, 0) = \dots = f_n \frac{\partial \dot{m}_n}{\partial x_n}(t, 0) \quad \text{и}$$

$$\sum_{i=1}^n S_i(t, 0) \frac{\partial p_i}{\partial x_i}(t, 0) = 0,$$

где f_i — отношение квадрата скорости звука $a(0)$ в жидкости к площади $S_0(0)$ поперечного сечения i -го трубопровода; $S_i(t, x_i)$ — площадь поперечного сечения i -го трубопровода, определяемого координатой x_i , в момент времени t .

Замечание 2. В большинстве случаев граничные условия на концах трубопровода удастся сформулировать относительно искомой функции $\dot{m}(t, x)$, которая определяет массовый расход жидкости в момент времени t через поперечное сечение, соответствующее координате x . Однако в краевую задачу, например, для уравнения (148) кроме граничных условий должны входить начальные условия. Обычно известны начальные распределения давления и массового расхода жидкости, т.е.

$$p(0, x) = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \dot{m}(0, x) = \psi(x).$$

В этом случае при помощи уравнения (143) можно записать необходимое для завершения математической формулировки краевой задачи начальное условие

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial t}(0, x) = -S(0, x) \varphi'(x).$$

После нахождения $\dot{m}(t, x)$, как правило, несложно установить зависимость $p(t, x)$ давления жидкости от времени t и координаты x .

6.3.1. Пример построения математической модели гидравлической системы

Рассмотрим горизонтальный трубопровод длиной l с постоянной площадью S поперечного сечения. Стенки трубопровода являются недеформируемыми. Следовательно, скорость звука a в жидкости, находящейся в этом трубопроводе, постоянна и равна a_0 . В момент времени $t = 0$ давление и массовый расход жидкости постоянны по длине трубопровода и равны p_0 и $\dot{m}_0$ соответственно.

При $t > 0$ на одном конце трубопровода ($x = 0$) поддерживают постоянное давление p_0 , а другой его конец ($x = l$) перекрывают. В этом случае функция $\dot{m}(t, x)$, определяющая массовый расход жидкости в момент времени t через сечение, соответствующее координате x , должна удовлетворять начальным условиям

$$\dot{m}(0, x) = \dot{m}_0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \dot{m}}{\partial t}(0, x) = 0,$$

а также однородным граничным условиям

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial x}(t, 0) = 0 \quad \text{и} \quad \dot{m}(t, l) = 0.$$

Тогда краевая задача для уравнения, определяющего массовый расход жидкости в трубопроводе, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \dot{m}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \dot{m}}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in (0, l); \quad (149)$$

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad \dot{m}(t, l) = 0, \quad t > 0; \quad (150)$$

$$\dot{m}(0, x) = \varphi(x) = \dot{m}_0, \quad \frac{\partial \dot{m}}{\partial t}(0, x) = \psi(x) = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (151)$$

Для решения этой задачи применим метод разделения переменных (метод Фурье). Согласно этому методу нетривиальное решение уравнения (149) будем искать в виде произведения двух функций $\dot{m}(t, x) = T(t) X(x)$, одна из которых зависит только от переменного t , а другая — только от переменного x . После подстановки этого выражения в уравнение (149) получим:

$$T''(t) X(x) = a^2 T(t) X''(x) \quad \text{или} \\ \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{const} = -\lambda.$$

Последнее равенство справедливо только в том случае, если обе его части не зависят ни от t , ни от x , т.е. являются постоянной величиной, которую обозначили буквой λ со знаком минус. Тогда функции $T(t)$ и $X(x)$ можно определить, решая следующие однородные ОДУ с постоянными коэффициентами:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad \text{и} \\ T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0.$$

Причем для любого $t > 0$ необходимо потребовать выполнения условий $X'(0) = 0$ и $X(l) = 0$, которые следуют из граничных условий (150). Таким образом, для отыскания координатной функции $X(x)$ приходим к следующей краевой задаче:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (152)$$

$$X'(0) = 0 \quad \text{и} \quad X(l) = 0. \quad (153)$$

При $\lambda \leq 0$ эта краевая задача имеет только тривиальное решение $X(x) = 0$. Если $\lambda > 0$, то общее решение уравнения (152) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

При $C_1 \neq 0$ и $C_2 = 0$ решение $X(x)$ удовлетворяет условиям (153), причем $\cos \sqrt{\lambda} l = 0$, последнее справедливо при

$$\sqrt{\lambda} l = \frac{2n-1}{2} \pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, нетривиальное решение уравнения (152) возможно только при значениях

$$\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2l} \pi \right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

которые являются собственными значениями. Соответствующие им нетривиальные решения

$$X_n(x) = \cos \left(\frac{2n-1}{2l} \pi x \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

которые являются собственными функциями краевой задачи (152) – (153) и образуют систему ортогональных функций на отрезке $[0, l]$.

Каждому собственному значению λ_n соответствует функция $T_n(t)$, которую находим из решения уравнения

$$T_n''(t) + \left(\frac{2n-1}{2l} \pi \right)^2 a^2 T_n(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_n(t) = a_n \cos \left(\frac{2n-1}{2l} \pi a t \right) + b_n \sin \left(\frac{2n-1}{2l} \pi a t \right),$$

где a_n и b_n — постоянные величины. При этом каждому n будет отвечать решение $\dot{m}_n(t, x) = T_n(t) X_n(x)$. Их суперпозиция также является решением уравнения (149) и удовлетворяет граничным условиям (150). Итак, суперпозиция всех решений $\dot{m}_n(t, x)$ имеет вид

$$\dot{m}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{2n-1}{2l} \pi a t \right) + b_n \sin \left(\frac{2n-1}{2l} \pi a t \right) \right] \cos \left(\frac{2n-1}{2l} \pi x \right). \quad (154)$$

Подберем постоянные a_n и b_n так, чтобы функция, представленная рядом (154), удовлетворяла начальным условиям (151), т.е.

$$\dot{m}(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left(\frac{2n-1}{2l} \pi x \right) = \varphi(x) = \dot{m}_0,$$

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial t}(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{2n-1}{2l} \pi a \cos \left(\frac{2n-1}{2l} \pi x \right) = \psi(x) = 0.$$

Полученные равенства представляют собой разложение заданных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды Фурье по ортогональной системе тригонометрических функций на интервале $(0, l)$. Коэффициенты полученных разложений являются коэффициентами Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Определяя эти коэффициенты по формулам Эйлера-Фурье, запишем:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \left(\frac{2n-1}{2l} \pi x \right) dx = \frac{2}{l} \int_0^l \dot{m}_0 \cos \left(\frac{2n-1}{2l} \pi x \right) dx,$$

$$b_n \frac{2n-1}{2l} \pi a = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cos \left(\frac{2n-1}{2l} \pi x \right) dx = 0.$$

Тогда

$$a_n = \frac{2\dot{m}_0}{l} \int_0^l \cos\left(\frac{2n-1}{2l}\pi x\right) dx = \frac{4\dot{m}_0}{(2n-1)\pi} \sin\left(\frac{2n-1}{2l}\pi x\right) \Big|_0^l = \frac{4\dot{m}_0}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \quad \text{и} \quad b_n = 0.$$

Следовательно, искомая функция имеет вид:

$$\dot{m}(t, x) = \frac{4\dot{m}_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos\left(\frac{2n-1}{2l}\pi at\right) \cos\left(\frac{2n-1}{2l}\pi x\right).$$

Зависимость давления жидкости от t и x определим при помощи уравнения неразрывности. Для этого, интегрируя левую и правую части уравнения неразрывности, запишем

$$\int_0^l \frac{\partial p}{\partial \tau}(\tau, x) d\tau = -\frac{a^2}{S} \int_0^l \frac{\partial \dot{m}}{\partial x}(\tau, x) d\tau.$$

Затем находим

$$\begin{aligned} p(t, x) &= p_0 + \frac{4\dot{m}_0 a^2}{\pi S} \frac{\pi}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[\int_0^t \cos\left(\frac{2n-1}{2l}\pi a\tau\right) d\tau \right] \sin\left(\frac{2n-1}{2l}\pi x\right) = \\ &= p_0 + \frac{4\dot{m}_0 a}{\pi S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \sin\left(\frac{2n-1}{2l}\pi at\right) \sin\left(\frac{2n-1}{2l}\pi x\right). \end{aligned}$$

Следовательно, давление жидкости в поперечном сечении, соответствующем координате $x = l$, равно

$$p(t, l) = p_0 + \frac{\dot{m}_0 a}{S} \left[\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{2n-1}{2l}\pi at\right) \right]. \quad (155)$$

Можно доказать, что ряд Фурье периодической функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 2k\pi < x < (2k+1)\pi; \\ -1, & (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi, \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{Z}$, имеет вид

$$s(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x.$$

Этот ряд согласно теореме Дирихле сходится для любых значений $x \in \mathbb{R}$, причем

$$s(x) = \begin{cases} f(x), & \text{функция } f(x) \text{ непрерывна в точке } x; \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда уравнение (155) запишем в виде

$$\begin{aligned} p(t, l) &= p_0 + \frac{\dot{m}_0 a}{S} s\left(\frac{\pi at}{2l}\right), \\ s\left(\frac{\pi at}{2l}\right) &= \begin{cases} 1, & 2k\pi < \frac{\pi at}{2l} < (2k+1)\pi; \\ -1, & (2k+1)\pi < \frac{\pi at}{2l} < (2k+2)\pi; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \frac{4kl}{a} < t < \frac{(2k+1)2l}{a}; \\ -1, & \frac{(2k+1)2l}{a} < t < \frac{(2k+2)2l}{a}; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \end{aligned}$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$

Это означает, что при перекрытии трубопровода в поперечном сечении, соответствующем координате $x = l$, давление жидкости скачком возрастает на величину

$$\Delta \tilde{p} = \frac{\dot{m}_0 a}{S}$$

и сохраняет это значение в течение временного интервала Δt , равного времени распространения возмущения от одного конца трубопровода до другого и обратно, т.е. $\Delta t = 2l/a$. Затем давление уменьшается на величину $\Delta \tilde{p}$ и т.д. Полученное приращение давления при гидравлическом ударе согласуется с известной формулой

$$\Delta \tilde{p} = \rho a \tilde{v},$$

где ρ , a — плотность жидкости и скорость звука в поперечном сечении трубопровода перед его перекрытием; $\tilde{v}$ — средняя в поперечном сечении трубопровода скорость течения жидкости перед его перекрытием, т.е.

$$\tilde{v} = \frac{\dot{m}_0}{\rho S}.$$

Для анализа явления гидравлического удара в трубопроводе удобно использовать метод Даламбера. В рассматриваемом частном случае с помощью метода Даламбера можно получить решение, которое описывает распространение возмущений в виде бегущих волн:

$$\dot{m}(t, x) = \frac{\dot{m}_0}{2} [F(x - at) + F(x + at)], \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0. \quad (156)$$

Зависимость давления жидкости от t и x определим также при помощи уравнения неразрывности. Для этого, интегрируя левую и правую части уравнения неразрывности, запишем

$$\int_0^t \frac{\partial p}{\partial \tau}(\tau, x) d\tau = -\frac{a^2}{S} \int_0^t \frac{\partial \dot{m}}{\partial x}(\tau, x) d\tau.$$

Затем находим

$$\begin{aligned} p(t, x) &= p_0 - \frac{a^2}{S} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \dot{m}(\tau, x) d\tau = p_0 - \frac{a^2}{S} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \frac{\dot{m}_0}{2} [F(x - a\tau) + F(x + a\tau)] d\tau = \\ &= p_0 - \frac{a^2 \dot{m}_0}{2S} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^t F(x - a\tau) d\tau + \int_0^t F(x + a\tau) d\tau \right] = \\ &= p_0 - \frac{a^2 \dot{m}_0}{2S} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{1}{a} \int_x^{x-at} F(y) dy + \frac{1}{a} \int_x^{x+at} F(y) dy \right] = p_0 - \frac{a \dot{m}_0}{2S} \frac{\partial}{\partial x} \int_{x-at}^{x+at} F(y) dy = \\ &= p_0 - \frac{a \dot{m}_0}{S} \frac{1}{2} \left[F(x + at) \frac{\partial}{\partial x} (x + at) - F(x - at) \frac{\partial}{\partial x} (x - at) \right] = \\ &= p_0 + \frac{\Delta \tilde{p}}{2} [F(x - at) - F(x + at)]. \end{aligned}$$

Для нахождения функции $F(x)$ применим следующие две леммы о свойствах решения задачи о колебаниях на неограниченной прямой.

Лемма 1. Если начальные распределения в задаче о колебаниях на неограниченной прямой являются четными функциями относительно некоторой точки x_0 , то частная производная по x соответствующего решения в точке (t, x_0) равна нулю.

Лемма 2. Если начальные распределения в задаче о колебаниях на неограниченной прямой являются нечетными функциями относительно некоторой точки x_0 , то соответствующее решение в точке (t, x_0) равно нулю.

Замечание. Формулировку леммы 2 можно ослабить, требуя выполнения условия нечетности начальных распределений за исключением самой точки $x = x_0$.

◀ Действительно, при доказательстве леммы 2 точку x_0 можно принять за начало координат, т.е. $x_0 = 0$. Это позволяет записать условия нечетности начальных распределений $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в более простом виде:

$$\varphi(x) = -\varphi(-x) \text{ и } \psi(x) = -\psi(-x).$$

Известно, что решение $u(t, x)$ задачи о распространении колебаний на неограниченной прямой определяется формулой Даламбера

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

При $x = 0$ и $t > 0$ имеем

$$u(t, 0) = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \left(\int_{-at}^0 \psi(\xi) d\xi + \int_0^{at} \psi(\xi) d\xi \right) = 0.$$

При этом необязательно в точке $x = 0$ требовать выполнения следующих равенств:

$$\varphi(0) = 0 \text{ и } \psi(0) = 0,$$

что и требовалось показать. ▶

Учитывая, что $\dot{m}(0, x) = \dot{m}_0$, где $x \in [0, l]$, получим

$$F(x) = 1, \quad x \in [0, l].$$

Если функция $F(x)$ является четной функцией относительно точки $x = 0$ и нечетной относительно точки $x = l$, причем нечетной за исключением самой точки $x = l$, то решение (156) удовлетворяет граничным условиям (150). Затем, используя метод продолжения, можно построить график искомой функции $F(x)$ (рис. 97).

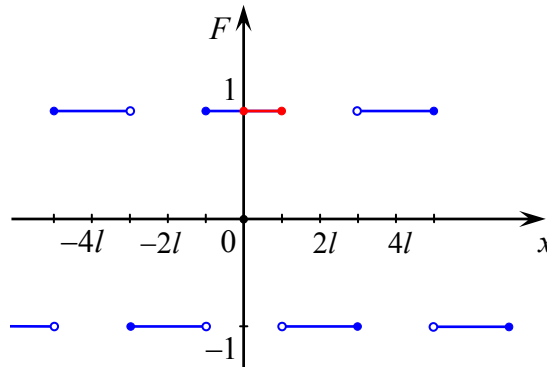


Рис. 97. График функции $F(x)$

Итак, в момент времени $t > 0$ в поперечном сечении $x = l$ трубопровода возникают возмущения значений давления и массового расхода жидкости. Возмущения, равные соответственно $\Delta \tilde{p}$ и $-\dot{m}_0$, начинают распространяться со скоростью a к открытому концу трубопровода.

В момент времени $t = l/a$ возмущения достигают открытого конца трубопровода, при этом по всей длине трубопровода давление равно $p_0 + \Delta \tilde{p}$, а жидкость неподвижна. Но в соответствии с граничным условием в поперечном сечении $x = 0$ давление равно p_0 и не изменяется в течение времени, например, за счет постоянного уровня жидкости в резервуаре, дно которого присоединено к трубопроводу в этом сечении. Это приводит к тому, что в момент

времени $t = l/a$ в данном сечении возникают возмущения давления $p_0 - (p_0 + \Delta\tilde{p}) = -\Delta\tilde{p}$ и массового расхода жидкости $-\dot{m}_0$.

Возмущения достигнут закрытого конца трубопровода в момент времени $t = 2l/a$, при этом давление по всей его длине равно p_0 , а массовый расход жидкости равен $-\dot{m}_0$, т.е. жидкость движется в направлении, противоположном начальному. Но в силу граничного условия $\dot{m}(t, l) = 0$ в этот момент времени при $x = l$ возникают возмущения массового расхода жидкости $0 - (-\dot{m}_0) = \dot{m}_0$ и давления $p_0 - (p_0 + \Delta\tilde{p}) = -\Delta\tilde{p}$.

К моменту времени $t = 3l/a$ возмущения достигнут открытого конца трубопровода. По всей длине трубопровода давление равно $p_0 - \Delta\tilde{p}$, а жидкость неподвижна. В силу граничного условия в поперечном сечении $x = 0$ давление постоянно и равно p_0 , что приводит к возмущениям значений давления $p_0 - (p_0 - \Delta\tilde{p}) = \Delta\tilde{p}$ и массового расхода жидкости $\dot{m}_0$, которые распространяются к закрытому концу трубопровода и достигают его в момент времени $t = 4l/a$. В результате при $t = 4l/a$ по всей длине трубопровода давление и массовый расход жидкости принимают значения p_0 и $\dot{m}_0$ соответственно. В этот момент времени в поперечном сечении $x = l$ снова возникают возмущения давления $\Delta\tilde{p}$ и массового расхода жидкости $-\dot{m}_0$, что приведет к повторению описанного выше процесса.

Отметим, что при отражении возмущений от открытого конца трубопровода возмущение давления изменяет знак, а знак возмущения массового расхода жидкости не изменяется (рис. 98). При отражении возмущений от закрытого конца трубопровода, наоборот, знак возмущения давления не изменяется, а знак возмущения массового расхода жидкости изменяется на противоположный (рис. 99).

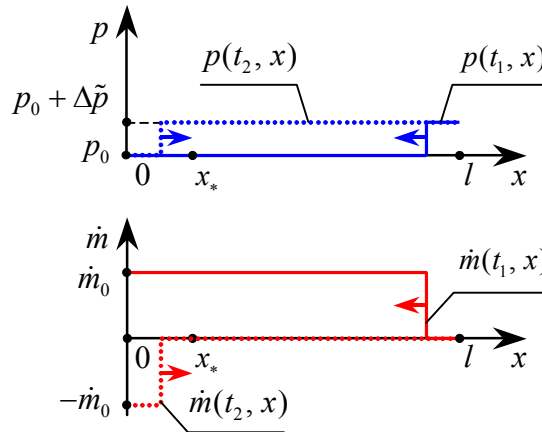


Рис. 98. Распределение давления и массового расхода при $t_1 \in (0, l/a)$ и $t_2 \in (l/a, 2l/a)$

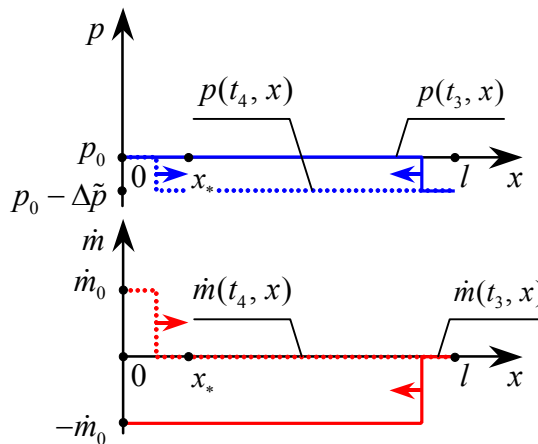


Рис. 99. Распределение давления и массового расхода при $t_3 \in (2l/a, 3l/a)$ и $t_4 \in (3l/a, 4l/a)$

Если рассмотреть некоторое поперечное сечение трубопровода, которое соответствует координате $x_* \in (0, l)$, то значения давления и массового расхода жидкости в этом сечении будут совершать колебания с периодом $T = 4l/a$ (рис. 100).

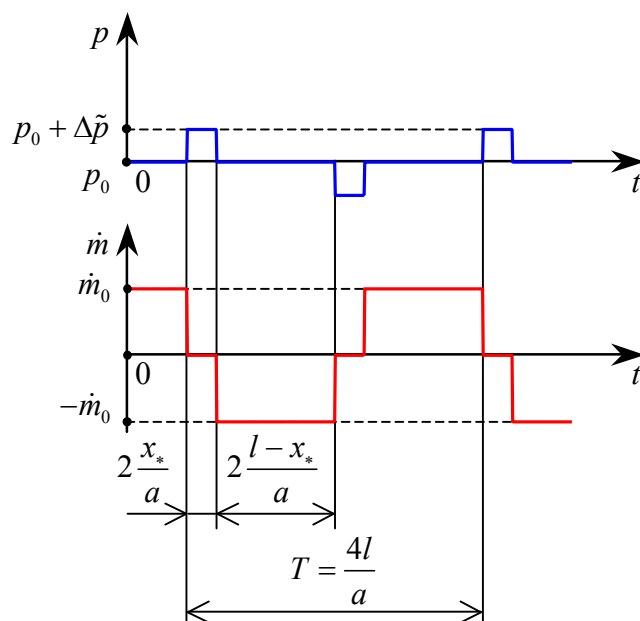


Рис. 100. Изменение давления и массового расхода при $x = x_*$.

Так как реальная жидкость обладает некоторой вязкостью, то эти колебания постепенно затухают, так что давление в трубопроводе с течением времени приближается к значению p_0 , а массовый расход жидкости — к нулю.

Замечание. В момент времени $t \in (2l/a, 3l/a)$ в трубопроводе распространяется волна со скоростью a от закрытого конца трубопровода. Давление жидкости в этой волне равно $p_0 - \Delta\tilde{p}$. Если окажется, что $p_0 - \Delta\tilde{p} \leq p_*$, где p_* — давление насыщенного пара¹ жидкости, то в жидкости начинается процесс образования пузырьков пара.

Так, например, при температуре 60°C давление насыщенного водяного пара равно $0,02$ МПа, а при температуре 100°C давление p_* равно $0,101$ МПа. Средняя плотность образующейся двухфазной смеси уменьшается, что приводит к увеличению давления и последующему схлопыванию пузырьков. Это явление получило название *кавитация* (от латинского слова *cavitas* — пустота). Если такой процесс происходит на поверхности стенок трубопровода, то это приводит к микроразрушению его стенок. Аналогичная ситуация может возникнуть и в случае, когда в жидкости растворен какой-либо газ, например, воздух, что может стать причиной образования двухкомпонентной системы.

Ясно, что рассматриваемая одномерная модель распространения возмущений в жидкости не применима в случае образования многокомпонентных систем.

Рассмотренный выше подход к анализу явления гидравлического удара можно использовать для нахождения распределений давления и массового расхода жидкости по длине трубопровода при постепенном перекрытии поперечного сечения $x = l$.

Если закон изменения во времени t массового расхода жидкости $\dot{m}(t, l)$ приближенно представить в виде ступенчатой зависимости (рис. 101), то при каждом изменении массового расхода жидкости на величину $\Delta\dot{m}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, в трубопроводе возникают возмущения значений давления и массового расхода жидкости, которые со скоростью a распространяются к открытому концу трубопровода.

¹ Насыщенный пар жидкости — пар, находящийся в динамическом равновесии с жидкостью.

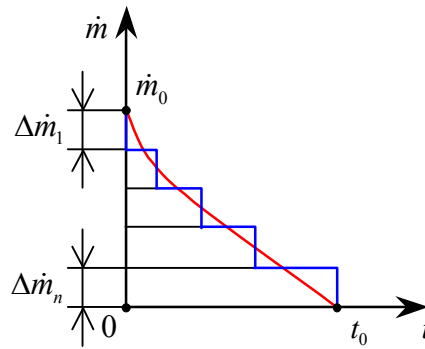


Рис. 101. Изменение массового расхода жидкости в перекрываемом сечении трубопровода

Проследивая последовательно отражения возмущений от концов трубопровода, можно получить приближенную картину изменений давления и массового расхода по длине трубопровода.

Отметим, что при $t_0 > 2l/a$ давление в перекрываемом сечении трубопровода не достигает значения $p_0 + \Delta \tilde{p}$, так как к моменту времени $t = t_0$ полного перекрытия трубопровода к этому поперечному сечению придет отраженная от открытого конца трубопровода волна с отрицательным значением возмущения давления. В связи с этим говорят о *неполном гидравлическом ударе*.

Если трубопровод длинный, т.е. $l > at_0/2$, то можно существенно снизить давление в перекрываемом сечении, установив на расстоянии l_D от этого сечения демпфер, причем l_D намного меньше $at_0/2$. Тогда при перекрытии трубопровода реализуется неполный гидравлический удар. Например, в гидравлической системе подвода воды через плотину к турбинам электростанции роль такого демпфера выполняет уравнительный резервуар.

6.4. Пример использования математических моделей

При решении многих инженерных задач возникает необходимость нахождения максимума или минимума некоторой целевой функции при наличии ограничений. В ряде случаев связь между параметрами, значения которых подлежат оптимизации, устанавливают при использовании ММ микроуровня или макроуровня.

Далее рассмотрим пример использования модели процесса теплопроводности для нахождения оптимальных значений параметров, характеризующих геометрические размеры двухслойной сферической оболочки.

Двухслойная сферическая оболочка нагружена внутренним давлением p_r сильно нагретого газа, который имеет постоянную температуру T_r . Схема двухслойной сферической оболочки представлена на рис. 102.

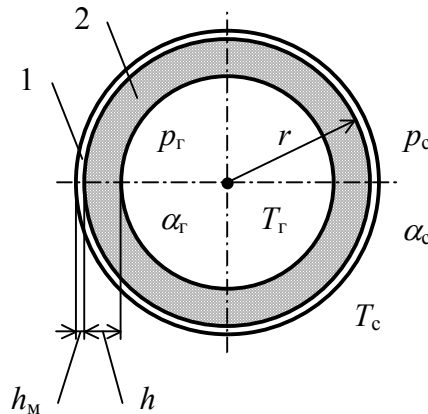


Рис. 102. Расчетная схема двухслойной сферической оболочки: 1 — металлический слой; 2 — теплоизоляционный слой

Интенсивность конвективного теплообмена на внутренней поверхности оболочки характеризуется постоянным коэффициентом теплоотдачи α_r . От непосредственного теплового воздействия со стороны газа металлический слой толщиной h_m защищен теплоизоляционным материалом, толщина которого равна h , причем

$$\frac{h_m + h}{r} \leq 0,01,$$

где r — внутренний радиус металлической оболочки. Тепловой контакт металлического слоя оболочки со слоем теплоизоляционного материала является идеальным. На внешней поверхности двухслойной оболочки происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой постоянна и равна T_c , интенсивность конвективного теплообмена характеризуется постоянным коэффициентом теплоотдачи α_c . Давление окружающей среды равно p_c , которое меньше p_r , а температура конструкции в начальный момент времени равна T_0 , причем $T_0 \leq T_c$.

Предположим, что слой теплоизоляционного материала не несет механическую нагрузку, а ее воспринимает металлическая оболочка, выполненная из материала с высокой теплопроводностью.

Для металлической оболочки вследствие центральной симметрии окружные и меридиональные напряжения равны, т.е. $\sigma_\theta = \sigma_m = \sigma$, и согласно расчету по безмоментной теории, известной из курса сопротивления материалов, имеем

$$\sigma = \frac{p_r - p_c}{2h_m} r.$$

Пусть металлическая оболочка сохраняет работоспособность при условии

$$\sigma \leq [\sigma]_p, \quad (157)$$

где $[\sigma]_p$ — допустимое для материала оболочки напряжение при растяжении.

Уменьшение допустимого напряжения при возрастании температуры характерно для большинства конструкционных материалов. Пусть в окрестности ожидаемого значения температуры оболочки зависимость допустимого напряжения от температуры имеет вид

$$[\sigma]_p = A - B T_m,$$

где A и B — постоянные величины; T_m — температура металлической оболочки.

Ясно, что с ростом температуры T_m для выполнения условия (157) приходится увеличивать толщину h_m , а это ведет к увеличению массы конструкции. Избежать существенного повышения температуры T_m можно за счет увеличения толщины h слоя теплоизоляционного материала, но это также связано с ростом массы конструкции.

При известном значении радиуса r найдем оптимальные значения h_m и h , при которых конструкция имеет минимум массы при сохранении работоспособности.

Вычислим массу конструкции при фиксированном значении радиуса r :

$$m = \frac{4\pi}{3} [(r + h_m)^3 - r^3] \rho_m + \frac{4\pi}{3} [r^3 - (r - h)^3] \rho \approx \frac{4\pi}{3} 3r^2 h_m \rho_m + \frac{4\pi}{3} 3r^2 h \rho = S (h_m \rho_m + h \rho),$$

где ρ_m и ρ — плотность металла и теплоизоляционного материала соответственно; S — площадь внутренней поверхности металлической оболочки.

Пусть масса рассматриваемой конструкции достигает минимума при $h_m = h_m^*$ и $h = h^*$, тогда из необходимого условия существования экстремума функции $m(h_m, h)$ следует, что в точке (h_m^*, h^*) выполняются равенства:

$$dm = 0 \text{ или } \rho_m dh_m + \rho dh = 0, \quad (158)$$

так как функция $m(h_m, h)$ является дифференцируемой функцией в ее области определения.

Сначала рассмотрим установившийся процесс теплопроводности в двухслойной сферической оболочке. В этом случае для описания температурного состояния конструкции необходимо использовать стационарную ММ теплопроводности.

Если справедливо неравенство

$$\frac{h_m + h}{r} \leq 0,01,$$

то РС двухслойной сферической стенки можно заменить схемой двухслойной плоской стенки (рис. 103).

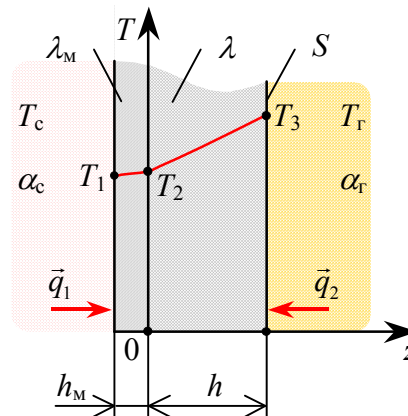


Рис. 103. Расчетная схема двухслойной плоской стенки

Эквивалентную схему рассматриваемой тепловой системы представим в виде электрической цепи, содержащей четыре последовательно соединенных резистора, сопротивления которых численно равны следующим величинам:

$$R_c = \frac{1}{\alpha_c S}, \quad R_m = \frac{h_m}{\lambda_m S}, \quad R = \frac{h}{\lambda S} \quad \text{и} \quad R_r = \frac{1}{\alpha_r S},$$

где λ_m, λ — коэффициенты теплопроводности металла и теплоизоляционного материала. Эквивалентная схема такой тепловой системы изображена на рис. 104.

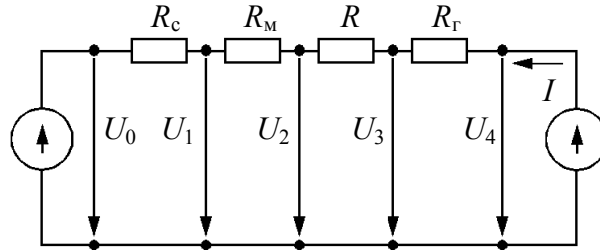


Рис. 104. Эквивалентная схема тепловой системы

В соответствии с законом Ома получим следующие равенства:

$$(R_c + R_m + R + R_r)I = U_4 - U_0;$$

$$(R + R_r)I = U_4 - U_2.$$

Тогда приходим к уравнению:

$$U_4 - U_2 = (U_4 - U_0) \frac{R + R_r}{R_c + R_m + R + R_r},$$

Учитывая, что величины U_0 и U_4 численно равны соответственно значениям T_c и T_r , а величина U_2 численно равна значению температуры T_2 на внутренней поверхности металлической оболочки, запишем

$$T_2 = T_r - (T_r - T_c) \frac{h/\lambda + 1/\alpha_r}{1/\alpha_c + h_m/\lambda_m + h/\lambda + 1/\alpha_r}.$$

Так как металлическая оболочка выполнена из материала, который обладает высокой теплопроводностью, то можно пренебречь слагаемым h_m/λ_m по сравнению с отношением h/λ и характеризовать тепловое состояние металлической оболочки только одним значением температуры

$$T_*(h) = T_r - (T_r - T_c) \frac{h/\lambda + 1/\alpha_r}{1/\alpha_c + h/\lambda + 1/\alpha_r}.$$

Если в формуле (157) заменить неравенство равенством и принять

$$\sigma = \frac{p_r - p_c}{2h_m} r = A - B T_*(h),$$

то можно определить наименьшую толщину металлической оболочки при выполнении условия работоспособности конструкции, т.е.

$$h_m = \frac{r}{2} \frac{p_r - p_c}{A - B T_*(h)}. \quad (159)$$

Отсюда, находим соотношение между дифференциалами dh_m и dh , что в сочетании с уравнением (158) позволяет найти толщину h слоя теплоизоляционного материала. Затем, используя формулу (159), вычисляем толщину h_m металлического слоя.

После того как получены значения h_m и h , необходимо убедиться в справедливости принятых ранее допущений и используемых упрощений. Если это возможно, то и найденные значения можно считать оптимальными.

В случае неустановившегося процесса теплопроводности в конструкции для описания ее температурного состояния необходимо использовать нестационарную ММ теплопроводности.

Если условия теплообмена не изменяются вдоль внешней или внутренней поверхности двухслойной оболочки, то распределение температуры в конструкции зависит лишь от времени t и координаты z , отсчитываемой от поверхности контакта металлической оболочки с теплоизоляционным материалом. Рассматриваемую конструкцию можно также свести к схеме двухслойной плоской стенки (рис. 105).

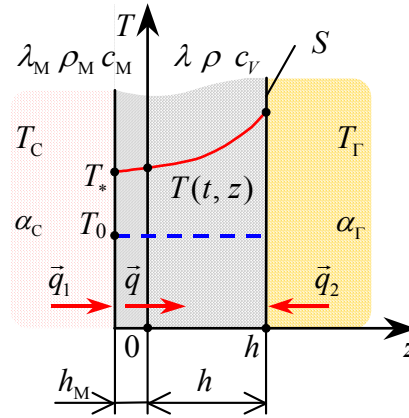


Рис. 105. Расчетная схема двухслойной плоской стенки

Тепловое состояние металлической оболочки по-прежнему можно считать однородным и характеризовать только одним значением температуры $T_*(t)$, которое теперь зависит от времени t .

В случае постоянных значений плотности ρ , удельной теплоемкости c_v и коэффициента теплопроводности λ функция $T(t, z)$, определяющая распределение температуры в теплозащитном слое, должна удовлетворять одномерному уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad t > 0, \quad z \in (0, h), \quad (160)$$

где $a^2 = \lambda / (\rho c_v)$ — коэффициент температуропроводности, и граничным условиям:

$$T(t, 0) = T_*(t), \quad t > 0; \quad (161)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(t, 0) = q, \quad t > 0, \quad (162)$$

где q — проекция вектора плотности теплового потока на ось Oz ;

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(t, h) = \alpha_r (T_r - T(t, h)), \quad t > 0. \quad (163)$$

В качестве начального условия в момент $t = 0$ примем

$$T(0, z) = T_*(0) = T_0 = \text{const}, \quad z \in [0, h]. \quad (164)$$

Рассматривая металлическую оболочку как высокотеплопроводное тело, запишем

$$\frac{C_m}{S} \frac{dT_*}{dt} = \alpha_c (T_c - T_*(t)) - q,$$

где $C_m \approx c_m \rho_m h_m S$ — полная теплоемкость металлической оболочки; c_m — удельная теплоемкость металла (при постоянном объеме); S — площадь внутренней поверхности металлической оболочки.

Затем введем следующие безразмерные параметры:

$$\theta(\tau, \xi) = \frac{T(t, z) - T_0}{T_r - T_0}, \quad \theta_c = \frac{T_c - T_0}{T_r - T_0},$$

где $\tau = a^2 t / h^2$ — число Фурье; $\xi = z / h$ — безразмерная координата. К безразмерным параметрам добавим величины

$$b_c = \frac{\frac{h}{\lambda S}}{\frac{1}{\alpha_c S}} = \frac{\alpha_c h}{\lambda} \quad \text{и} \quad b_r = \frac{\frac{h}{\lambda S}}{\frac{1}{\alpha_r S}} = \frac{\alpha_r h}{\lambda},$$

которые определяют отношения термического сопротивления теплозащитного слоя к термическим сопротивлениям теплопередачи на соответствующих поверхностях двухслойной стенки. Введем безразмерную величину

$$K = \frac{C_m}{h c_v \rho S} = \frac{h_m c_m \rho_m}{h c_v \rho},$$

которая является отношением полных теплоемкостей слоя металла и слоя теплоизоляционного материала.

Тогда уравнения (160) – (164) запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}, \quad \tau > 0, \quad \xi \in (0, 1); \quad (165)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\tau, 0) = K \frac{\partial \theta}{\partial \tau}(\tau, 0) + b_c (\theta(\tau, 0) - \theta_c), \quad \tau > 0; \quad (166)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\tau, 1) = b_r (1 - \theta(\tau, 1)), \quad \tau > 0; \quad (167)$$

$$\theta(0, \xi) = 0, \quad \xi \in [0, 1]. \quad (168)$$

Для решения сформулированной краевой задачи используем преобразование Лапласа по переменной τ . Тогда изображение оригинала $\theta(\tau, \xi)$ по переменной τ имеет вид

$$\mathcal{G}(p, \xi) = \int_0^{+\infty} \theta(\tau, \xi) e^{-p\tau} d\tau,$$

где p — комплексный параметр.

Применив преобразование Лапласа с учетом теоремы о дифференцировании оригинала, из уравнений (165) – (168) при фиксированном значении параметра p получим краевую задачу для ОДУ второго порядка:

$$\frac{d^2 \mathcal{G}}{d\xi^2} - p \mathcal{G} = 0, \quad \xi \in (0, 1);$$

$$\frac{d\mathcal{G}}{d\xi}(p, 0) = Kp \mathcal{G}(p, 0) + b_c \left(\mathcal{G}(p, 0) - \frac{\theta_c}{p} \right),$$

$$\frac{d\mathcal{G}}{d\xi}(p, 1) = b_r \left(\frac{1}{p} - \mathcal{G}(p, 1) \right).$$

Решение этой краевой задачи имеет вид:

$$\mathcal{G}(p, \xi) = \frac{b_c \theta_c \operatorname{ch} \sqrt{p} (1 - \xi) + b_r \operatorname{ch} \sqrt{p} \xi + \frac{b_c b_r}{\sqrt{p}} \theta_c \operatorname{sh} \sqrt{p} (1 - \xi) + \frac{(Kp + b_c) b_r}{\sqrt{p}} \operatorname{sh} \sqrt{p} \xi}{p Z(p)},$$

где $Z(p) = (b_c + b_r + Kp) \operatorname{ch} \sqrt{p} + (b_c b_r + (1 + K b_r) p) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{p}}{\sqrt{p}}$. Если

$$\varphi(p, \xi) = b_c \theta_c \operatorname{ch} \sqrt{p} (1 - \xi) + b_r \operatorname{ch} \sqrt{p} \xi + \frac{b_c b_r}{\sqrt{p}} \theta_c \operatorname{sh} \sqrt{p} (1 - \xi) + \frac{(Kp + b_c) b_r}{\sqrt{p}} \operatorname{sh} \sqrt{p} \xi \quad \text{и}$$

$$\psi(p) = p Z(p),$$

то изображение оригинала $\theta(\tau, \xi)$ по переменной τ имеет вид

$$\mathcal{G}(p, \xi) = \frac{\varphi(p, \xi)}{\psi(p)}.$$

Для отыскания оригинала функции $\mathcal{G}(p, \xi)$ используем третью теорему разложения. Тогда необходимо предварительно найти все особые точки функции

$$\mathcal{G}(p, \xi) e^{p\tau} = \frac{\varphi(p, \xi)}{\psi(p)} e^{p\tau}.$$

Особыми точками являются нули функции $\psi(p)$:

$$p_0, p_1, \dots, p_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $p_0 = 0$; p_n — корни уравнения $Z(p) = 0$. Выделяя однозначную ветвь многозначной функции $\sqrt{p}$, запишем

$$\sqrt{p} = \nu + i\mu,$$

где ν и μ — действительные числа. Можно доказать, что уравнение $Z(p) = 0$ имеет корни тогда и только тогда, когда $\nu = 0$. Поэтому принимаем следующее равенство

$$\sqrt{p} = i\mu.$$

Это равенство позволяет записать уравнение $Z(p) = 0$ в виде:

$$\begin{aligned} (b_c + b_r - K\mu^2) \frac{\operatorname{ch} i\mu}{2} &= -\frac{b_c b_r - (1 + K b_r) \mu^2}{\mu} \frac{\operatorname{sh} i\mu}{2i} \quad \text{или} \\ (b_c + b_r - K\mu^2) \cos \mu &= \frac{(1 + K b_r) \mu^2 - b_c b_r}{\mu} \sin \mu. \end{aligned}$$

Тогда приходим к трансцендентному уравнению

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{(1 + K b_r) \mu^2 - b_c b_r}{\mu (b_c + b_r - K\mu^2)}.$$

Полученное уравнение при $\mu > 0$ имеет счетное множество простых корней:

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n,$$

где $n \in \mathbb{N}$. Функции в обеих частях трансцендентного уравнения нечетные, следовательно,

$$-\mu_1, -\mu_2, \dots, -\mu_n,$$

где $n \in \mathbb{N}$, являются также корнями уравнения, но это не изменит значения p_n , так как

$$p_n = -\mu_n^2,$$

где $n \in \mathbb{N}$. Можно показать, что $p_0, p_1, \dots, p_n$, где $n \in \mathbb{N}$, являются простыми нулями функции $\psi(p)$ и простыми полюсами функции

$$\mathcal{G}(p, \xi) e^{p\tau} = \frac{\varphi(p, \xi)}{\psi(p)} e^{p\tau}.$$

Тогда согласно третьей теореме разложения запишем

$$\theta(\tau, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}_{p=p_n} [\mathcal{G}(p, \xi) e^{p\tau}].$$

Для нахождения вычетов в каждом простом полюсе воспользуемся формулой:

$$\text{Res}_{p=p_n} [\mathcal{G}(p, \xi) e^{p\tau}] = \text{Res}_{p=p_n} \left[\frac{\varphi(p, \xi) e^{p\tau}}{\psi(p)} \right] = \frac{\varphi(p_n, \xi)}{\psi'(p_n)} e^{p_n \tau},$$

где $\varphi(p, \xi) e^{p\tau}$ и $\psi(p)$ — функции, аналитические в окрестности точек $p = p_n$ и удовлетворяющие следующим условиям:

$$\varphi(p_n, \xi) e^{p_n \tau} \neq 0, \quad \psi(p_n) = 0 \quad \text{и} \quad \psi'(p_n) \neq 0.$$

Несложно проверить, что в данном случае все эти условия выполнены. Следовательно, решение краевой задачи (165) – (168) имеет вид:

$$\begin{aligned} \theta(\tau, \xi) = & \frac{1/b_c + \theta_c/b_r + \theta_c + (1 - \theta_c)\xi}{1 + 1/b_c + 1/b_r} - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} L_n \left[b_c \theta_c \cos \mu_n (1 - \xi) + b_r \cos \mu_n \xi + \right. \\ & \left. + \frac{b_c b_r}{\mu_n} \theta_c \sin \mu_n (1 - \xi) + \frac{b_c - K \mu_n^2}{\mu_n} b_r \sin \mu_n \xi \right] e^{-\mu_n^2 \tau}, \end{aligned} \quad (169)$$

$$\text{где } L_n = \frac{2 \sin \mu_n}{(b_c + b_r - K \mu_n^2) \mu_n + (b_c + b_r + K \mu_n^2) \sin \mu_n \cos \mu_n + 2 b_c b_r \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n}}.$$

Из этого решения нетрудно установить зависимость температуры металлической оболочки от времени. Действительно, при $\tau = a^2 t / h^2$ и $\xi = 0$ из формулы (169) получим

$$T_*(t) = T(t, 0) = T_0 + (T_i - T_0) \theta(a^2 t / h^2, 0). \quad (170)$$

Затем найдем значения h_m и h , при которых конструкция имеет минимум массы и сохраняет работоспособность в течение некоторого заданного времени t_* .

Результаты вычислений по формуле (170) приводят к зависимостям T_* от h_m при различных фиксированных значениях h . Графики таких зависимостей представлены на рис. 106.

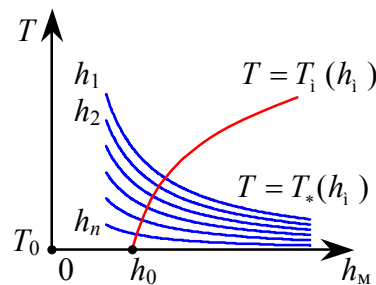


Рис. 106. Иллюстрация к нахождению зависимости между параметрами h_m и h

Если в формуле (157) заменить неравенство равенством и принять

$$\sigma = \frac{p_r - p_c}{2h_m} r = A - BT_m,$$

то можно установить

$$T_m(h_m) = \frac{A}{B} - \frac{r}{2} \frac{p_r - p_c}{2Bh_m}.$$

Точки пересечения графиков на рис. 106 определяют пары значений h_m и h , обеспечивающих работоспособность оболочки в течение некоторого заданного времени t_* . Установив взаимосвязь между h_m и h , при которых оболочка еще сохраняет работоспособность, построим зависимость массы m конструкции, например, от параметра h_m (рис. 107). С помощью такой зависимости найдем толщину h_m^* , а затем, учитывая взаимосвязь между h_m и h , определим толщину h^* .

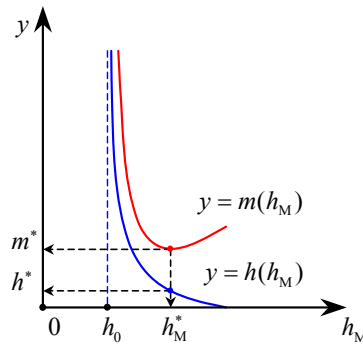


Рис. 107. Иллюстрация к нахождению оптимальных значений h_m и h

После того как получены значения h_m^* и h^* , необходимо убедиться в справедливости принятых ранее допущений и используемых упрощений. Если это возможно, то найденные значения можно считать оптимальными.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Математическое моделирование — это составная часть прикладной математики. По этому прежде всего следует назвать книги, в которых изложены особенности и подходы, характерные для прикладной математики.

1. *Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.* Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. Киев: Наукова думка, 1976. 270 с.
2. *Зарубин В.С.* Математическое моделирование в технике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 496 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XXI).
3. *Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д.* Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1965. 616 с.
4. *Моисеев Н.Н.* Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979. 224 с.
5. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения: Пер. с англ. М.: Наука, 1975. 464 с.
6. *Тихонов А.Н., Костомаров Д.П.* Рассказы о прикладной математике. М.: Наука, 1979. 208 с.
7. *Феодосьев В.И.* Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1969. 174 с.

Помимо техники математическое моделирование находит широкое применение в естественных науках, экономике и социальной сфере. Это отражено в большом количестве книг.

1. *Беллман Р.* Математические методы в медицине: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 200 с.
2. *Гаазе-Рапопорт М.Г., Поспелов Д.А.* От амебы до робота: модели поведения. М.: Наука, 1987. 288 с.
3. *Галанин М.П., Попов Ю.П.* Квазистационарные магнитные поля в неоднородных средах: Математическое моделирование. М.: Наука, 1995. 320 с.
4. *Дьяченко В.Ф.* Десять лекций по физической математике. М.: Изд-во «Факториал», 1997. 64 с.
5. *Жаблон К., Симон Ж.-К.* Применение ЭВМ для численного моделирования в физике: Пер. с франц. М.: Наука, 1983. 236 с.
6. *Каждан А.Б., Гуськов О.И.* Математические методы в геологии. М.: Недра, 1990. 252 с.
7. Компьютеры и нелинейные явления. Информатика и современное естествознание / Под ред. А.А. Самарского. М.: Наука, 1988. 192 с.
8. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования / Под ред. А.А. Самарского. М.: Наука, 1988. 173 с.
9. Математическая экономика на персональном компьютере / Ред. М. Кубонива: Пер. с япон. М.: Финансы и статистика, 1991. 304 с.
10. Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах / Отв. Ред. А.А. Самарский, С.П. Курдюмов, В.А. Галктионов. М.: Наука, 1986. 312 с.
11. Моделирование производственно-сбытовых систем и процессов управления. Под ред. А.А. Колобова, Л.Ф. Шклярского. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 216 с.
12. *Моисеев Н.Н.* Математик задает вопросы... (Приглашение к диалогу). М.: Знание, 1974. 192 с.
13. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981. 488 с.
14. *Поспелов Д.А.* Моделирование рассуждений. Опыт анализа мыслительных актов. М.: Радио и связь, 1989. 184 с.
15. *Фомин С.В., Беркенблит М.Б.* Математические проблемы в биологии. М.: Наука, 1973. 200 с.

Один из ключевых этапов в процедуре математического моделирования – это построение и анализ ММ исследуемого объекта. Этому посвящены следующие книги.

1. *Барзилович Е.Ю.* Модели технического обслуживания сложных систем. М.: Высш. шк., 1982. 232 с.
2. *Зарубин В.С.* Прикладные задачи термпрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
3. *Ивахненко А.Г., Юрачковский Ю.П.* Моделирование сложных систем по экспериментальным данным. М.: Радио и связь, 1987. 120 с.
4. *Карман Т., Био М.* Математические методы в инженерном деле: Пер. с англ. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. 424 с.
5. *Краснощеков П.С., Петров А.А.* Принципы построения моделей. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1983. 264 с.
6. *Лебедев А.Н.* Моделирование в научно-технических исследованиях. М.: Радио и связь, 1989. 224 с.
7. *Максимей И.В.* Имитационное моделирование на ЭВМ. М.: Радио и связь, 1988. 232 с.
8. Математическое моделирование / Ред. *Дж. Эндрюс, Р. Мак-Лоун*: Пер. с англ. М.: Мир, 1979. 278 с.
9. *Мышкис А.Д.* Элементы теории математических моделей. М.: Наука, 1994. 192 с.
10. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование. М.: Наука, 1997. 320 с.
11. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 440 с.
12. *Тарасевич Ю.Ю.* Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 144 с.
13. *Тарасик В.П.* Математическое моделирование технических систем. Минск: Дизайн-ПРО, 1997. 640 с.
14. *Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.Б.* Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. М.: Машиностроение, 1990. 264 с.
15. *Трудоношин В.А., Пивоварова Н.В.* Математические модели технических объектов // Системы автоматизированного проектирования / Под ред. *И.П. Норенкова*. Кн. 4. М.: Высш. Шк., 1986. 160 с.
16. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов, М.: Наука, 1996. 368 с.
17. *Шاپовалов Л.А.* Моделирование в задачах механики элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 288 с.
18. Эксперимент на дисплее: Первые шаги вычислительной физики / Ред. *Р.З. Сагдеев*. М.: Наука, 1989. 176 с.

При математическом моделировании ТО построение РС и последующий переход к ММ требует владения материалом естественнонаучных и инженерных дисциплин, соответствующих рассматриваемой технической области. Упомянем некоторые руководства по этим дисциплинам.

1. *Атабеков Г.И.* Теоретические основы электротехники: В 2 т. Т. 1: Линейные электрические цепи. М.: Энергия, 1978. 592 с.
2. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 1985. 480 с.
3. *Кириллин В.А., Сычев В.В., Шейндлин А.Е.* Техническая термодинамика. М.: Энергоатомиздат, 1983. 416 с.
4. Курс теоретической механики / *В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин* и др.; Под общ. Ред. *К.С. Колесникова*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 736 с. (Сер. Механика в техническом университете: Т. 1).
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: В 10 т. Т. 8: Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
6. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
7. *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* Курс теоретической механики: В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1983. 640 с.

8. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика М.: Наука, 1990. 416 с.
9. *Норенков И.П.* Основы автоматизированного проектирования. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 306 с. (Сер. Информатика в техническом университете).
10. *Савельев А.Я.* Основы информатики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 328 с. (Сер. Информатика в техническом университете).
11. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
12. Теория тепломассообмена: Учебник для технических университетов и вузов / *С.И. Исаев, И.А. Кожин, В.И. Кофанов* и др.; Под ред. *А.И. Леонтьева*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 684 с.
13. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике: В 9 т. Т. 6: Электродинамика: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 347 с.
14. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с. (Сер. Механика в техническом университете: Т. 2).
15. *Чугаев Р.Р.* Гидравлика. Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1982. 672 с.

Для эффективного использования возможностей математического моделирования необходимо хорошо ориентироваться в методах вычислительной математики и особенностях их реализации на ЭВМ. Эти вопросы отражены во многих изданиях, среди которых можно указать следующие книги.

1. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченкова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. шк., 1994. 544 с.
2. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
3. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.
4. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред М.: Наука, 1984. 520 с.
5. *Боглаев Ю.П.* Вычислительная математика и программирование. М.: Высш. шк., 1990. 544 с.
6. *Валях Е.* Последовательно-параллельные вычисления: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 456 с.
7. *Васильков Ю.В., Василькова Н.Н.* Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании. М.: Финансы и статистика, 1999. 256 с.
8. *Воеводин В.В.* Математические модели и методы в параллельных процессах. М.: Наука, 1986. 296 с.
9. *Горинштейн А.М.* Практика решения инженерных задач на ЭВМ. М.: Радио и связь, 1984. 232 с.
10. *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1976. 320 с.
11. *Иванов В.В.* Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пособие. Киев: Наукова думка, 1986. 584 с.
12. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
13. *Косарев В.И.* 12 лекций по вычислительной математике. М.: Изд-во МФТИ, 1995. 176 с.
14. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 536 с.
15. *Нивергельт Ю., Фаррар Дж., Рейнгольд Э.* Машинный подход к решению математических задач: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 352 с.
16. *Пирумков У.Г.* Численные методы. М.: Изд-во МАИ, 1998. 188 с.
17. *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике: Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 392 с.
18. Решение краевых задач методом Монте-Карло / *Б.С. Еленов, А.А. Кронберг, Г.А. Михайлов, К.К. Сабельфельд*. Новосибирск: Наука, 1980. 176 с.
19. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
20. *Смит Д.М.* Математическое и цифровое моделирование для инженеров и исследователей: Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1980. 272 с.
21. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. 312 с.

22. Турчак Л.И. Основы численных методов. М.: Наука, 1987. 320 с.
23. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994. 528 с.
24. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 280 с.
25. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров: Пер. с англ. М.: Наука, 1972. 400 с.
26. Шун Т.Е. Прикладные численные методы в физике и технике: Пер. с англ. М.: Высш. шк., 1990. 225 с.

Количественный анализ ММ часто удается свести к решению систем конечных нелинейных и линейных алгебраических уравнений, в том числе с разреженными (слабозаполненными) матрицами. Решение таких систем связано с реализацией на ЭВМ итерационных алгоритмов и матричных вычислений. Некоторые из многочисленных руководств, посвященных этим вопросам, приведены ниже.

1. Брамеллер А., Аллан Р., Хэмэм Я. Слабозаполненные матрицы: Анализ электроэнергетических систем: Пер. с англ. М.: Энергия, 1979. 192 с.
2. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977. 304 с.
3. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
4. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. М.: Мир, 1999. 548 с.
5. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 336 с.
6. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. 320 с.
7. Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трехдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985. 208 с.
8. Ортега Дж., Рейнболт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
9. Писсанецки С. Технология разреженных матриц: Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 412 с.
10. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 264 с.
11. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 454 с.
12. Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 263 с.
13. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 191 с.
14. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.-Л.: Физматгиз, 1963. 735 с.
15. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы: Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 448 с.
16. Эстербю О., Златев З. Прямые методы для разреженных матриц: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 120 с.

Анализ большинства моделей макро- и мета уровня связан с необходимостью численного решения ОДУ в том числе так называемых жестких систем таких уравнений. Методы их решения можно найти в приведенных выше книгах по вычислительной математике, а также в следующих специальных руководствах.

1. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений: Пер. с англ. М.: Мир, 1969. 368 с.
2. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге—Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений: Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 334 с.
3. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач пограничным слоем: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 200 с.
4. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений: Пер. с англ. М.: Наука, 1986.
5. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноуцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.

6. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта: Пер. с англ. М.: Мир, 1979. 312 с.
7. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Нежесткие задачи. Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 512 с.
8. Штеттер Х. Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений: Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 463 с.

Математическая модель может содержать целевую функцию и входить в состав задачи оптимизации параметров исследуемого объекта. Методам численного решения таких задач посвящена специальная литература.

1. Аоки М. Введение в методы оптимизации. Основы и приложения нелинейного программирования: Пер. с англ. М.: Наука, 1977. 344 с.
2. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 440 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XIV).
3. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 584 с.
4. Батищев Д.И. Методы оптимального проектирования. М.: Радио и связь, 1984. 248 с.
5. Бекишев Г.А., Кратко М.И. Элементарное введение в геометрическое программирование. М.: Наука, 1980. 144 с.
6. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1987. 400 с.
7. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.
8. Введение в нелинейное программирование / Под ред. К.Х. Эльстера: Пер. с англ. М.: Наука, 1985. 264 с.
9. Геминтерн В.И., Каган Б.М. Методы оптимального проектирования. М.: Энергия, 1980. 160 с.
10. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 510 с.
11. Данциг Дж. Линейное программирование: Пер. с англ. М.: Прогресс, 1966. 600 с.
12. Деннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 440 с.
13. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
14. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. М.: Наука, 1976. 240 с.
15. Зангвилл У.И. Нелинейное программирование. Единый подход: Пер. с англ. М.: Сов. Радио, 1973. 312 с.
16. Зенер К. Геометрическое программирование и техническое проектирование: Пер. с англ. М.: Мир, 1973. 112 с.
17. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1975. 272 с.
18. Лесин В.В., Лисовец Ю.П. Основы методов оптимизации. М.: Изд-во МАИ, 1995. 341 с.
19. Линейное и нелинейное программирование / Под ред. И.Н. Ляшенко. Киев: Выща шк., 1975. 372 с.
20. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы: Пер. с франц. М.: Наука, 1990. 487 с.
21. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978. 351 с.
22. Муртаф Б. Современное линейное программирование: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 224 с.
23. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 512 с.

24. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 376 с.
25. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
26. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: В 2 кн.: Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 351 с. и 320 с.
27. Романовский И.В. Алгоритмы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1977. 352 с.
28. Рыков А.С. Поисковая оптимизация. Методы деформируемых конфигураций. М.: Физматлит, 1993. 216 с.
29. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. 328 с.
30. Уайлд Д. Оптимальное проектирование: Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 272 с.
31. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование: Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 534 с.
32. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование: Пер. с англ. М.: Мир, 1967. 480 с.
33. Численные методы условной оптимизации / Ред. Ф.Гилл, У. Мюррей: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 292 с.

При математическом моделировании часто удобно преобразовать модель исследуемого объекта к вариационной форме. Возможности и преимущества такого преобразования при проведении вычислительного эксперимента рассмотрены в следующих книгах.

1. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 287 с.
2. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
3. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 488 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XV).
4. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
5. Зарубин В.С., Селиванов В.В. Вариационные и численные методы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 360 с.
6. Ланцош К. Вариационные принципы механики: Пер. с англ. М.: Мир, 1965. 408 с.
7. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с.
8. Полак Л.С. Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике. М.: Физматгиз, 1960. 599 с.
9. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 590 с.
10. Черноушко Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные методы механики и управления (Численные методы). М.: Наука, 1973. 238 с.
11. Шехтер Р. Вариационный метод в инженерных расчетах: Пер. с англ. М.: Мир, 1971. 292 с.

Основными методами анализа моделей микроуровня являются различные модификации метода конечных разностей и методы граничных (МГЭ) и конечных (МКЭ) элементов. Этим методам посвящена обширная литература. Ниже ограничимся лишь упоминанием ее небольшой части.

1. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: Пер. с англ. В 2 т. М.: Мир, 1990. 728 с.
2. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и МКЭ: Пер. с англ. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
3. Бенерджи П., Баттерфилд Р. МГЭ в прикладных науках: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 494 с.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 524 с.

5. *Бреббия К., Уокер С.* Применение МГЭ в технике: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 248 с.
6. *Бурман З.М., Арутюнян Г.А., Зархин Б.Я.* Программное обеспечение матричных алгоритмов и МКЭ в инженерных расчетах. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.
7. *Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Приближенные методы математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 700 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XIII).
8. *Вороненок Е.А., Палий О.М., Сочинский С.В.* Метод редуцированных элементов для расчета конструкций. Л.: Судостроение, 1990. 224 с.
9. *Галлагер Р.* МКЭ. Основы: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 428 с.
10. *Годунов С.К., Рябенский В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 19773. 400 с.
11. *Громадка Т., Лей Ч.* Комплексный МГЭ в инженерных задачах: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 303 с.
12. *Ершов Н.Ф., Шаверди Г.Г.* МКЭ в задачах гидродинамики и гидроупругости. Л.: Судостроение, 1984. 239 с.
13. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 541 с.
14. *Зенкевич О., Мортон К.* Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 318 с.
15. *Корнеев В.Г.* Схемы МКЭ высоких порядков точности. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. 208 с.
16. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 264 с.
17. *Марчук Г.И., Шайдулов В.В.* Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979. 320 с.
18. *Митчелл Э., Уэйт Р.* МКЭ для уравнений с частными производными: Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 216 с.
19. МКЭ в механике твердых тел / Под ред. *А.С. Сахарова, И. Альтенбаха*. Киев: Вища шк., 1982. 480 с.
20. *Мяченков В.И., Григорьев И.В.* Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник. М.: Машиностроение, 1981. 212 с.
21. *Норри Д., де Фриз Ж.* Введение в МКЭ: Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 304 с.
22. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред: Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 464 с.
23. *Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1983. 288 с.
24. *Пирумов У.Г., Росляков Г.С.* Численные методы газовой динамики. М.: Высш. шк., 1987. 232 с.
25. *Попов Б.Г.* Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 294 с.
26. *Постнов В.А., Тарануха Н.А.* Метод модуль-элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1990. 320 с.
27. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач: Пер. с англ. М.: Мир, 1972. 420 с.
28. *Розин Л.А.* МКЭ в применении к упругим системам. М.: Стройиздат, 1977. 129 с.
29. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 616 с.
30. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
31. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 416 с.
32. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
33. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975. 352 с.
34. *Сегерлинд Л.* Применение МКЭ: Пер. с англ. М.: 1979. 392 с.
35. *Сильвестер П., Феррари Р.* МКЭ для радиоинженеров и инженеров-электриков: Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 232 с.
36. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория МКЭ: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 350 с.

37. Суперэлементный расчет подкрепленных оболочек / *З.И. Бурман, О.М. Аксенов, В.И. Лукашенко, М.Т. Тимофеев*. М.: Машиностроение, 1982. 256 с.
38. *Сьярле Ф.* МКЭ для эллиптических задач: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 512 с.
39. *Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М.* МГЭ в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казанск. Ун-та, 1986. 296 с.
40. *Цейтлин А.И., Петросян Л.Г.* МГЭ в строительной механике. Ереван: «Луйс», 1987. 200 с.
41. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 197 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Математическое моделирование в технике.....	3
1.1. Математическое моделирование как основной способ исследования.....	3
1.2. Основные этапы математического моделирования.....	4
1.3. Математические модели в инженерных дисциплинах.....	6
2. Математическая модель технического объекта.....	7
2.1. Понятие математической модели.....	7
2.2. Структура математической модели.....	8
2.3. Свойства математических моделей.....	9
2.4. Фундаментальные принципы построения математических моделей.....	10
2.5. Классификация математических моделей.....	12
2.5.1. Особенности функциональных моделей.....	13
2.6. Иерархия математических моделей.....	16
2.7. Введение в теорию размерностей.....	17
2.8. Представление математической модели в безразмерной форме.....	27
3. Математические модели простейших типовых элементов.....	35
3.1. Электрические двухполюсники.....	35
3.2. Простейшие элементы механических систем.....	39
3.3. Некоторые элементы тепловых систем.....	44
3.4. Некоторые элементы гидравлических систем.....	48
3.5. Особенности пневматических систем.....	52
3.6. Об использовании математических моделей простейших типовых элементов.....	60
4. Математические модели систем из типовых элементов.....	64
4.1. Дуальные электрические цепи.....	64
4.2. Двойственность электромеханической аналогии.....	68
4.3. Математическая модель линейного осциллятора.....	72
4.4. О построении математических моделей технических систем.....	76
5. Нелинейные математические модели макроуровня.....	84
5.1. Причины возникновения нелинейности.....	84
5.2. Статические и стационарные модели.....	89
5.3. Некоторые нестационарные математические модели.....	93
5.4. Простейшие динамические модели.....	98
5.5. Положения равновесия консервативной системы.....	102
5.6. Фазовый портрет консервативной системы.....	110
5.7. Особенности поведения некоторых консервативных систем.....	116
5.8. Математические модели некоторых диссипативных систем.....	122
5.9. Автоколебательные системы.....	126
5.10. Приближенные аналитические методы анализа динамических моделей.....	131
6. Математические модели микроуровня.....	136
6.1. Математические модели микроуровня простейших элементов электрических систем.....	136
6.2. Одномерные математические модели теплопроводности.....	154
6.2.1. Одномерные стационарные модели теплопроводности.....	154
6.2.2. Одномерные нестационарные модели теплопроводности.....	160
6.3. Одномерные нестационарные модели гидравлических систем.....	166
6.3.1. Пример построения математической модели гидравлической системы.....	173
6.4. Пример использования математических моделей.....	181
Список рекомендуемой литературы.....	189