МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Конспект лекций

Для студентов кафедры ИУ9

Москва
2009

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

4. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

4.1. Построение теории P

Язык алгебры предикатов как расширение языка алгебры высказываний. Аксиомы исчисления предикатов: схемы аксиом исчисления высказываний плюс 4 аксиомы с кванторами: 11) $\forall x\, X \to X_t^x$; 12) $\forall x\, (Y \to X(x)) \to (Y \to \forall x\, X(x))$; 13) $X_t^x \to \exists x\, X$; 14) $\forall x\, (X(x) \to Y) \to (\exists x\, X(x) \to Y)$. Правила вывода: 1^* $\frac{X,\, X \to Y}{Y}$; 2^* $\frac{X}{\forall x\, X}$. Вывод и вывод из гипотез. Структурное ограничение. Секвенции.

Исчисление предикатов строится как расширение исчисления высказываний. Основная цель та же: формализовать доказательство различного рода утверждений. Исчисление предикатов — составная часть любой формальной теории, отвечающая за логическую часть теории.

Мы будем строить теорию $\mathcal{P}$, языком Ω которой является произвольный логико-математический язык. Фактически мы строим целое семейство формальных теорий. Однако все эти теории имеют единую логическую составляющую, отличаясь лишь способом формирования предметных выражений — термов. Любую из построенных формальных теорий можно трансформировать так, что предметная составляющая будет простейшей: один сорт переменных при отсутствии констант и функциональных символов. Упрощается и интерпретация простейшего языка. Достаточно задать единую предметную область для всех предметных переменных и указать отображение, которое n-арному предикатному символу ставит в соответствие булеву функцию от n переменных, а в случае 0-арного предикатного символа — символ 0 или 1.

Зададим аксиомы исчисления предикатов в виде некоторого набора схем аксиом. Первые одиннадцать схем повторяют схемы исчисления высказываний:

1) $X \to (Y \to X)$;
2) $X \to Y \to (X \to (Y \to Z) \to (X \to Z))$;
3) $X \wedge Y \to X$;
4) $X \wedge Y \to Y$;
5) $(X \to Y) \to ((X \to Z) \to (X \to Y \wedge Z))$;
6) $X \to X \vee Y$;
7) $Y \to X \vee Y$;
8) $X \to Z \to (Y \to Z \to (X \vee Y \to Z))$;
9) $X \to Y \to (\neg Y \to \neg X)$;
10) $\neg\neg X \to X$;
11) $X \to \neg\neg X$.

Еще четыре схемы связаны с кванторами (ниже X_t^x — правильная подстановка терма t вместо переменной x, Y не содержит свободных вхождений переменной x):

12) $\forall x\, X \to X_t^x$;
13) $\forall x\, (Y \to X(x)) \to (Y \to \forall x\, X(x))$;
14) $X_t^x \to \exists x\, X$;
15) $\forall x\, (X(x) \to Y) \to (\exists x\, X(x) \to Y)$.

В дополнение к правилу заключения (modus ponens) добавляется правило обобщения:

1^* $\dfrac{X,\, X \to Y}{Y}$;

2^* $\dfrac{X}{\forall x\, X}$.

Как и в исчислении высказываний, выводом называем последовательность формул языка, в которой каждая формула либо аксиома, либо получена по одному из правил вывода из предшествующих формул. Также вводим понятие вывода из гипотез Γ (частного вывода), в котором

МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

в последовательности формул могут находиться формулы из списка Г. Однако для вывода из гипотез введем дополнительное структурное требование: если формула $\forall x\, X$ получена по правилу обобщения, то во всех гипотезах, используемых для вывода этой формулы, переменная x не должна иметь свободных вхождений. Указанное структурное требование не касается аксиом. Поэтому в выводе без гипотез его можно не учитывать.

Смысл сформулированного структурного требования становится понятным, если учесть, что вывод должен сохранять истинность формул. Правило заключения сохраняет истинность формул при фиксированной модели и фиксированной оценке, а именно: если θ — оценка формулы $X \to Y$ в данной модели M, то из истинности $X\theta$ и $(X \to Y)\theta$ следует истинность $Y\theta$. Правило обобщения в отсутствие структурного требования нарушает фиксированность оценки при выводе.

Впрочем, структурное требование касается лишь частного вывода. Мы могли бы это ограничение не учитывать, но тогда нам придется считаться с ним при „сшивке“ частных выводов в окончательный вывод без гипотез. Поясним сказанное. Выводимость из X формулы $\forall x\, X$ следует увязать с выводимостью формулы $X \to \forall x\, X$, т.е. с тем, что эта формула есть тавтология. Но если переменная x входит в X свободно, то при некоторой интерпретации для некоторого объекта a формула $X^x_{\underline{a}}$ будет ложной, а для некоторого объекта b формула $X^x_{\underline{b}}$ — истинной. В этом случае $\forall x\, X$ в соответствии с интерпретацией квантора всеобщности будет ложной формулой при любой оценке, а это приведет к ложности $X \to \forall x\, X$. Однако эта формула будет тавтологией, если X не имеет свободных вхождений x.

Мы сохраняем запись $\Gamma \vdash X$, означающую, что формула X выводима из списка гипотез Г. Эту запись называем ***секвенцией***.

Пример 4.1. Пусть переменная y не имеет свободных вхождений в X. Тогда $\vdash \forall x\, X \to \to \forall y\, (X^x_y)$. Действительно:

1) $\forall x\, X \to X^x_y$ (схема аксиом 12);
2) $\forall y\, (\forall x\, X \to X^x_y)$ (по правилу обобщения из 1);
3) $\forall y\, (\forall x\, X \to X^x_y) \to (\forall x\, X \to \forall y\, X^x_y)$ (схема аксиом 13);
4) $\forall x\, X \to \forall y\, X^x_y$ (по правилу заключения из 2 и 3);

4.2. Правила естественного вывода

Теорема о дедукции. Правила естественного вывода исчисления высказываний. Новые правила:

р1) $\frac{\Gamma \vdash X}{\Gamma \vdash \forall y\, X^x_y}$ (введение общности);

р2) $\frac{\Gamma \vdash \forall x\, X}{\Gamma \vdash X^x_t}$ (удаление общности);

р3) $\frac{\Gamma \vdash X^x_t}{\Gamma \vdash \exists x\, X}$ (введение существования);

р4) $\frac{\Gamma, X \vdash Y}{\Gamma, \exists y\, X^x_y \vdash Y}$ (удаление существования).

Пример: $\exists x\, X \to \neg\forall x(\neg X)$.

Как и в случае исчисления высказываний, на практике вывод строится с помощью правил естественного вывода. Сохраняются структурные правила естественного вывода, так как они не связаны с сутью самого вывода. Сохраняется теорема о дедукции. Однако в доказательство этой теоремы необходимо внести некоторые коррективы.

Теорема 4.1. Если $\Gamma, X \vdash Y$, то $\Gamma \vdash X \to Y$.

◀ Доказательство теоремы, как и в исчислении высказываний, проводится индукцией по построению формулы. Рассуждения в основном повторяют доказательство теоремы из исчисления высказываний. Дополнительно надо лишь рассмотреть случай, когда конечная формула вывода получена по правилу обобщения.

Итак, пусть в выводе $X_1, X_2, \ldots, X_i = X, \ldots, X_j, \ldots, X_n = Y$ конечная формула Y имеет вид $\forall x X_j$. Этот вывод, как свою часть, содержит и вывод формулы X_j. Если в выводе формулы X_j формула X не используется, то можно считать, что ее нет и в выводе $X_1, X_2, \ldots, X_n = Y$. Добавляя к этому выводу аксиому $\forall x\, X_j \to (X \to \forall x\, X_j)$ (схема аксиом 1), а затем на

основании правила заключения $X \to \forall x\, X_j$, получим вывод формулы $X \to Y \equiv X \to \forall x\, X_j$ из гипотез Γ. Пусть формула X используется в выводе формулы X_j. Тогда, согласно структурному требованию, формула X не имеет свободных вхождений переменной x. Согласно индуктивному предположению из вывода $\Gamma, X \vdash X_j$ вытекает вывод $\Gamma \vdash X \to X_j$, откуда по правилу обобщения (ни X, ни гипотезы, использованные в выводе X_j) не содержат свободных вхождений x) получаем $\Gamma \vdash \forall x\,(X \to X_j)$. Присоединив аксиому $\forall x\,(X \to X_j) \to (X \to \forall x\, X_j)$, получаем вывод формулы $X \to \forall x\, X_j$, т.е. формулы $X \to Y$. ►

Теорема о дедукции позволяет без изменений перенести из исчисления высказываний в исчисление предикатов все восемь логических правил естественного вывода, а вслед за ними и дополнительные правила естественного вывода: доказательства этих правил не используют правила обобщения. Кроме того, добавляются следующие четыре правила с кванторами:

p1) $\dfrac{\Gamma \vdash X}{\Gamma \vdash \forall y\, X^x_y}$ (введение общности); p3) $\dfrac{\Gamma \vdash X^x_t}{\Gamma \vdash \exists x\, X}$ (введение существования);

p2) $\dfrac{\Gamma \vdash \forall x\, X}{\Gamma \vdash X^x_t}$ (удаление общности); p4) $\dfrac{\Gamma, X \vdash Y}{\Gamma, \exists y\, X^x_y \vdash Y}$ (удаление существования).

В правилах p1 и p4 переменная x не имеет свободных вхождений в формулы списка Γ и формулу Y. Кроме того, если y отлично от x, то y не входит свободно в X. В правилах p2 и p3 подстановка $\binom{x}{t}$ должна быть свободной для формулы X.

Докажем четыре новых правила естественного вывода. При выводе формулы p1 учтем, что формулы списка Γ не содержат свободных вхождений переменной x:

$$\begin{array}{c}
\Gamma \vdash \forall y X^x_y \\
\begin{array}{cc}
\Gamma \vdash \forall x X & \Gamma \vdash \forall x X \to \forall y X^x_y \\
\begin{array}{cc}
\Gamma \vdash X & \vdash \forall y(\forall x X \to X^x_y) \to (\forall x X \to \forall y X^x_y)
\end{array} & \begin{array}{c}
\Gamma \vdash \forall y(\forall x X \to X^x_y) \\ | \\ \vdash \forall y(\forall x X \to X^x_y) \\ | \\ \vdash \forall x X \to X^x_y
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Формула p2 непосредственно следует из аксиомы 12:

$$\begin{array}{c}
\Gamma \vdash X^x_t \\
\Gamma \vdash \forall x X \qquad \vdash \forall x X \to X^x_t
\end{array}$$

Аналогично выводится и формула p3:

$$\begin{array}{c}
\Gamma \vdash \exists x X \\
\Gamma \vdash X^x_t \qquad \vdash X^x_t \to \exists x X
\end{array}$$

Наиболее длинный вывод получается для правила p4:

$$\begin{array}{c}
\Gamma, \exists y X^x_y \vdash Y \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\Gamma, \exists y X^x_y \vdash \exists x X \\ | \\ \boxed{\exists y X^x_y \vdash \exists x X}
\end{array} &
\begin{array}{c}
\Gamma, \exists y X^x_y \vdash \exists x X \to Y \\ | \\ \Gamma \vdash \exists x X \to Y \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\Gamma \vdash \forall x(X \to Y) \\ | \\ \Gamma \vdash X \to Y \\ | \\ \Gamma, X \vdash Y
\end{array} & \vdash \forall x(X \to Y) \to (\exists x X \to Y)
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

В этом выводе осталась нераскрытой одна ветка (в рамке). Соответствующий вывод строится на той же аксиоме:

$$\boxed{\exists y X_y^x \vdash \exists x X}$$

$$\exists y X_y^x \vdash \exists y X_y^x \to \exists x X \qquad \exists y X_y^x \vdash \exists y X_y^x$$

$$\vdash \exists y X_y^x \to \exists x X$$

$$\vdash \forall y (X_y^x \to \exists x X) \qquad \vdash \forall y (X_y^x \to \exists x X) \to (\exists y X_y^x \to \exists x X)$$

$$\vdash X_y^x \to \exists x X$$

Использование правил естественного вывода такое же, как и в случае исчисления высказываний.

Пример 4.2. Используя правила естественного вывода, докажем выводимость в теории $\mathcal{P}$ формулы $\exists x\, X \to \neg\forall x \neg X$, т.е. построим вывод секвенции $\vdash \exists x\, X \to \neg\forall x \neg X$. Имеем цепочку преобразований „снизу вверх“:

$$\vdash \exists x\, X \to \neg\forall x \neg X \;\Leftarrow\; \exists x\, X \vdash \neg\forall x \neg X \;\Leftarrow\; X \vdash \neg\forall x \neg X \;\Leftarrow\; \forall x \neg X \vdash \neg X \;\Leftarrow\; \forall x \neg X \vdash \forall x \neg X.$$

Последняя секвенция вытекает из правила p2.

4.3. Глобальные свойства теории $\boldsymbol{P}$

О множестве формул, выводимых в исчислении предикатов. Лемма об истинности при фиксированной оценке. Следствия: о том, что любая выводимая формула общезначима; о непротиворечивости исчисления предикатов. Понятие формальной аксиоматической теории. Непротиворечивость, полнота формальной аксиоматической теории.

Остановимся на вопросах непротиворечивости, полноты и разрешимости теории $\boldsymbol{P}$. Ответ на эти вопросы тесно связан с ответом на вопрос: каково множество формул заданного языка, выводимых в исчислении предикатов? Разумеется, это множество зависит от выбора языка. Однако эта зависимость не связана с логической частью языка.

В принципе можно ограничиться вариантом исчисления предикатов, который базируется на односортном языке без функциональных символов. В этом варианте каждая элементарная формула является простой: каждый аргумент есть предметная переменная. Действительно, зафиксировав некоторый порядок в счетном множестве переменных, мы можем каждую элементарную формулу интерпретировать как простую, вводя взамен каждого терма новую переменную. В результате язык модифицируется так, что в нем не будет функциональных символов. Наличие сортов переменных ограничивает их использование при формировании элементарных формул. Снятие ограничений приводит к тому, что, например, вместе с $p(x, y)$ появляется формула $p(y, x)$, т.е. происходит расширение множества элементарных формул. Допуская такое расширение, приходим к односортному языку, в котором термы — это переменные одного сорта.

Далее мы покажем, что множество выводимых формул совпадает с множеством логических законов в данном языке. Начнем с важного свойства, присущего выводу из гипотез. Оказывается, что вывод из гипотез сохраняет истинность формул при фиксированной модели и фиксированной оценке.

Лемма 4.1. Пусть Γ — список формул $X_1, X_2, \ldots, X_m$ и $\Gamma \vdash Y$. Если для данной модели M и данной оценки θ формул $X_1, X_2, \ldots, X_m, Y$ в M истинны $X_1\theta, X_2\theta, \ldots, X_m\theta$, то и $Y\theta$ в M истинна.

◀ Доказательство проводится индукцией по длине вывода. Утверждение очевидно, если вывод содержит одну формулу, которая в этом случае есть либо аксиома (являющаяся логическим законом), либо гипотеза X_j. Но тогда $Y\theta$ и $X_j\theta$ — одно и то же.

Предположим утверждение доказано для всех выводов длины менее k. Рассмотрим произвольный вывод $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ из гипотез Γ длины k с конечной формулой $Y = Z_k$. Формула Y есть либо логический закон, либо гипотеза, либо получена по правилу заключения, либо по правилу всеобщности. В первых двух случаях рассуждения те же, что и при $k = 1$. В третьем случае в выводе есть формулы Z_j и $Z_l = Z_j \to Y$. Если в какой-либо модели M при оценке θ истинны формулы $X_1\theta$, $X_m\theta$, то в силу предположения индукции формулы $Z_j\theta$ и $(Z_j \to Y)\theta$ истинны в M. В этом случае правило заключения гарантирует истинность в M формулы $Y\theta$, т.е. утверждение теоремы доказано в случае, когда формула Y получена по правилу заключения.

Пусть Y получена по правилу обобщения, т.е. $Y = \forall x Z_j$ для некоторой формулы Z_j, $j < k$. Предположим, что в выводе формулы Z_j использованы все гипотезы $X_1, \ldots, X_m$ (неиспользуемые можно просто не рассматривать). В силу структурного требования каждая из этих формул не имеет свободных вхождений переменной x. Обозначив через $x_1 = x, x_2, \ldots, x_r$ все переменные, имеющие вхождения в вывод формулы Z_j, рассмотрим любую совокупность оценок θ_a, отличающихся только значением a, которое ставится в соответствие переменной x. Такие оценки можно записать в виде $\theta_a = \binom{x}{a}\theta$, где θ — общая часть всех этих оценок, относящаяся к переменным $x_2, \ldots, x_r$. Применение любой из оценок θ_a к формулам $X_1, \ldots, X_m$ дает один и тот же результат $X_1\theta, \ldots, X_m\theta$, поскольку переменная x в эти формулы не входит. Пусть все формулы $X_1\theta, \ldots, X_m\theta$ в выбранной модели M истинны. Тогда для любого значения a истинны формулы $X_1\theta_a, \ldots, X_m\theta_a$. Согласно индуктивному предположению для любого значения a истинна формула $Z_j\theta_a$. Следовательно, для данной оценки θ в соответствии с интерпретацией квантора всеобщности истинна формула $(\forall x Z_j)\theta$ или, что то же самое $Y\theta$. Тем самым утверждение теоремы доказано для формулы Y в случае, когда она получена по правилу обобщения. ▶

Следствие 4.1. Если $\Gamma \vdash X$ и все формулы в Γ являются логическими законами, то и X есть логический закон. В частности, если $\vdash X$, то X — логический закон.

Следствие 4.2. Теория $\boldsymbol{P}$ непротиворечива.

◀ Как и в случае исчисления высказываний, последнее следствие показывает, что исчисление предикатов является непротиворечивым. Действительно, если $\vdash X$, то по следствию 4.1 формула X общезначима. Предположение $\vdash \neg X$ приводит к выводу, что и $\neg X$ общезначима. Но нет ни одной формулы, которая общезначима вместе со своим отрицанием. Это непосредственно вытекает из определения: если X общезначима, то, выбрав произвольную модель M, а в ней оценку θ, получим истинную формулу $X\theta$. Но тогда $(\neg X)\theta \equiv \neg X\theta$ ложна, а формула $\neg X$ не является тождественно истинной в M, т.е. $\neg X$ не является общезначимой. ▶

Далее мы докажем, что любая общезначимая формула выводима в исчислении предикатов. Однако воспроизвести доказательство из исчисления высказываний не удастся. Появились новые понятия интерпретации и модели, и нам необходимо понятие, напоминающее вывод из гипотез, но связанное с понятием интерпретации.

Уточним смысл термина аксиоматической формальной теории, понимая под этим пару $T = (\Omega, A)$ из некоторого логико-математического языка Ω, снбженного набором 15 схем аксиом и 2 правил вывода исчисления предикатов, и некоторого множества A замкнутых формул в языке Ω. Формулы из множества A будем называть ***нелогическими аксиомами*** теории. Выводом в теории $T = (\Omega, A)$ будем называть вывод в исчислении предикатов из гипотез Γ, где $\Gamma \subset A$ — конечный список нелогических аксиом. Таким образом, нелогические аксиомы используются в дополнение к стандартному набору логических аксиом (т.е. аксиом исчисления предикатов). Конечная формула X всякого вывода теории называется выводимой в ней, и этот факт мы будем обозначать $T \vdash X$. Выводимые формулы еще называют ***теоремами***

этой теории. Построенное нами исчисление предикатов можно трактовать как формальную аксиоматическую теорию с пустым множеством нелогических аксиом.

Любая интерпретация языка Ω будет также называться интерпретацией формальной аксиоматической теории T. ***Модель*** теории T — это такая интерпретация теории, при которой каждая нелогическая аксиома является истинной (аксиомы замкнуты и не требуют оценки). Для исчисления предикатов любая интерпретация является моделью, поскольку имеет только логические аксиомы, истинные в любой интерпретации.

Если формальная теория имеет модель, то она называется ***интерпретируемой***. Отметим, что если среди нелогических аксиом есть противоречия (т.е. формулы, ложные в любой интерпретации), то такая теория не интерпретируема. ***Теория непротиворечива***, если не существует такой замкнутой формулы X, что $T \vdash X$ и $T \vdash \neg X$.

Формальную теорию называют ***полной в узком смысле***, если присоединение любой невыводимой замкнутой формулы к списку нелогических аксиом приводит к противоречивой теории. ***Полнота в широком смысле для исчисления предикатов*** — выводимость в этой теории любой общезначимой формулы.

Покажем, что исчисление предикатов не является полным в узком смысле. Полагаем, что язык этой теории имеет хотя бы один предикатный символ p положительной арности (иначе это исчисление высказываний). Рассмотрим формулу

$$X = \forall x_2 \forall x_3 \ldots \forall x_n (\exists x_1 p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \forall x_1 p(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Нетрудно убедиться в том что эта формула истинна в одних интерпретациях и ложна в других. Присоединим ее в качестве нелогической аксиомы. Тогда получим непротиворечивую теорию T_0. Действительно, если $T_0 \vdash Y$ и $T_0 \vdash \neg Y$, то $X \vdash Y$ и $X \vdash \neg Y$ (X — единственная нелогическая аксиома), откуда в силу правила введения отрицания заключаем, что $\vdash \neg X$. Но это неверно, поскольку $\neg X$ не является общезначимой. В то же время и сама формула X по тем же соображениям не выводима в исчислении предикатов.

Однако исчисление предикатов полно в широком смысле. Доказательство этого факта, известного как ***теорема Геделя о полноте***, опирается на следующую теорему, также доказанную Геделем. Предварительно вспомним дополнительное правило $\dfrac{\Gamma, \neg X \vdash Y}{\Gamma \vdash X \vee Y}$ (см. пример 2.3). Это правило обратимо, т.е. $\dfrac{\Gamma \vdash X \vee Y}{\Gamma, \neg X \vdash Y}$. Действительно, воспользовавшись правилом сечения, получаем:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Gamma, \neg X \vdash Y & & \\
 & \diagup & & \diagdown & \\
 & \Gamma, \neg X, X \vee Y \vdash Y & & & \Gamma, \neg X \vdash X \vee Y \\
 & \diagup & \diagdown & & | \\
\Gamma, \neg X, X \vdash Y & & \Gamma, \neg X, Y \vdash Y & & \Gamma \vdash X \vee Y
\end{array}$$

Теорема 4.2. Любая непротиворечивая формальная аксиоматическая теория имеет счетную модель.

◀ Для построения соответствующей интерпретации нужно выбрать произвольное счетное множество (неважно какое), конкретизировать функциональные символы и константы (опять-таки неважно как), и придать смысл предикатным символам. Последнее является ключевым: необходимо так конкретизировать предикатные символы, что все нелогические аксиомы станут истинными. Ясно, что сосредоточиться надо на символах, входящих в нелогические аксиомы. Разобраться можно, проведя синтаксический анализ нелогических аксиом. Сделать это можно так.

В логико-математический язык Ω формальной теории введем дополнительное счетное множество констант, получив расширенный язык Ψ. Очевидно, что рассматриваемая формальная теория T будет формальной теорией и с языком Ψ, причем непротиворечивой (обозначим ее T_ψ). В этом языке рассмотрим множество D всех замкнутых термов (чтобы такие существовали в нужном количестве, и нужно расширение языка). Это будет носителем нашей интерпретации.

Любопытна следующая интерпретация функциональных символов: функциональному символу f ставим в соответствие отображение, которое термы t_1, t_2, ..., t_n преобразует в терм $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Надо построить интерпретацию предикатных символов. Сформируем два множества замкнутых формул L и R, выдерживая следующее условие разделенности: для любого списка X_1, $X_2, \ldots, X_n$ из L и любого списка $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ из R формула $X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n \to Y_1 \vee Y_2 \vee \ldots \vee Y_m$ не выводима в исчислении $\boldsymbol{P}$ с языком Ψ. Для этого выберем выводимую в исчислении предикатов замкнутую формулу S (например $S = C \vee \neg C$) и сформируем множество L_0 из всех нелогических аксиом теории с дополнительной формулой S и множество R_0, содержащее единственную формулу $\neg S$. В силу непротиворечивости теории множества L_0 и R_0 разделены. Далее строим последовательность пар разделенных множеств L_n, R_n, в которой каждая очередная пара есть расширение предыдущей: $L_n \supset L_{n-1}$, $R_n \supset R_{n-1}$. Затем объединяем две последовательности множеств: $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$, $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$. Очевидно, что если все пары L_n, R_n разделены, то и множества L, R разделены. Опишем процедуру расширения пары множеств L_n, R_n. При этом отметим, что невыводимость в исчислении $\boldsymbol{P}$ формулы $X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n \to Y_1 \vee Y_2 \vee \ldots \vee Y_m$ равносильна тому, что не существует вывода $X_1, X_2, \ldots, X_n \vdash Y_1 \vee Y_2 \vee \ldots \vee Y_m$. Дизъюнкцию всех формул списка Δ будем обозначать V_Δ.

Выбираем произвольную формулу $Z \in L_n \setminus L_{n-1}$. Пусть $Z = U \wedge W$. Для произвольной пары списков $\Gamma \in L_n$ и $\Delta \in R_n$ секвенция $\Gamma \wedge Z \vdash V_\Delta$ невыводима. Это значит, что для любых списков Γ и Δ нет выводимости $\Gamma, U, W \vdash V_\Delta$, и мы можем включить формулы U и W в множество L_{n+1}, не нарушая условия разделенности. Действительно, в противном случае существуют списки Γ_1, Δ_1, для которых, например, секвенция $\Gamma_1, U \vdash V_{\Delta_1}$ явялется выводимой. но тогда $\Gamma_1, U, W \vdash V_{\Delta_1}$ и $\Gamma_1, U \wedge W \vdash V_{\Delta_1}$, что противоречит разделенности множеств L_n и R_n.

Пусть $Z = U \vee W$. Невыводимость $\Gamma, U \vee W \vdash V_\Delta$ означает, что мы можем включить одну из формул U или W в множество L_{n+1}, не нарушая условия разделенности. Действительно, если для пары списков Γ_1, Δ_1 есть выводимость $\Gamma_1, U \vdash V_{\Delta_1}$ а для пары списков Γ_2, Δ_2 — выводимость $\Gamma_2, W \vdash V_{\Delta_2}$, то сразу получаем выводимости $\Gamma_1, \Gamma_2, U \vdash V_{\Delta_1} \vee V_{\Delta_2}$ и $\Gamma_1, \Gamma_2, W \vdash V_{\Delta_1} \vee V_{\Delta_2}$ (по правилам введения гипотез и введения дизъюнкции), откуда $\Gamma_1, \Gamma_2, U \vee W \vdash V_{\Delta_1} \vee V_{\Delta_2}$, что противоречит разделенности L_n и R_n.

Пусть $Z = U \to W$. Тогда мы, не нарушая разделенности, можем включить либо U в R_{n+1}, либо W в L_{n+1}. Если бы это было не так, то существовали бы выводимости $\Gamma_1 \vdash V_{\Delta_1} \vee U$ и $\Gamma_2, W \vdash V_{\Delta_2}$. Значит, есть выводимость $\Gamma_1, \neg V_{\Delta_1} \vdash U$, и мы заключаем, что существует выводимость $\Gamma_1, \Gamma_2, \neg V_{\Delta_1}, U \to W \vdash V_{\Delta_2}$, из которой заключаем о существовании выводимости $\Gamma_1, \Gamma_2, U \to W \vdash V_{\Delta_1} \vee V_{\Delta_2}$, а это противоречит разделенности L_n и R_n.

Пусть $Z = \neg U$. Тогда мы можем включить U в множество R_{n+1}, поскольку из существования выводимости $\Gamma \vdash U \vee V_\Delta$ следует существование выводимости $\Gamma, \neg U \vdash V_\Delta$, что противречит разделенности L_n и R_n.

Пусть $Z = \forall x U$. В множество L_{n+1} включаем все формулы U_c^x, где c пробегает множество всех констант языка. В противном случае для некоторой константы c существует выводимость $\Gamma, U_c^x \vdash V_\Delta$, откуда с учетом $\forall x U \vdash U_c^x$ в силу правила сечения получаем выводимость $\gamma, \forall x U \vdash V_\Delta$, противоречащую разделенности L_n и R_n.

Пусть $X = \exists x U$. Тогда есть такая константа c, для которой добавление U_c^x в L_n не нарушает условия разделенности с R_n. Впрочем, отметим, что если для любой константы c имеет место $\Gamma_c, U_c^x \vdash \Delta_c$, то в силу счетности множества констант сделать заключение о существовании выводимости $\Gamma, \exists x U \vdash \Delta$ мы не сможем, поскольку объединение всех участвующих гипотез может быть счетным. Выход из возникшей проблемы такой. Выберем константу c, не входящую ни в одну из формул множеств L_n и R_n. Тогда существование выводимости $\Gamma, U_c^x \vdash V_\Delta$ с некоторыми списками Γ и Δ равносильно существованию выводимости $\Gamma, U_y^x \vdash \Delta$ с произвольной переменной y, не входящей в формулы списка Γ (мы, не нарушая требований по всему выводу можем заменить c на y). Отсюда заключаем о существовании выводимости $\Gamma, \exists x U \vdash \Delta$, что противоречит разделенности L_n и R_n. Чтобы эта схема работала, надо гарантировать, что

на любом шаге будет существовать свободная константа c. Для этого надо скорректировать действия при анализе формулы вида $Z = \forall x U$. При обработке такой формулы надо включать в L_{n+1} не все формулы U_c^x, а хотя бы одну с нерассмотренной еще константой c, но обеспечить бесконечное количество обработок этой формулы: если в других случаях обработанная формула больше не рассматривается, то эту надо периодически просматривать, генерируя очередные формулы вида U_c^x. Сделать это можно, поскольку и количество формул в рассматриваемом языке, и количество констант счетно.

Рассмотрим теперь формулу $Z \in R_n$. Если $Z = U \wedge W$, то в множество R_{n+1} можно включить одну из формул U или W, не нарушая условия разделенности. Действительно, если существуют выводимости $\Gamma_1 \vdash V_{\Delta_1} \vee U$ и $\Gamma_2 \vdash V_{\Delta_2} \vee W$, то существуют выводимости $\Gamma_2, \neg V_{\Delta_1} \vdash U$ и $\Gamma_2, \neg V_{\Delta_2} \vdash W$, откуда с помощью введения гипотез и введения конъюнкции получаем $\Gamma_1, \Gamma_2, \neg V_{\Delta_1}, \neg V_{\Delta_2} \vdash U \wedge W$ и $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash V_{\Delta_1} \vee V_{\Delta_2} \vee (U \wedge W)$, что противоречит разделенности L_n и R_n.

Если $Z = U \vee W$, то в R_{n+1} включаем и U, и W. Например, если есть выводимость $\Gamma \vdash V_\Delta \vee U$, то сразу $\Gamma \vdash V_\Delta \vee U \vee W$, а порядок дизъюнкций справа не играет роли.

Пусть $Z = U \to W$. Тогда включаем U в L_{n+1}, а W в R_{n+1}. Действительно, если существует выводимость $\Gamma, U \vdash V_\Delta$, то $\Gamma, U \vdash V_\Delta \vee W$, откуда $\Gamma, \neg V_\Delta, U \vdash W$ и в силу теоремы о дедукции $\Gamma, \neg V_\Delta \vdash U \to W$. Следовательно, $\Gamma, \neg V_\Delta \vdash V_\Delta \vee (U \to W)$, что противоречит разделенности L_n и R_n.

Если $Z = \neg U$, формулу U включаем в L_{n+1}: из выводимости $\Gamma, U \vdash V_\Delta$ следует выводимость $\Gamma \vdash V_\Delta \vee \neg U$, которая противоречит разделенности L_n и R_n.

Пусть $Z = \forall x U$. Выбрав константу c, не входящую ни в одну из формул множеств L_n и R_n, заключаем, что нет выводимости $\Gamma \vdash V_\Delta \vee U_c^x$. Действительно, из существования такой выводимости с некоторыми списками Γ и Δ следует выводимость $\Gamma \vdash V_\Delta \vee U_y^x$, где переменная y не входит в формулы списков Γ и Δ, а из последней — выводимость $\Gamma \vdash V_\Delta \vee \forall x U$, противоречащая условию разделенности L_n и R_n. Для выбранной константы в список R_{n+1} включаем формулу U_c^x.

Если $Z = \exists x U$, то в R_{n+1} включаем формулы U_c^x для всех констант c, обеспечив их „постепенное поступление“, как в случае формулы $Z = \forall x U$ из множества L_n.

Построив последовательности разделенных множеств $\{L_n\}$ и $\{R_n\}$, переходим к их объединениям L и R. Эти объединения тоже разделены: если бы существовала выводимость $\Gamma \vdash V_\Delta$ с некоторыми списками Γ и Δ, то в силу конечности списков можно было бы утверждать, что $\Gamma \subset L_k$ и $\Delta \subset R_k$ для некоторого номера k и что множества L_k и R_k не являются разделенными.

Элементарным формулам множества L присвоим истинностное значение 1, элементарным формулам множества R — истинностное значение 0, остальным — неважно. Тогда можно утверждать, что все формулы множества L будут иметь истинностное значение 1, а все формулы множества R — истинностное значение 0. Доказательство этого проводится индукцией по построению формул. Действительно, для элементарных формул это вытекает из заданной интепретации. Пусть $Z \in L$ имеет, например, вид $Z = U \to W$. Тогда в соответствии с построением множеств L и R имеем либо $U \in R$, либо $W \in L$. В первом случае, согласно индуктивному предположению, формула U ложна, а значит, формула $U \to W$ истинна. Во втором случае формула W истинна, поэтому $U \to W$ истинна. Если $Z = U \to W \in R$, то по построению $U \in L$, $W \in R$. Значит, U истинна, а W ложна, откуда заключаем, что Z ложна. Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Поскольку множество L содержит все нелогические аксиомы, заключаем, что они в построенной интерпретации истинны, а интерпретация является моделью. ►

Замечание. Изложенное доказательство верно по сути, но, вообще-то не может быть признано строгим по некоторым соображениям. Дело в том, что в доказательстве идет манипуляция бесконечными множествами, причем на содержательном уровне. Такого рода рассуждения в современной математической логике не считаются достаточно надежными. Однако следует учесть, что все множества, рассматриваемые в доказательстве, являются счетными. Поэтому построение множеств L и R, обладающих свойством замкнутости (в определенном смысле)

можно провести так, что на каждом шаге мы будем иметь дело с конечными множествами. Требуется аккуратная работа с нумерациями счетных множеств, но эти детали затушевывают основную идею доказательства.

Доказанная теорема позволяет сделать вывод о полноте исчисления предикатов в широком смысле.

Теорема 4.3. В исчислении предикатов выводима любая тавтология.

◀ Пусть общезначимая формула A не выводима в теории $\boldsymbol{P}$. Мы можем считать, что эта формула замкнута, добавляя к ней в случае необходимости кванторные приставки. Замкнутая формула $\neg A$, не являясь общезначимой, тоже не выводима в теории $\boldsymbol{P}$. Рассмотрим формальную теорию T, которая получается из $\boldsymbol{P}$ добавлением нелогической гипотезы $\neg A$. Эта теория непротиворечива, так как иначе в ней выводилась бы любая формула, в том числе и A. Другими словами, в исчислении предикатов имела бы место выводимость $\neg A \vdash A$. Но это возможно только в случае, когда A — выводимая формула. Но если T — непротиворечивая теория, то она имеет модель, т.е. такую реализацию, в которой формула $\neg A$ истинна. В этой же реализации формула A ложна. Следовательно, она не является общезначимой. Полученное противоречие доказывает, что предположение о невыводимости A неверно. ▶

Исчисление предикатов не является разрешимой теорией. Это становится понятно, если учесть, что средств исчисления предикатов достаточно, чтобы представить содержание практически любой математической теории. Было бы странно предполагать, что есть некий формальный алгоритм, по которому можно любую теорему проверить, верна она или нет. Это, разумеется, расходится с нашим представлением о бесконечном разнообразии окружающего мира. Однако строгое доказательство этого факта выходит за рамки курса: требуется строгое математическое описание понятия „алгоритм“ и развитая теория об алгоритмах, чтобы можно было строго показать неразрешимость исчисленния предикатов.

Но здесь важно одно обстоятельство. Доказанная теорема устанавливает эквивалентность понятий „выводимая“ и „истинная“. Значит, метод, которым разворачивалась невыводимая формула может быть использован (с некоторыми модификациями) для анализа формулы на истинность. Поясним сказанное. Ставим задачу убедиться в общезначимости некоей формулы X или опровергнуть это. Последнее означает построение интерпретации, в которой эта формула ложна. Чтобы работать только с замкнутыми формулами, можем эту формулу замкнуть кванторами всеобщности. Что значит ложность X? Допустим $X = X_1 \vee X_2$. Тогда ложность X равносильна ложности и X_1, и X_2. Допустим $X = X_1 \to X_2$. Тогда ложность X равносильна истинности X_1 и ложности X_2. Эти рассуждения показывают, что исходная формула разворачивается в два множества L и R более простых формул, причем все формулы в L должны быть истинны, а все формулы в L_2 ложны. Разворачивание сопровождается уменьшением логической сложности формул, и в конце концов дело дойдет до элементарных формул. Однако при этом возникает несколько вариантов (например, истинность $U \vee W$ обеспечивается истинностью U или истинностью W; какой из этих вариантов возможен, на этапе анализа формулы не известно; надо иметь в виду все варианты) Если при этом множества L и R будут пересекаться, то мы приходим к невозможности обеспечить главное требование: истинность формул из L и ложность формул из R. Это означает, что интерпретаций, в которых исходная формула истинна, нет. Если же пересечений нет, то можно так устроить интерпретацию предикатных символов, что основное требование будет выполняться.

Пример 4.3. Рассмотрим формулу $\exists x(p \to q(x)) \to (p \to \forall x q(x))$. Попробуем построить контрпример, т.е. интерпретацию, в которой она ложна, или убедиться в ее истинности. Редукцию формулы удобно построить в виде дерева, в котором преобразуется формула вида $\Gamma \mapsto \Delta$, где Γ и Δ — конечные списки формул. Слева — формулы множества L, справа — формулы множества

R. Получится следующее:

$$\mapsto \exists x(p \to q(x)) \to (p \to \forall x q(x))$$
$$\exists x(p \to q(x)) \mapsto p \to \forall x q(x)$$
$$\exists x(p \to q(x)), p \mapsto \forall x q(x)$$
$$p \to q(a_0), p \mapsto \forall x q(x)$$
$$p \to q(a_0), p \mapsto q(a_1)$$
$$p \mapsto p, q(a_1) \qquad\qquad q(a_0), p \mapsto q(a_1)$$

Мы видим, что в левой ветке формула p встречается и слева, и справа, и в этом случае обеспечить истинность формул левее $\mapsto$ и ложность правее нельзя. В то же время правая ветка обеспечивает нужную интерпретацию: предикатный символ p нулевой арности полагаем равным 1, а для q полагаем $q(a_0) = 1$, $q(a_1) = 0$. Таким образом, если носитель интерпретации содержит два элемента, а предикатные символы имеют заданный смысл, формула будет ложной. Впрочем, если носитель интерпретации имеет всего лишь один элемент (а почему бы и нет?), то нужное условие не удается обеспечить и в правой ветви. Что это значит? В любой момент в левом и правом списках формул есть формулы эквивалентные. Если две такие формулы истинны, то дизъюнкция всех правых формул истинна, т.е. истинна исходная формула. Если же обе формулы ложны, то конъюнкция левых формул ложна, откуда следует истинность исходной формулы. Вывод: анализируемая формула истинна при любой интерпретации.

Разобранный пример можно истолковать как алгоритм проверки формулы на истинность. Это верно, но этот алгоритм не всегда приводит к ответу за конечное число шагов.

Пример 4.4. Рассмотрим формулу $\neg\forall x\exists y p(x, y)$. Для нее дерево разбора имеет следующий вид:

$$\mapsto \neg\forall x\exists y p(x, y)$$
$$\forall x\exists y p(x, y) \mapsto$$
$$\exists y p(c_0, y), \forall x\exists y p(x, y) \mapsto$$
$$p(c_0, c_1), \forall x\exists y p(x, y) \mapsto$$
$$p(c_0, c_1), \exists y p(c_1, y), \forall x\exists y p(x, y) \mapsto$$
$$p(c_0, c_1), p(c_1, c_2), \forall x\exists y p(x, y) \mapsto$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

При разборке квантора всеобщности мы выбираем первую не реализованную для этого квантора константу, а при разборке квантора существования — первую свободную константу. Для построения контрпримера есть два варианта. Можно в очередной момент вместо свободной константы использовать прежнюю (считать, что новых констант уже нет), например, считать, что $c_2 = c_1$. Тогда истинность формул $p(c_0, c_1)$ и $p(c_1, c_1)$ в интерпретации с двумя элементами c_1 и c_2 будет означать и истинность формулы $\forall x\exists y p(x, y)$. Мы получаем контрпример, т.е. интерпретацию, в которой анализируемая формула $\neg\forall x\exists y p(x, y)$ является ложной. Возможен и другой вариант — счетный набор констант. Мы получаем набор формул $p(c_k, c_{k+1})$, которые объявляем истинными. Считая, что других констант нет, делаем заключение об истинности формулы $\forall x\exists y p(x, y)$ и ложности формулы $\neg\forall x\exists y p(x, y)$. Мы снова получили контрпример, но уже со счетным носителем интерпретации.

Однако, если бы проверяемая формула была тавтологией, мы должны были бы рассмотреть оба этих варианта, за конечное число шагов установить истинность формулы нам бы не удалось.

Процесс „расшифровки“, предпринятый в разобранном примере очень похож на построение вывода в рамках правил естественного вывода, но с одним уточнением. В секвенциях исчисления предикатов справа могла быть только одна формула, в то время как в разобранном примере и слева, и справа находятся списки формул.

Приведенное построение, а также теория $\boldsymbol{N}$, в которой дело свелось к манипуляциям с секвенциями, приводит к идее построить совсем другое исчисление, основанное на понятии секвенции. Такое исчисление называют ***исчислением генценовского типа*** в противовес исчислениям $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{P}$, которые относят к ***исчислениям гильбертовского типа***.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Алгебра высказываний 1
- 1.1. Введение . . . 1
- 1.2. Алгебра логики . . . 3
- 1.3. Тавтологии и эквивалентность формул . . . 5
- 1.4. Функции алгебры логики . . . 9

2. Исчисление высказываний 14
- 2.1. Основные положения теории $\boldsymbol{N}$ . . . 14
- 2.2. Правила естественного вывода . . . 16
- 2.3. Глобальные свойства теории $\boldsymbol{N}$ . . . 21

3. Алгебра предикатов 26
- 3.1. Предикаты и кванторы . . . 26
- 3.2. Логико-математические языки . . . 27
- 3.3. Переименования и подстановки . . . 30
- 3.4. Семантика логико-математического языка . . . 33
- 3.5. Логические законы . . . 35
- 3.6. Замены . . . 38
- 3.7. Упрощение формул . . . 40

4. Исчисление предикатов 43
- 4.1. Построение теории $\boldsymbol{P}$ . . . 43
- 4.2. Правила естественного вывода . . . 44
- 4.3. Глобальные свойства теории $\boldsymbol{P}$ . . . 46

5. Генценовские формальные системы 54
- 5.1. Исчисление $\boldsymbol{GV}$ . . . 54
- 5.2. Исчисление $\boldsymbol{GP}$ . . . 58

6. Примеры формальных теорий 61
- 6.1. Теория групп . . . 61
- 6.2. Формальная арифметика . . . 63

7. Метод резолюций 68
- 7.1. Скулемовские функции . . . 68
- 7.2. Метод резолюций для исчисления высказываний . . . 70
- 7.3. Метод резолюций для исчисления предикатов . . . 73