

Лекции 14-15. Дифракция света.

Принцип Гюйгенса-Френеля. Метод зон Френеля. Векторная диаграмма. Дифракция от круглого отверстия и круглого диска. Дифракция Фраунгофера от щели. Предельный переход от волновой оптики к геометрической.

Многолучевая интерференция. Дифракционная решётка. Спектральные характеристики дифракционных решёток. Дифракция рентгеновских лучей. Формула Вульфа-Брэгга. Понятие о рентгеноструктурном анализе.

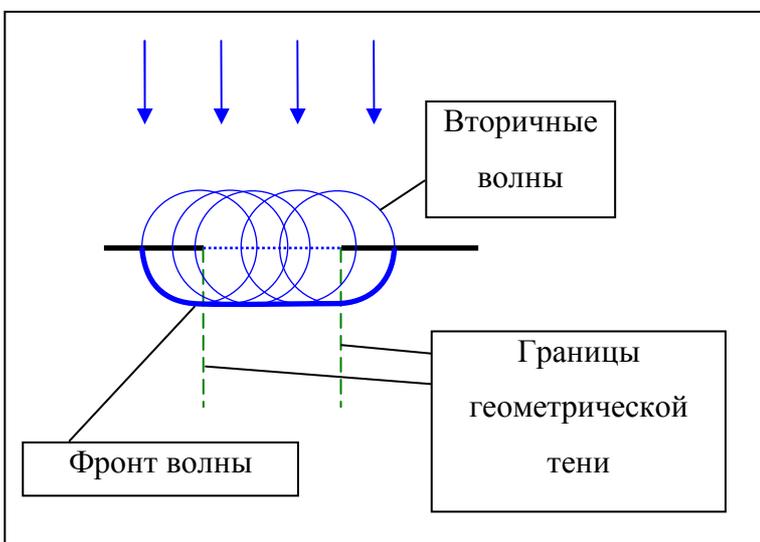
Дифракция – это явление отклонения от прямолинейного распространения света, если оно не может быть следствием отражения, преломления или изгибания световых лучей, вызванным пространственным изменением показателя преломления. При этом отклонение от законов геометрической оптики тем меньше, чем меньше длина волны света.

Замечание. Между дифракцией и интерференцией нет принципиального различия. Оба явления сопровождаются перераспределением светового потока в результате суперпозиции волн.

Примером дифракции может служить явление при падении света на непрозрачную перегородку с отверстием. В этом случае на экране за перегородкой в области границы геометрической тени наблюдается дифракционная картина.

Принято различать два вида дифракции. В случае, когда волну, падающую на перегородку, можно описать системой параллельных друг другу лучей (например, когда источник света находится достаточно далеко), то говорят о *дифракции Фраунгофера* или дифракции в параллельных лучах. В остальных случаях говорят о *дифракции Френеля* или дифракции в расходящихся лучах.

При описании явлений дифракции необходимо решить систему уравнений Максвелла с соответствующими граничными и начальными условиями. Однако нахождение точного решения в большинстве случаев является весьма затруднительным. Поэтому, в оптике, часто применяют приближённые методы, основанные на принципе Гюйгенса в обобщённой формулировке Френеля или Кирхгофа.



Принцип Гюйгенса.

Формулировка принципа Гюйгенса.

Каждая точка среды, до которой в некоторый момент времени t дошло волновое движение, служит источником *вторичных сферических волн*. Огибающая этих волн даёт положение фронта волны в следующий близкий момент времени $t+dt$. Радиусы вторичных волн равны произведению фазовой

скорости света на интервал времени $r = v \cdot dt$.

Иллюстрация этого принципа на примере волны падающей на непрозрачную перегородку с отверстием показывает, что волна проникает в область геометрической тени. Это является проявлением дифракции.

Однако принцип Гюйгенса не даёт оценок интенсивности волн, распространяющихся в различных направлениях.

Принцип Гюйгенса-Френеля.

Френель дополнил принцип Гюйгенса представлением об интерференции вторичных волн. По амплитудам вторичных волн с учётом их фаз можно найти амплитуду результирующей волны в любой точке пространства.

Каждый малый элемент волновой поверхности является источником вторичной сферической волны, амплитуда которой пропорциональна величине элемента dS и уравнение которой вдоль луча имеет вид

$$dA = K(\theta) \cdot \frac{a_0 dS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha)$$

здесь a_0 - коэффициент, пропорциональный амплитуде колебаний точек на волновой поверхности dS , $K(\theta)$ - коэффициент, зависящий от угла θ между лучом и вектором $d\vec{S}$, и такой, что

при $\theta = 0$ он принимает максимальное значение,

а при $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ - минимальное (близкое к нулю).

Амплитуда результирующего колебания в некоторой точке наблюдения P определяется аналитическим выражением принципа Гюйгенса-Френеля, которое вывел *Кирхгоф*:

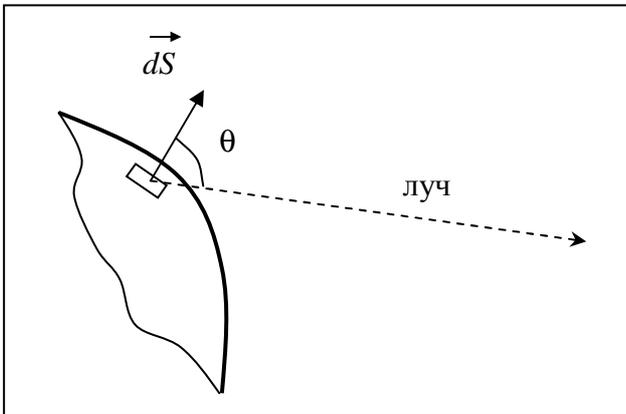
$$A_P = \iint_S K(\theta) \cdot \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha) dS$$

Интеграл берётся по волновой поверхности, зафиксированной в некоторый момент времени.

Для свободно распространяющейся волны значение интеграла не зависит от выбора поверхности интегрирования S .

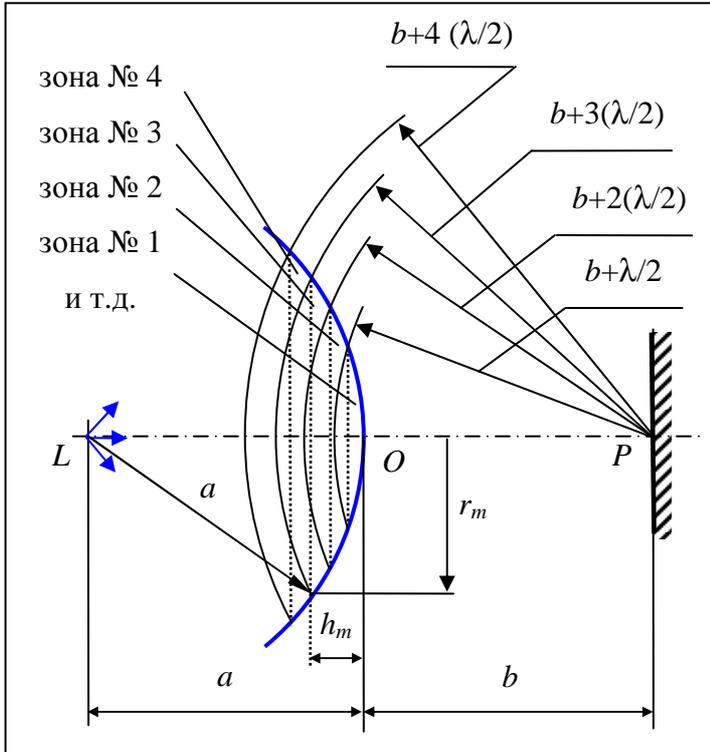
Явное вычисление амплитуды результирующего колебания по формуле *Кирхгофа* довольно трудоёмкая процедура, поэтому на практике применяют *приближённые методы* нахождения значения этого интеграла.

Для нахождения амплитуды колебаний в точке наблюдения P всю волновую поверхность S разбивают на участки (*зоны Френеля*). Предположим, что мы наблюдаем дифракцию в расхо-



дящихся лучах (дифракцию Френеля), т.е. рассматриваем сферическую, распространяющуюся от некоторого точечного источника L . Волна распространяется в вакууме.

Зафиксируем волновую поверхность в некоторый момент времени t . Пусть радиус этой поверхности равен a . Линия LP пересекает волновую поверхность в точке O . Предположим, что расстояние между точками O и P равно b . От точки P последовательно откладываем сферы, радиусы которых $R_m = b + m \frac{\lambda}{2}$. Две сосед-



ние сферы «отсекают» на волновой поверхности кольцевые участки, называемые *зонами Френеля*. (Как известно, две сферы пересекаются по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной прямой, на которой лежат центры этих сфер). Найдём расстояние от точки O до границы зоны с номером m . Пусть радиус внешней границы зоны Френеля равен r_m . Т.к. радиус волновой поверхности равен a , то $r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = 2ah_m - h_m^2$. При этом,

$$r_m^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + h_m)^2 = mb\lambda + \left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - 2bh_m - h_m^2.$$

Поэтому $2ah_m - h_m^2 = mb\lambda + \left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - 2bh_m - h_m^2$, откуда $h_m = \frac{mb\lambda + \left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(a+b)}$.

Для длин волн видимого диапазона и не очень больших значений номеров m можно пре-

небречь слагаемым $\left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2$ по сравнению с $m\lambda$. Следовательно, в этом случае $h_m = \frac{mb\lambda}{2(a+b)}$ и

для квадрата радиуса получаем выражение $r_m^2 = 2ah_m - h_m^2 = 2a \frac{mb\lambda}{2(a+b)} - \left(\frac{mb\lambda}{2(a+b)}\right)^2$, в котором

опять можно пренебречь последним слагаемым. Тогда радиус m -й зоны Френеля (для дифракции в расходящихся лучах)

$$r_m = \sqrt{m \frac{ab\lambda}{a+b}}.$$

Следствие. Для дифракции в параллельных лучах (дифракции Фраунгофера) радиус зон Френеля получается предельных переходом $a \rightarrow \infty$:

$$r_m = \sqrt{mb\lambda}.$$

Теперь сравним площади зон Френеля. Площадь сегмента сферической поверхности, лежащей внутри m -й зоны, как известно, равна $S(m) = 2\pi a h_m$. Зона с номером m заключена между границами зон с номерами m и $m-1$. Поэтому её площадь равна

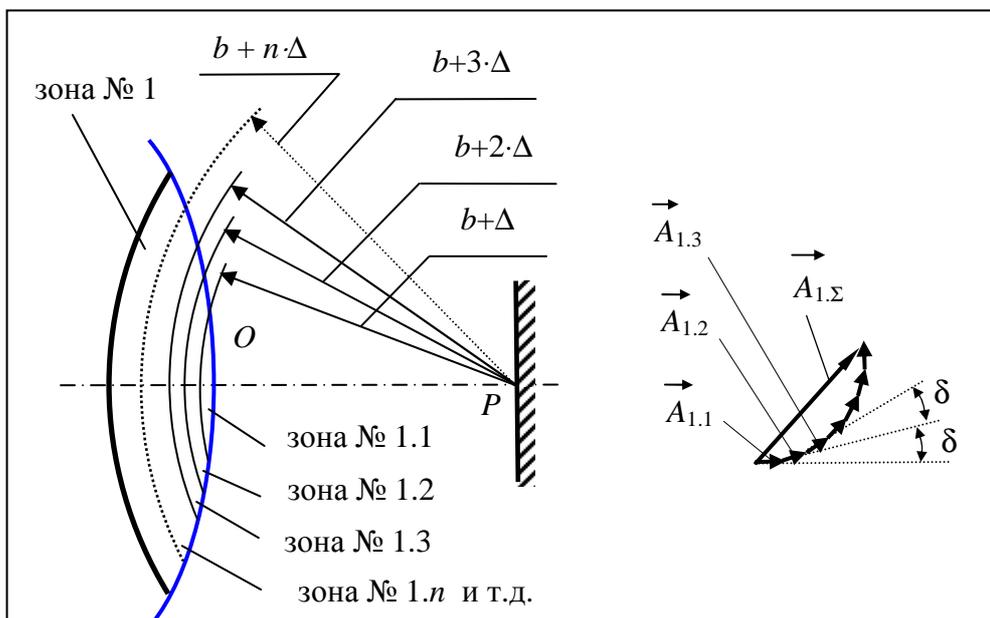
$$S_m = S(m) - S(m-1) = 2\pi a (h_m - h_{m-1}) = 2\pi a \left(\frac{mb\lambda + \left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(a+b)} - \frac{(m-1)b\lambda + \left((m-1) \frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(a+b)} \right).$$

После преобразований выражение примет вид $S_m = 2\pi a \left(\frac{b\lambda + (2m-1)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(a+b)} \right).$

Если пренебречь величиной $\frac{(2m-1)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{2(a+b)}$, то из выражения $S_m = \frac{\pi a b \lambda}{(a+b)}$ следует, что

при небольших номерах площадь зон не зависит от номера m .

Нахождение результирующей амплитуды в точке наблюдения P производится следующим образом. Т.к. излучаемые вторичные волны являются когерентными и расстояния от соседних границ до точки P отличаются на половину длины волны, то разность фаз колебаний от вторичных источников на этих границах, приходящих в точку P , равна π (как говорят, колебания приходят в противофазе). Аналогично, для любой точки какой-нибудь зоны обязательно



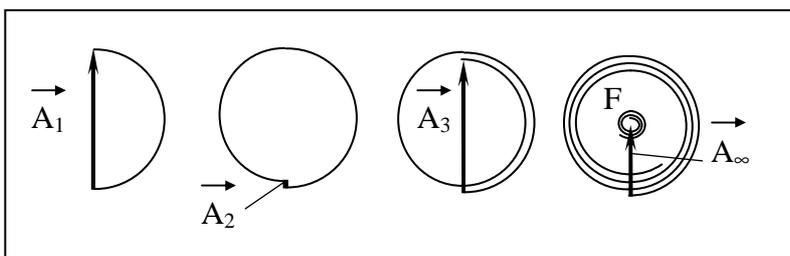
найдётся точка в соседней зоне, колебания от которой приходят в P в противофазе. Величина амплитуды волнового вектора пропорциональна величине площади зоны $A_p \sim K(\theta) S_m$. Но площади зон одинаковые, а с ростом номера m возрастает угол θ , поэтому величина $K(\theta)$ убывает. Поэтому можно записать упорядоченную последовательность амплитуд

$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_{m-1} > A_m > A_{m+1} > \dots$. На амплитудно-векторной диаграмме с учётом разности фаз эта последовательность изображается противоположно направленными векторами, поэтому

$$A_p = A_1 - A_2 + A_3 - \dots \pm A_{m-1} \mp A_m \pm A_{m+1} \mp \dots$$

Разобьём первую зону на большое количество N внутренних зон таким же способом, как и выше, но теперь расстояния от границ двух соседних внутренних зон до точки P будут отличаться на малую величину $\Delta = \frac{\lambda/2}{N}$. Поэтому разность фаз волн, приходящих волн в точку P

будет равна малой величине $\delta = k\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$. На амплитудно-векторной диаграмме вектор амплитуды от каждой из внутренних зон будет повернут на малый угол δ относительно предыдущего, поэтому амплитуде суммарного колебания от нескольких первых внутренних зон будет соответствовать вектор $\vec{A}_{1,\Sigma}$ соединяющий начало и конец ломаной линии. При увеличении номера внутренней зоны суммарная разность фаз будет нарастать и на границе первой зоны станет равной π . Это означает, вектор амплитуды от последней внутренней зоны $\vec{A}_{1,N}$ направлен противоположно вектору амплитуды от первой внутренней зоны $\vec{A}_{1,1}$. В пределе бесконечно большого числа внутренних зон эта ломаная линия перейдет в часть спирали.



Амплитуде колебаний от первой зоны Френеля тогда будет соответствовать вектор \vec{A}_1 , от двух зон - \vec{A}_2 и т.д. В случае, если между точкой P и источником света нет никаких преград, из точки наблюдения будет видно бесконечное число зон, поэтому спираль будет накручиваться на точку фокуса F . Следовательно, свободной волне с интенсивностью I_0 соответствует вектор амплитуды \vec{A}_∞ , направленный в точку F .

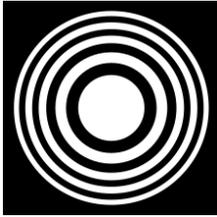
Из рисунка видно, что для амплитуды от первой зоны можно получить оценку $A_1 = 2A_\infty$, поэтому интенсивность от первой зоны $I_1 = 4I_0$ - в 4 раза больше интенсивности падающей волны. Равенство $A_1 = 2A_\infty$ можно трактовать и по-другому. Если для бесконечного числа открытых зон суммарную амплитуду записать в виде

Из рисунка видно, что для амплитуды от первой зоны можно получить оценку $A_1 = 2A_\infty$, поэтому интенсивность от первой зоны $I_1 = 4I_0$ - в 4 раза больше интенсивности падающей волны. Равенство $A_1 = 2A_\infty$ можно трактовать и по-другому. Если для бесконечного числа открытых зон суммарную амплитуду записать в виде

$$A_{\infty} = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots + \left(\frac{A_{m-1}}{2} - A_m + \frac{A_{m+1}}{2} \right) + \dots$$

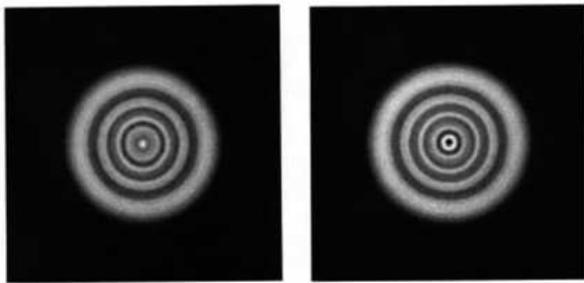
(m – четное число), то из $A_1 = 2A_{\infty}$ следует оценка $A_m \approx \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}$.

Замечание. Если каким-то образом изменить фазы колебаний в точке P от чётных или нечётных зон на π , или закрыть чётные или нечётные зоны, то суммарная амплитуда увеличится по сравнению с амплитудой открытой волны. Таким свойством обладает *зонная пластинка* – плоскопараллельная стеклянная пластинка с выгравированными концентрическими окружностями, радиус которых совпадает с радиусами зон Френеля. Зонная пластинка «выключает» чётные либо нечётные зоны Френеля, что приводит к увеличению интенсивности света в точке наблюдения.



Дифракция на круглом отверстии.

Рассуждения, приведённые выше, позволяют сделать вывод, что амплитуда колебания в



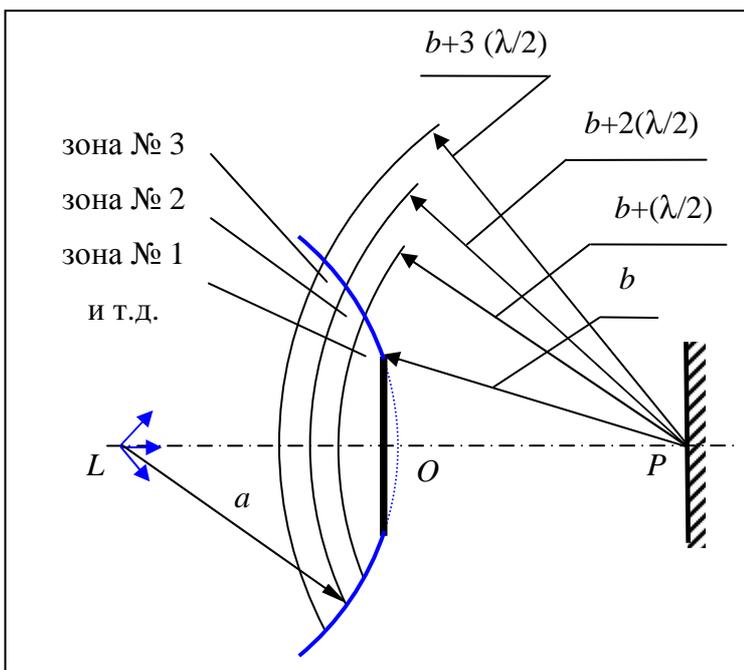
точке P зависит от числа зон Френеля. Если для точки наблюдения открыто нечётное число зон Френеля, то в этой точке будет максимум интенсивности. Если открыто чётное число зон – то минимум.

Дифракционная картина от круглого отверстия имеет вид чередующихся светлых и

тёмных колец. При увеличении радиуса отверстия (и увеличения числа зон Френеля) чередование тёмных и светлых колец будет наблюдаться только вблизи границы геометрической тени, а внутри освещённость практически не будет меняться.

Дифракция на малом диске.

Рассмотрим схему опыта, в котором на пути световой волны расположен непрозрачный круглый диск, радиус которого соизмерим с радиусами первых зон Френеля.

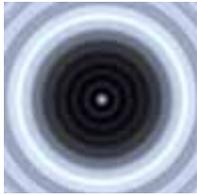


Для рассмотрения дифракционной

картины помимо обычных зон построим дополнительные зоны от края диска.

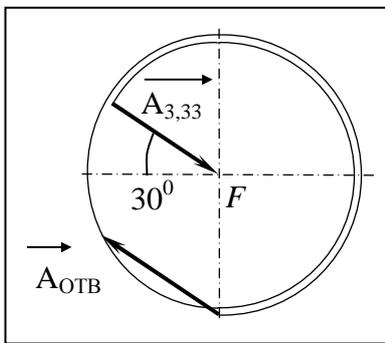
Зоны Френеля от края диска будем строить по прежнему принципу - расстояния от границ двух соседних зон до точки наблюдения отличаются на половины длины волны. Амплитуда в точке наблюдения

$$A_p = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots + \left(\frac{A_{m-1}}{2} - A_m + \frac{A_{m+1}}{2} \right) + \dots$$



с учётом оценки $A_m \approx \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}$ будет равна $A_p = \frac{A_1}{2}$. Следовательно, в точке наблюдения - в центре геометрической тени *всегда* будет светлое пятно – максимум интенсивности. Это пятно называется *пятном Пуассона*.

Замечание. Если диск закрывает только часть обычной первой зоны Френеля, то на экране не будет тени.



Пример. На непрозрачный диск диаметром $D=0,5$ см нормально падает плоская монохроматическая волна, длина которой $\lambda=700$ нм. Найти диаметр отверстия в центре диска, при котором интенсивность света в точке P экрана (на оси системы) будет равна нулю. Расстояние между диском и экраном равно $L=2,68$ м.

Решение. Найдём число обычных зон Френеля, которые закрыты диском. Номер зоны найдём из формулы для радиуса при дифрак-

ции Фраунгофера $m = \frac{1}{L\lambda} \left(\frac{D}{2} \right)^2$

$$m = \frac{1}{2,68 \cdot 7 \cdot 10^{-7}} \left(\frac{5 \cdot 10^{-3}}{2} \right)^2 \approx 3,33.$$

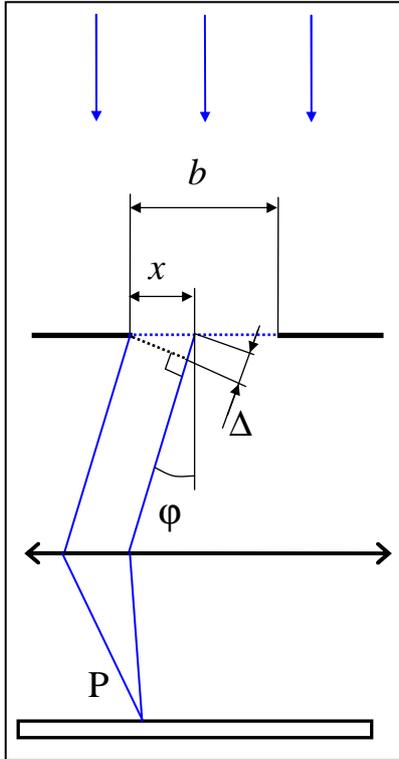
Т.е. диск закрывает 3 целых зоны и еще одну треть. Построим спираль Френеля. Граничной точкой этой части в 3,33 зоны соответствует угол наклона к горизонтали, равный 30° . Все остальные зоны открыты, поэтому вектор амплитуды $\vec{A}_{3,33}$ направлен от граничной точки зоны Френеля в точку F . Чтобы в точке наблюдения P интенсивность была равной нулю, надо, чтобы вектор амплитуды света из отверстия $\vec{A}_{отв}$ был равным по длине, но противоположным по направлению вектору $\vec{A}_{3,33}$. Следовательно, он также должен быть наклонен к горизонтали под углом в 30° . В этом случае отверстие должно открывать 1,67 части зоны Френеля. Для $m=1,67$ получаем радиус отверстия

$$r_{отв} = \sqrt{m\lambda L} = \sqrt{1,67 \cdot 7 \cdot 10^{-7} \cdot 2,68} \approx 1,77 \cdot 10^{-3} \text{ м. ♣}$$

Дифракция Фраунгофера от щели.

Рассмотрим дифракционную картину от узкой длинной щели шириной b , на которую нормально падает плоская волна. За щелью расположена собирающая линза, в фокальной плоскости которой находится экран для наблюдения дифракционной картины.

Элементарные участки волнового фронта в форме узких длинных полосок, параллель-



ных краям щели, становятся источниками вторичных *цилиндрических* волн. Разобьем волновую поверхность в щели на маленькие участки dx , каждый из которых в точке P создает колебание

$$dA = Ka_0 \cos(\omega t - k\Delta)$$

Где $\Delta = x \sin \varphi$ - геометрическая разность хода лучей от края

щели и от луча на расстоянии x от края. Здесь множителя $\frac{1}{r}$ в амплитуде нет, поскольку рассматриваются *плоские* волны. Каждая полоска шириной dx даёт одинаковый вклад амплитуды

$$Ka_0 = \frac{A_0}{b} dx, \text{ где } A_0 - \text{амплитуда волны.}$$

Тогда для всей щели

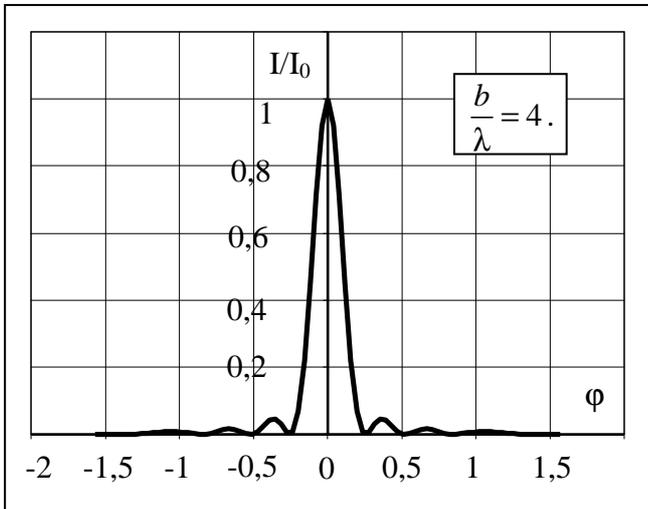
$$A_P = \int_0^b \frac{A_0}{b} \cos(\omega t - k(x \sin \varphi)) dx = -\frac{A_0}{bk \sin \varphi} \sin(\omega t - k(x \sin \varphi)) \Big|_0^b$$

$$\begin{aligned} A_P &= -\frac{A_0}{bk \sin \varphi} (\sin(\omega t - k(b \sin \varphi)) - \sin(\omega t)) = \\ &= -\frac{A_0}{bk \sin \varphi} \left(\cos\left(\omega t - k(b \sin \varphi) - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \right) = \\ &= -\frac{2A_0}{bk \sin \varphi} \cos\left(\frac{kb \sin \varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{k(b \sin \varphi)}{2}\right) \\ A_P &= \frac{2A_0}{bk \sin \varphi} \sin\left(\frac{kb \sin \varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{k(b \sin \varphi)}{2}\right) \end{aligned}$$

С учетом $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ получаем амплитуду колебания в точке P $A_{P0} = A_0 \frac{\left| \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi\right) \right|}{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) b \sin \varphi}$.

При $\varphi \ll 1$ амплитуда в точке P равна амплитуде падающей волны $A_{P0} = A_0$, а при выполнении условия $b \sin \varphi = m\lambda$, где m - целое число, амплитуда равна нулю $A_{P0} = 0$. Поэтому для интенсивности волны в направлении задаваемом углом φ

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi \right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi \right)^2}.$$

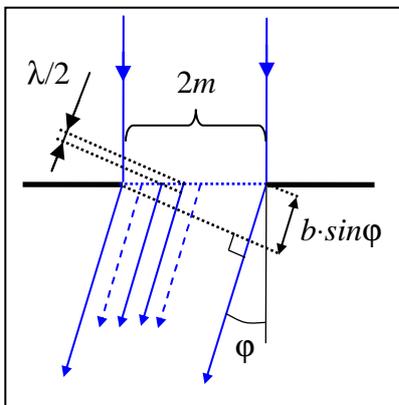


При этом $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

При $\varphi=0$ находится центральный максимум $I_{\varphi} = I_0$, значительно превосходящий по величине остальные максимумы.

Условие минимумов $b \sin \varphi = m\lambda$, где m – целое число. Центральный максимум ограничен с двух сторон первыми минимумами, положение которых задаётся углом $\sin \varphi = \pm \frac{\lambda}{b}$.

Дифракционная картина на экране в этом случае будет иметь вид чередующихся тёмных и светлых полос, причем яркость светлых сильно убывает по направлению от центральной полосы. Можно сказать, что на экране не будет резкого перехода от света к тени.

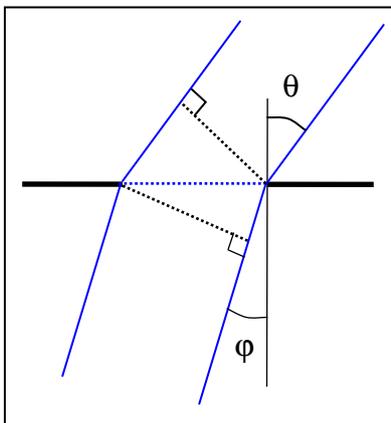


Рассмотрим условие минимумов для интерференционной картины от щели подробнее. Перепишем равенство

$$b \sin \varphi = m\lambda \text{ в виде } b \sin \varphi = 2m \frac{\lambda}{2}.$$

Выражение $\Delta L = 2m \frac{\lambda}{2}$ можно трактовать как сумму чётного числа $2m$ длин полуволн. Т.е. в случае минимума интенсивности всю щель можно разбить на чётное число одинаковых участков так, что разность хода волн от граничных точек двух любых соседних участков до точки

наблюдения равна $\frac{\lambda}{2}$. Но в этом случае, как известно, в точке наблюдения будет минимум интенсивности.



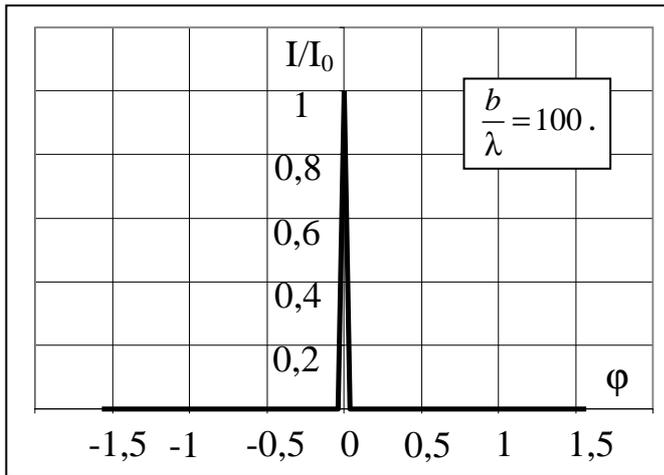
Если свет падает на щель не перпендикулярно, а под некоторым углом θ , то разность хода волн от краёв щели равна

$$\Delta L = b \sin \theta - b \sin \varphi = b(\sin \theta - \sin \varphi),$$

поэтому, аналогично, условие минимумов будет иметь вид

$$\Delta L = 2m \frac{\lambda}{2} = m\lambda \text{ или } b(\sin \theta - \sin \varphi) = m\lambda.$$

Предельный переход от волновой оптики к геометрической.



Рассмотрим положение первого мини-

мума для дифракции на щели

$\sin \varphi = \pm \frac{\lambda}{b}$. В случае $\frac{\lambda}{b} \ll 1$ это выражение

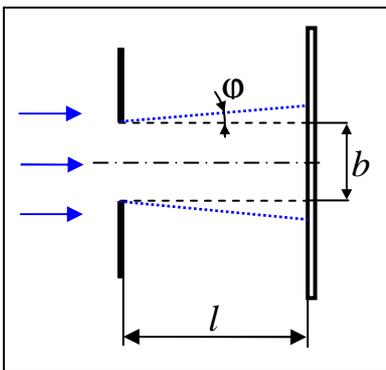
можно записать в виде $\varphi \approx \frac{\lambda}{b}$.

Но при $\frac{\lambda}{b} \ll 1$ относительные интенсивности

всех максимумов, кроме *центрального*, стремятся к нулю $I/I_0 \rightarrow 0$. Поэтому на экране

будет видна резкая граница тени от краёв щели. Подобную же картину можно получить применением методов геометрической оптики. Однако в данном случае будет наблюдаться не-

большое различие относительных размеров изображения щели на экране.



При построении методами геометрической оптики размеры щели и изображения на (параллельно расположенном) экране будут одинаковыми независимо от расстояния l между экраном и перегородкой с щелью.

Если строить изображение щели методом волновой оптики, то *граница тени соответствует первому минимуму*, положение

которого определяется углом $\varphi \approx \frac{\lambda}{b}$. Поэтому относительный размер изображения равен

$$\frac{b + 2 \cdot l \cdot \operatorname{tg} \varphi}{b} \approx \frac{b + 2 \cdot l \cdot \varphi}{b} = 1 + 2 \frac{l \cdot \frac{\lambda}{b}}{b} = 1 + 2 \cdot \frac{l \lambda}{b^2}.$$

Следовательно, если выполняется $\frac{l \lambda}{b^2} \ll 1$, то результаты построения методами волновой и геометрической оптики практически совпадают.

В обратном случае надо пользоваться методами волновой оптики. Но тогда следует различать ситуации, в которых либо $\frac{l \lambda}{b^2} \sim 1$, либо $\frac{l \lambda}{b^2} \gg 1$. Но дифракционные явления становятся

заметными, когда размер щели (отверстия) или преграды соизмерим с длиной волны света $b \sim \lambda$.

Тогда условие $\frac{l \lambda}{b^2} \gg 1$ примет вид $\frac{l}{b} \gg 1$. А это означает, что расстояние от перегородки до экрана много больше размера отверстия (преграды). Следовательно, лучи, падающие на экран

можно считать параллельными друг другу – это дифракция Фраунгофера. Применяя формулу для радиуса зон Френеля при дифракции Фраунгофера $r_m = \sqrt{ml\lambda}$, и учитывая, что $b \sim r_m$, найдём число зон Френеля, которые видно из точки наблюдения. В этом случае $m = \frac{b^2}{l\lambda} \ll 1$, т.е. видно только малую часть первой зоны.

Оставшийся случай $\frac{l\lambda}{b^2} \sim 1$ соответствует дифракции Френеля. Это можно пояснить, используя формулу для радиусов зон Френеля $r_m = \sqrt{m \frac{al\lambda}{(a+l)}}$. Принимая оценку величины отверстия $b \sim r_m$, получаем $b^2 = m \frac{al\lambda}{(a+l)}$, откуда из $\frac{l\lambda}{b^2} \sim 1$ следует $\frac{l\lambda}{\left(m \frac{al\lambda}{(a+l)}\right)} = \frac{(a+l)}{ma} \sim 1$. Это вы-

ражение означает, что расстояния от источника света соизмеримо с расстоянием от перегородки до экрана. Поэтому волна является сферической и наблюдается дифракция Френеля, при которой из точки наблюдения видно небольшое число зон Френеля.

Замечание. Формулу для первого минимума $b \sin \varphi = \lambda$ можно трактовать следующим образом: параллельные лучи света после прохождения отверстия шириной b отклоняются на угол φ , величина которого зависит от отношения $\frac{\lambda}{b}$. Это отклонение приводит к расхождению лучей – любой пучок параллельных лучей света после дифракции претерпевает «расхождение» на угловую величину, пропорциональную $\frac{\lambda}{b}$.

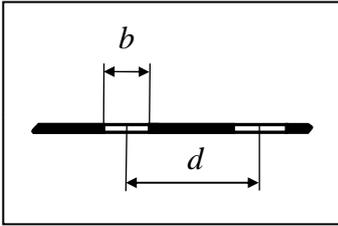
Т.к. $\sin \varphi \leq \varphi$ (в радианах), то закон расхождения лучей при дифракции можно записать в виде $\sin \varphi = \frac{\lambda}{b} \leq \varphi$ или $\varphi \frac{b}{\lambda} \geq 1$.

Следовательно, пучков света, состоящих из абсолютно параллельных лучей, быть *не может в принципе*. Это «запрещено» волновой природой света. Любое устройство, формирующее параллельные лучи, неизбежно будет приводить к явлению дифракции и, соответственно, к расхождению лучей.

Дифракционная решётка

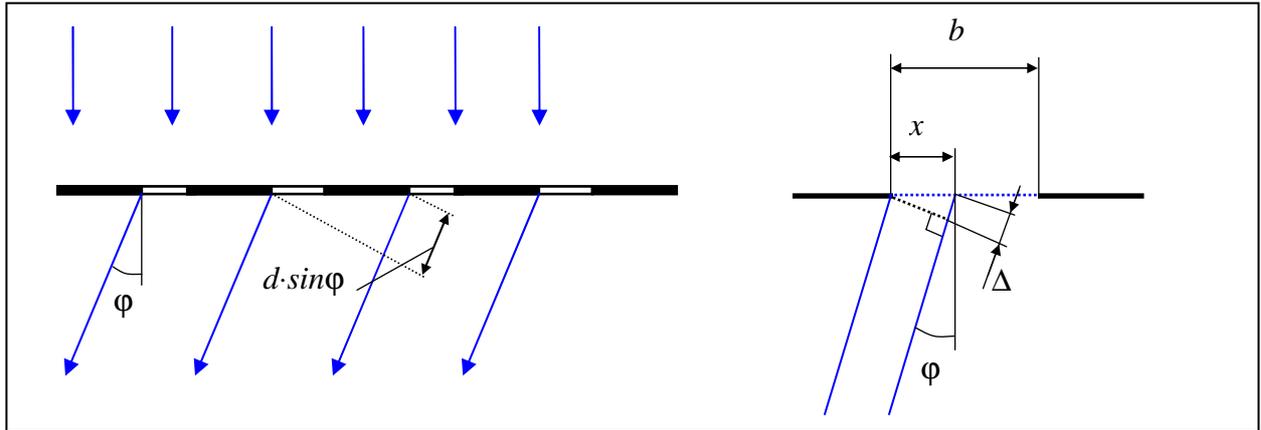
Интерференционная картина, образующаяся при наложении нескольких когерентных волн называется *многолучевой интерференцией*.

Будем исследовать интерференционную картину, получающуюся при дифракции света на системе параллельных одинаковых щелей, расположенных в одной плоскости. Такая система



реализуется в оптическом приборе – прозрачной дифракционной решётке. Обозначения: ширина щели b , расстояние между серединами соседних щелей d – эта величина называется *периодом дифракционной решётки*.

Экран, на котором формируется картина, расположен параллельно решётке и находится в фокальной плоскости собирающей линзы. Свет падает на решётку нормально (т.е. перпендикулярно плоскости, в которой лежат щели).



Проведём рассуждения при поиске результирующей амплитуды для системы щелей аналогично рассуждениям для одной щели из предыдущей лекции. Только теперь будем учитывать сумму лучей от N щелей. Во всех щелях выделим луч на расстоянии x от левого края щели. Оптическая разность хода таких лучей в соседних щелях равна $d \sin \varphi$. Поэтому результирующая амплитуда определяется вкладом лучей от всех щелей

$$\begin{aligned} \delta A_p = & K a_0 \cos(\omega t - k(x \sin \varphi)) + K a_0 \cos(\omega t - k(x \sin \varphi + d \sin \varphi)) + \\ & + K a_0 \cos(\omega t - k(x \sin \varphi + 2d \sin \varphi)) + \dots + K a_0 \cos(\omega t - k(x \sin \varphi + (N-1)d \sin \varphi)) \end{aligned}$$

Для дальнейших вычислений можно воспользоваться формулой Эйлера

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha).$$

где $i^2 = -1$. (Эта формула является основной в теории комплексного анализа, и часто применяется в теоретических расчётах).

Отсюда, в частности, следует, что $\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$ и $\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$.

Поэтому можно записать

$$\begin{aligned}\delta A_p &= Ka_0 \left(\cos(\omega t - k(x \sin \varphi)) + \dots + \cos(\omega t - k(x \sin \varphi + (N-1)d \sin \varphi)) \right) = \\ &= Ka_0 \left(\frac{e^{i(\omega t - k(x \sin \varphi))} + e^{-i(\omega t - k(x \sin \varphi))}}{2} + \dots + \frac{e^{i(\omega t - k(x \sin \varphi + (N-1)d \sin \varphi))} + e^{-i(\omega t - k(x \sin \varphi + (N-1)d \sin \varphi))}}{2} \right) = \\ &= \frac{Ka_0}{2} \left(e^{i(\omega t - k(x \sin \varphi))} + \dots + e^{i(\omega t - k(x \sin \varphi + (N-1)d \sin \varphi))} + e^{-i(\omega t - k(x \sin \varphi))} + \dots + e^{-i(\omega t - k(x \sin \varphi + (N-1)d \sin \varphi))} \right)\end{aligned}$$

или, после перегруппировки:

$$\delta A_p = \frac{A_0}{2b} \left(e^{i(\omega t - k(x \sin \varphi))} \left(1 + e^{i(-kd \sin \varphi)} + \dots + e^{i(-k(N-1)d \sin \varphi)} \right) + e^{-i(\omega t - k(x \sin \varphi))} \left(1 + e^{ikd \sin \varphi} + \dots + e^{ik(N-1)d \sin \varphi} \right) \right).$$

Используя формулы для частичной суммы геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1} = \frac{1 - q^N}{1 - q},$$

получаем равенство $1 + e^{i(-kd \sin \varphi)} + \dots + e^{i(-k(N-1)d \sin \varphi)} = \frac{1 - e^{i(-Nkd \sin \varphi)}}{1 - e^{i(-kd \sin \varphi)}}.$

Затем проводим преобразования

$$\frac{1 - e^{i(-Nkd \sin \varphi)}}{1 - e^{i(-kd \sin \varphi)}} = \frac{\left(e^{\frac{iNkd \sin \varphi}{2}} - e^{\frac{i(-Nkd \sin \varphi)}{2}} \right) e^{-\frac{iNkd \sin \varphi}{2}}}{\left(e^{\frac{ikd \sin \varphi}{2}} - e^{\frac{i(-kd \sin \varphi)}{2}} \right) e^{-\frac{ikd \sin \varphi}{2}}} = \frac{\left(e^{\frac{iNkd \sin \varphi}{2}} - e^{\frac{i(-Nkd \sin \varphi)}{2}} \right) / 2i}{\left(e^{\frac{ikd \sin \varphi}{2}} - e^{\frac{i(-kd \sin \varphi)}{2}} \right) / 2i} e^{-\frac{i(N-1)kd \sin \varphi}{2}}.$$

Следовательно

$$1 + e^{i(-kd \sin \varphi)} + \dots + e^{i(-k(N-1)d \sin \varphi)} = \frac{\left(e^{\frac{iNkd \sin \varphi}{2}} - e^{\frac{i(-Nkd \sin \varphi)}{2}} \right) / 2i}{\left(e^{\frac{ikd \sin \varphi}{2}} - e^{\frac{i(-kd \sin \varphi)}{2}} \right) / 2i} e^{-\frac{i(N-1)kd \sin \varphi}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} e^{-\frac{i(N-1)kd \sin \varphi}{2}}$$

Аналогично

$$1 + e^{ikd \sin \varphi} + \dots + e^{ik(N-1)d \sin \varphi} = \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} e^{\frac{i(N-1)kd \sin \varphi}{2}}.$$

Тогда

$$\delta A_p = \frac{Ka_0}{2} \left(e^{i(\omega t - k(x \sin \varphi))} \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} e^{-\frac{i(N-1)kd \sin \varphi}{2}} + e^{-i(\omega t - k(x \sin \varphi))} \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} e^{\frac{i(N-1)kd \sin \varphi}{2}} \right),$$

$$\delta A_p = K a_0 \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} \left(\frac{e^{i\left(\omega t - k(x \sin \varphi) - \frac{(N-1)kd \sin \varphi}{2}\right)} + e^{-i\left(\omega t - k(x \sin \varphi) - \frac{(N-1)kd \sin \varphi}{2}\right)}}{2} \right),$$

$$\delta A_p = K a_0 \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} \cos\left(\omega t - k(x \sin \varphi) - \frac{(N-1)kd \sin \varphi}{2}\right).$$

Учитывая, что $K a_0 = \frac{A_0}{b} dx$, получаем

$$\begin{aligned} A_p &= \int_0^b \frac{A_0}{b} \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} \cos\left(\omega t - k(x \sin \varphi) - \frac{(N-1)kd \sin \varphi}{2}\right) dx = \\ &= -\frac{A_0}{bk \sin \varphi} \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} \sin\left(\omega t - k(x \sin \varphi) - \frac{(N-1)kd \sin \varphi}{2}\right) \Bigg|_0^b = \\ &= -\frac{A_0}{bk \sin \varphi} \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} \left(\sin\left(\omega t - kb \sin \varphi - \frac{(N-1)kd \sin \varphi}{2}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{(N-1)kd \sin \varphi}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Т.к.

$$\sin \alpha - \sin \beta = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) = -2 \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right)$$

то

$$A_p = 2 \frac{A_0}{bk \sin \varphi} \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} \sin\left(\frac{kb \sin \varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{kb \sin \varphi}{2} - \frac{(N-1)kd \sin \varphi}{2}\right)$$

С учетом $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ получаем выражение для амплитуды колебаний в точке наблюдения

$$A_N = 2A_0 \left| \frac{\sin\left(\frac{kb \sin \varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{Nkd \sin \varphi}{2}\right)}{kb \sin \varphi \sin\left(\frac{kd \sin \varphi}{2}\right)} \right| = A_0 \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi\right) \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} Nd \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) b \sin \varphi \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi\right)} \right|$$

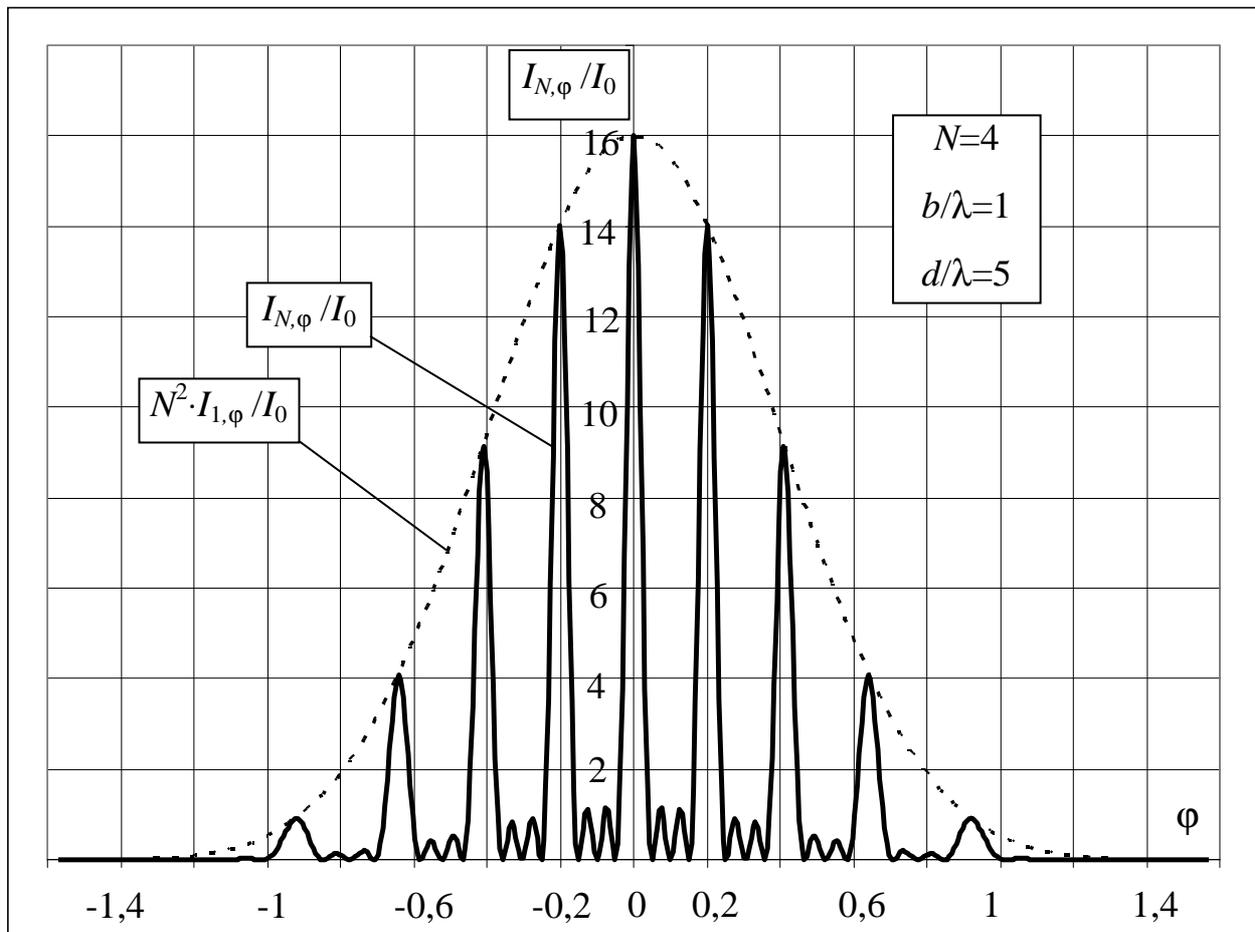
Так как амплитуда колебаний от одной щели равна $A_1 = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) b \sin \varphi}$, то амплитуда от N

щелей $A_N = A_1 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} Nd \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi\right)}$.

Поэтому интенсивность света в дифракционной картине

$$I_{N,\varphi} = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) b \sin \varphi} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} Nd \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi\right)} \right)^2 = I_{1,\varphi} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} Nd \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi\right)} \right)^2,$$

где $I_{1,\varphi} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi\right)^2}$ - интенсивность от одной щели.



Из этих формул следует, что интенсивность центрального максимума ($\varphi=0$) для системы

из N щелей больше интенсивности центрального максимума от одной щели в N^2 раз

$$I_{N,0} = I_{1,0} N^2$$

Максимумы и минимумы дифракционной картины можно подразделить на *главные* и *вторичные*.

Главные максимумы выделяются условием $I_{N,\varphi} = I_{1,\varphi} N^2$, т.е. $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} N d \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi\right)} = \pm N$.

Пусть $\alpha = m \cdot \pi + \beta$ (m – целое число) и N – целое число, тогда при $\beta \rightarrow 0$ справедливо:

$$\frac{\sin(N(m \cdot \pi + \beta))}{\sin(m \cdot \pi + \beta)} = (-1)^{(N-1)m} \frac{\sin(N\beta)}{\sin(\beta)} \approx N \cdot (-1)^{(N-1)m}.$$

Поэтому главные максимумы определяются условием $\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi = m\pi$, т.е.

$$d \sin \varphi = m\lambda.$$

Целое число m называется номером главного максимума или *порядком спектра*.

Главные минимумы соответствуют условию минимума интенсивности от одной щели $I_{1,\varphi} = 0$, т.е. $b \sin \varphi = k\lambda$, где k – целое число.

Между главными максимумами находятся вторичные максимумы и минимумы. Вторич-

ным минимумам соответствуют условия $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} N d \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi\right)} = 0$. Т.к. они находятся между сосед-

ними главными максимума с номерами m и $m+1$, то их положение можно определить из соот-

ношения $\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} N d \sin \varphi\right) = 0$ при условии $m \frac{\lambda}{d} < \sin \varphi < (m+1) \frac{\lambda}{d}$. Это выполняется, если

$\sin \varphi = \left(m + \frac{n}{N}\right) \frac{\lambda}{d}$ и $1 < n < N - 1$. Целое число n называется *номером вторичного минимума*.

Следовательно, **количество вторичных минимумов между любыми двумя главными максимумами на единицу меньше числа щелей N** .

Интенсивность вторичных максимумов значительно меньше интенсивности главных максимумов.

Положение главных максимумов и минимумов определяется длиной волны падающего света. Поэтому решетка способна разлагать излучение в спектр, то есть она *является спектральным прибором*. Если свет немонохроматический, то в спектре будут наблюдаться главные

максимумы разных длин волн. Но центральный максимум будет содержать все длины волн. Поэтому он наиболее яркий.

При разложении белого света для первого максимума меньший угол у фиолетового цвета, а больший – у красного. В этом смысле дифракционная решётка как спектральный прибор противоположна стеклянной призме в опыте Ньютона, в которой наибольшее отклонение испытывали лучи фиолетового цвета.

Замечание. Интенсивность главных максимумов убывает с ростом номера m . Как правило, на практике количество достаточно различных максимумов не превышает 3.

Замечание. Если свет падает на дифракционную решетку под углом θ , то положение главных максимумов определяется соотношением

$$d(\sin \varphi - \sin \theta) = m\lambda.$$

Спектральные характеристики дифракционных решёток.

Угловая дисперсия $D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$, где $\delta\varphi$ - угловое расстояние между двумя главными максимумами

одного порядка, соответствующим волнам, длины которых отличаются на величину $\delta\lambda$. Из

формулы $d \sin \varphi = m\lambda$ получаем $d \cos \varphi \cdot \delta\varphi = m \cdot \delta\lambda$, откуда $D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}$.

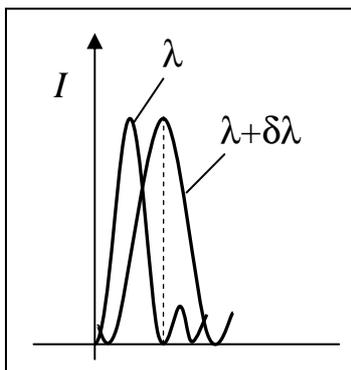
Дисперсионная область. Если спектры соседних порядков перекрываются, то спектральный прибор становится непригодным для исследования соответствующих участков спектра. Максимальная ширина спектрального интервала $\Delta\lambda$, при которой еще не происходит перекрытия спектров, называется дисперсионной областью спектрального прибора. Для решетки из условия совпадения максимумов соседних порядков для разных длин волн

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda, \text{ получаем, что должно быть } \Delta\lambda < \frac{\lambda}{m}.$$

Как правило, $m \leq 3$. Поэтому решетки пригодны для исследования широких участков спектра.

Разрешающая сила Разрешающей способностью спектрального прибора называется величина

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}, \text{ где } \delta\lambda - \text{минимальная разность длин двух волн, при которой они воспринимаются отдельно друг от друга.}$$



Критерий разрешения Рэлея. Спектральные линии с близкими значениями λ и $\lambda + \delta\lambda$ считаются разрешенными (т.е. визуально воспринимаются разделёнными), если главный максимум для одной длины волны совпадает по своему положению с первым минимумом для другой длины волны.

Если главный максимум порядка m для длины волны $\lambda + \delta\lambda$

накладывается на первый вторичный минимум того же порядка, то $m(\lambda + \delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda$. От-

куда $m\delta\lambda = \frac{\lambda}{N}$, поэтому **разрешающая сила дифракционной решётки** определяется по фор-

муле $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$.

Дифракционные решётки бывают прозрачные и отражающие. Прозрачные изготавливаются из стеклянных или кварцевых пластинок, на поверхность которых нанесены штрихи, непрозрачные для света. На зеркальную поверхность отражательных решёток тоже наносят штрихи. Типичным примером отражательной дифракционной решётки являются компьютерные компакт-диски.

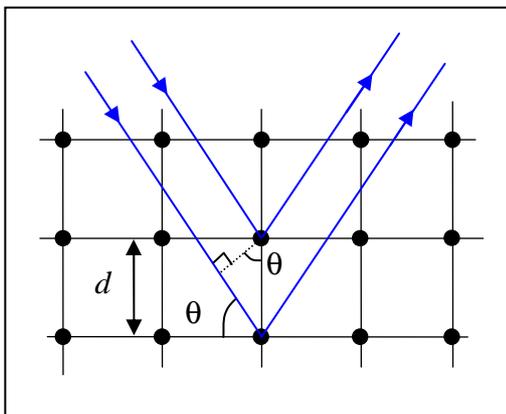
Дифракция рентгеновских лучей.

Если две дифракционные решетки наложить одна на другую так, чтобы их штрихи были взаимно перпендикулярными, то такая пластинка будет являться двумерной решёткой.

Естественным примером *трёхмерной* дифракционной решётки являются все кристаллические тела. В расположении атомов у таких тел наблюдается определённая упорядоченность, характеризующаяся пространственным периодом. Период расположения атомов зависит от направления. Среднее расстояние между атомами в кристаллических телах имеет порядок 10^{-10} м, что сопоставимо с длиной волны рентгеновского излучения. Поэтому на кристаллических телах наблюдается дифракция рентгеновских лучей.

Впервые дифракция рентгеновских лучей от кристаллов была экспериментально обнаружена немецкими физиками М. Лауэ, В. Фридрихом и П. Книппингом в 1912 г.

Под действием рентгеновского излучения каждый атом кристаллической решетки становится вторичным источником сферических волн той же частоты, что и падающих волн. Русский



ученый Ю. В. Вульф и английские физики У. Г. и У. Л. Брэгги показали независимо друг от друга, что расчет дифракционной картины от кристаллической решетки можно провести следующим простым способом.

Проведем через узлы кристаллической решетки параллельные равноотстоящие плоскости. В дальнейшем мы будем называть их *атомными плоскостями*. Если падающая на кристалл волна плоская, то огибающая вто-

ричных волн, порождаемых атомами, лежащими в такой плоскости, также будет плоской. Таким образом, суммарное излучение атомов, лежащих в одной атомной плоскости, можно пред-

ставить в виде плоской волны, отразившейся от усеянной атомами поверхности по обычным законам отражения. Плоские вторичные волны, отразившиеся от разных атомных плоскостей, когерентны и будут интерферировать между собой подобно волнам, посылаемым в данном направлении различными щелями дифракционной решетки. При этом вторичные волны будут практически гасить друг друга во всех направлениях, кроме тех, для которых разность хода между соседними волнами является кратной λ . Разность хода двух волн, отразившихся от соседних атомных плоскостей, равна $2d \sin \theta$, где d – расстояние между атомными плоскостями, θ – угол, дополнительный к углу падения и называемый углом *скольжения* падающих лучей. Следовательно, направления, в которых получают дифракционные максимумы, определяются условием:

$$2d \sin \theta = m\lambda .$$

Соотношение называется *формулой Вульфа – Брэгга*.

Плоскости, в которых наблюдается наибольшее количество атомов, называются *главными атомными* (или *кристаллографическими*) плоскостями. При дифракции рентгеновского излучения на кристалле наблюдается отражение от большого количества различных атомных плоскостей, но наибольшая интенсивность у излучения, отразившегося от главных атомных плоскостей.

Рентгеновский структурный анализ (рентгеноструктурный анализ) - это метод исследования атомно-молекулярного строения веществ, преимущественно с кристаллической структурой, основанный на изучении дифракционной картины, полученной при взаимодействии с исследуемым образцом рентгеновского излучения.

Например, *метод Лауэ* - простейший метод получения рентгенограмм от монокристаллов. Кристалл в эксперименте Лауэ неподвижен, а используемое рентгеновское излучение имеет непрерывный спектр. Расположение дифракционных пятен на *лауэграммах* зависит от симметрии кристалла и его ориентации относительно падающего луча. По характеру пятен на лауэграммах можно выявить внутренние напряжения и некоторые др. дефекты кристаллической структуры. Методом Лауэ проверяют качество монокристаллов при выборе образца для его более полного структурного исследования.

Рентгеновская спектроскопия - получение рентгеновских спектров испускания и поглощения и их применение к исследованию электронной энергетической структуры атомов, молекул и твёрдых тел. Для получения рентгеновских спектров исследуемое вещество бомбардируют электронами в рентгеновской трубке либо возбуждают флуоресценцию исследуемого вещества под действием рентгеновского излучения.