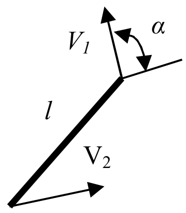
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА
СТУДЕНТОВ ПО ФИЗИКЕ
2017 г.

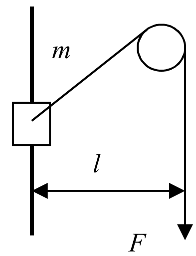
III тур Всероссийской физической олимпиады студентов технических вузов прошел 16 мая 2017 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э. Баумана.

Победители в командном зачете: команда Московского государственного технического университета им Н.Э. Баумана, набравшая 139 баллов - первое место, команда Московского авиационного института, набравшая 80 баллов - второе место, команда Калужского филиала Московского государственного технического университета им Н.Э. Баумана, набравшая 78 баллов - третье место.

Победители в личном зачете: Малинский Антон Олегович, МГТУ им. Н.Э. Баумана – первое место, Бланк Сергей Сергеевич, МГТУ им. Н.Э. Баумана – второе место, Аксенов Никита Владимирович, КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана и Нгуен Ван Ту, МАИ - третье место.



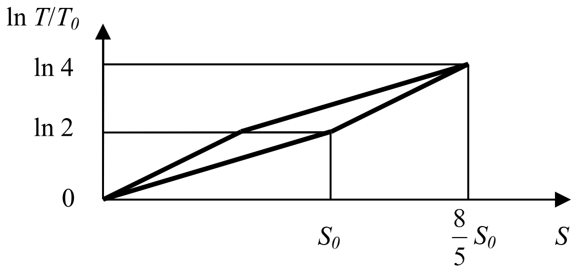
Задача 1. Две частицы движутся в плоскости с постоянными по модулю скоростями V_1 и V_2 таким образом, что угол между векторами скоростей всегда равен α. В начальный момент расстояние между частицами равно l. Известно, что в процессе дальнейшего движения частицы встретились в некоторой точке О. Определить перемещение первой a, и второй b частицы от начального момента до момента встречи. 12



Задача 2. Тело массой m может двигаться без трения по вертикальной направляющей. К телу одним концом привязана нить, которая перекинута через идеальный невесомый блок, находящийся от направляющей на расстоянии l. К другому концу нити приложена постоянная по величине сила $F > mg$. Определить период малых колебаний тела. 12

Задача 3. Очень большое число N неподвижных, взаимодействующих частиц распределены случайным образом в сфере радиуса R, таким образом, что плотность вероятности нахождения частиц в любой точке одинакова. Энергия взаимодействия частиц определяется соотношением $W = B/r^4$, где r – расстояние между частицами, где B константа. Определить энергию взаимодействия системы, если радиус частиц равен $r_0 \ll R$. 10

Задача 4.Круговой термодинамический процесс с одним киломолем одноатомного газа в координатах $\left(\ln\frac{T}{T_0}, S\right)$ представляет из себя параллелограмм. Нарисовать процесс в координатах (p,V), считая, что он состоит из прямых линий, а минимальная температура цикла известна и равна T_0, а минимальное давление p_0. 15



Задача 5. В конус с углом при вершине равнымα вставлена сфера радиуса R. Линия соприкосновения конуса и сферы разделяет сферу на две части. Одну часть зарядили зарядом q, вторую зарядом -q равномерно по поверхности. Определить напряженность электрического поля в вершине конуса. 14

Задача 6. В начале декартовой системы координат находится точечный заряд q. В точке пространства, определяемой радиус-вектором $\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, расположен электрический диполь с дипольным моментом p, ориентированным вдоль оси z. Определить вектор силы $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, действующий на диполь со стороны заряда. 10

Задача 7. Два взаимно когерентных пучка плоскополяризованного света интенсивностями I_1 и I_2 пересекаются под очень малым углом, образуя на экране интерференционную картину. Угол между плоскостями поляризации пучков равен φ. Определить максимальную и минимальную интенсивность света на экране. 12

Задача 8. Температура на поверхности земли имеет ярко выраженную суточную периодичность. По прогнозу метеорологов известны среднесуточное значение температуры $<T>$ и амплитуда гармонических

колебаний температуры T_0. Во время посева, как правило, величина T_0 превышает положительную величину <T>. На какую глубину необходимо поместить семена, чтобы они не подвергались воздействию отрицательной температуры? Нестационарный процесс теплопроводности земли в одномерном приближении описывается уравнением Фурье $\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}$, a^2 = $4\cdot10^{-3}$см^2/с. Известно, что в полупространстве $x > 0$ устанавливается гармоническое изменение температуры во времени $e^{-i\omega t}F(x)$, что позволяет определить зависимость температуры земли от координаты x.
Расчёт выполнить при T = 10°C, <T> = 5°C.

Решения задач

Решение задачи 1. Из условия движения по траектории, когда угол между $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$ равен α, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен также α. Откуда $\frac{V_1}{a}=\frac{V_2}{b}$. Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен α.
Угол при вершине О треугольника состоящего из l, a, b равен α.
Откуда $l^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)$

$$l^2 = \left(b\frac{V_1}{V_2}\right)^2 + b^2 - 2\left(b\frac{V_1}{V_2}\right)b\cos(\alpha) = b^2\left(1+\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 - 2\frac{V_1}{V_2}\cos(\alpha)\right)$$

$$b^2 = \frac{l^2}{\left(1+\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2-2\frac{V_1}{V_2}\cos(\alpha)\right)},\ a^2 = \frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 l^2}{\left(1+\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2-2\frac{V_1}{V_2}\cos(\alpha)\right)} = \frac{l^2}{\left(1+\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2-2\frac{V_2}{V_1}\cos(\alpha)\right)}$$

Решение задачи 2. Сила натяжения нити F.
Точка равновесия $F\cos\alpha_0 = m\,g$, α_0- угол между нитью и вертикалью.
Уравнение движенияпри $\alpha_0 \approx \alpha$

$$F\cos\alpha - mg + m\ddot{x} = 0$$
$$F(\cos\alpha - \cos\alpha_0) + m_1\ddot{x} = 0$$
$$2Fsin\left(\frac{\alpha_0+\alpha}{2}\right)sin\left(\frac{\alpha_0-\alpha}{2}\right) + m\ddot{x} = 0$$
$$F(\alpha_0-\alpha)sin(\alpha_0) + m\ddot{x} = 0$$

Учитывая, что $x = \frac{l(\alpha_0-\alpha)}{sin^2\alpha_0}$, $\frac{x}{l}sin^2\alpha_0 = (\alpha_0-\alpha)$

$$F\left(\frac{x}{l}sin^3\alpha_0\right) + m_1\ddot{x} = 0$$
$$\ddot{x} + \left(\frac{F}{m_1 l}sin^3\alpha_0\right)x = 0$$
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{F}{ml}(sin\alpha_0)^3\right)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{F}{ml}\left(\sqrt{1-\left(\frac{mg}{F}\right)^2}\right)^3\right)}}$$

Решение задачи 3. Воспользуемся общей формулой для определения энергии одной частицы с учетом $r_0 \ll R$

$$w = \int ndV\frac{B}{r^4} = n\int 4\pi r^2 dr\frac{B}{r^4} = 4\pi nB\int dr\frac{1}{r^2}$$

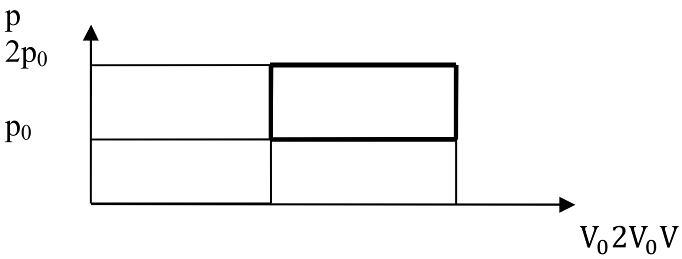
$$4\pi nB\int\frac{dr}{r^2} = 4\pi nB\int_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r^2} = 4\pi nB\left(\frac{1}{2r_0} - \frac{1}{2r^{\infty}}\right)$$

$$W = \frac{1}{2} wn \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{2} 4\pi nB \frac{1}{2r_0} N = \frac{\pi BnN}{r_0} = \frac{3BN^2}{4r_0 R^3}$$

Решение задачи 4.

$$dQ = CdT, \;\; dS = Cd(lnT), \Delta S = C\left(ln\frac{T_2}{T_1}\right) = ClnT + A$$

Из рисунка видно, что это политропные процессы, и теплоемкости отличаются в $\frac{5}{3}$ раза. Для одноатомного газа $\gamma = \frac{5}{3} = \frac{C_P}{C_V}$, следовательно процессы изобара и изохора и изображаются они прямыми линиями. $p_0 V_0 = RT_0, V_0 = \frac{RT_0}{p_0}$



Решение задачи 5. Высоты сегментов сферы $h = R \pm R\sin\frac{\alpha}{2}$

Поверхностная плотность внутреннего сегмента $\sigma_1 = \frac{q}{2\pi R^2\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$

Внешнего сегмента $\sigma_2 = \frac{q}{2\pi R^2\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$

Поле от каждого сегмента равно половине поля от равномерно заряженной сферы.

$E_1 = \frac{1}{2}\frac{4\pi R^2 \sigma_1}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$E_2 = \frac{1}{2}\frac{4\pi R^2 \sigma_2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2} = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\sin^2\frac{\alpha}{2}$

Далее $E = E_1 - E_2 = \frac{q\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{1}{1-\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{2q\sin^3\frac{\alpha}{2}}{4\pi\varepsilon_0 R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

Решение задачи 6. Поменяем заряд и диполь местами. В сферической системе координат

$$x = R\sin\beta\cos\alpha \,, y = R\sin\beta\sin\alpha \,, z = R\cos\beta \,, \qquad R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \,, cos^2\alpha = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \,, \sin^2\beta = \frac{x^2 + y^2}{R^2} \,, cos^2\beta = \frac{z^2}{R^2}$$

Напряженность поля создаваемая диполем имеет две составляющие , E_rвдоль радиус вектора иE_τперпендикулярно радиус- вектору в плоскости r-z.

$$E_r = \frac{p\cos\beta}{2\pi\varepsilon_0 R^3}, E_\tau = \frac{p\sin\beta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Тогда проецируя их на оси x,y,z:

$$E_x = \frac{p\cos\beta}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\sin\beta\cos\alpha + \frac{p\sin\beta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\cos\beta\cos\alpha = \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\sin\beta\cos\beta\cos\alpha$$

$$E_y = \frac{p\cos\beta}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\sin\beta\sin\alpha + \frac{p\sin\beta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\cos\beta\sin\alpha = \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\sin\beta\cos\beta\sin\alpha$$

$$E_z = \frac{p\cos\beta}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\cos\beta - \frac{p\sin\beta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\sin\beta = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\cos^2\beta - \frac{1}{2}\sin^2\beta\right)$$

$$E_x = \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{R^2}\frac{z^2}{R^2}\frac{x^2}{x^2+y^2}} = \frac{3pzx}{4\pi\varepsilon_0 R^5} = \frac{3pac}{4\pi\varepsilon_0 R^5}$$

$$E_y = \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{R^2}\frac{z^2}{R^2}\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \frac{pzy}{4\pi\varepsilon_0 R^5} = \frac{3pbc}{4\pi\varepsilon_0 R^5}$$

$$E_z = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(2\frac{z^2}{R^2} - \frac{x^2+y^2}{R^2}\right) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(3\frac{c^2}{R^2} - 1\right)$$

Решение задачи 7. Разложим вектор второго пучка на две составляющие со взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации, одна из которых совпадает с плоскостью поляризации. $E_{21} \cong \sqrt{I_2}\, cos\varphi, E_{22} \cong \sqrt{I_2} sin\varphi$

Тогда в плоскости поляризации I_1:

$$I = I_1 + I_2 cos^2\varphi + 2\sqrt{I_1 I_2} cos\varphi\, cos\beta$$

В перпендикулярной плоскости $I_\perp = I_2 sin^2\varphi$

Полная интенсивность

$$I_0 = I + I_\perp = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\, cos\varphi\, cos\beta$$

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\, cos\varphi, I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}\, cos\varphi$$

Решение задачи 8.

Уравнение волны $T = T_0\, e^{-i(\omega t - kx)}$

Подставим в уравнение теплопроводности

$-T_0\, i\omega e^{-i(\omega t - kx)} = a^2 T_0\, (ik)^2 e^{-i(\omega t - kx)}$

$-i\omega = -a^2 k^2, \;\; k = \frac{\sqrt{\omega}}{a}\sqrt{i} = \frac{\sqrt{\omega}}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,(1+i)$

$T = T_0 e^{-i(\omega t)}\, e^{+i(kx)} = T_0 e^{-i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x\right)}\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}$

Условие непромерзания почвы $T_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x} = \mathrm{T_{ср}}$

$$x = \sqrt{\frac{2a^2}{\omega}}\, \ln\frac{T_0}{\mathrm{T_{ср}}} = \sqrt{\frac{t_c a^2}{\pi}}\, \ln\frac{T_0}{\mathrm{T_{ср}}} = 0{,}073\text{м}$$