

## Вопросы для подготовки к экзамену по аналитической геометрии (ИУ, РЛ, БМТ)

1. Геометрические векторы и связанные с ними понятия. Линейные операции над векторами и их свойства.
2. Ортогональная проекция и ее свойства.
3. Понятие линейной зависимости (независимости) векторов. Критерий линейной зависимости. Критерии линейной зависимости двух и трех векторов. Доказательство линейной зависимости четырех векторов.
4. Базис в пространствах  $V_1, V_2, V_3$ . Существование и единственность разложения вектора по базису. Вычисление линейных операций над векторами в координатах.
5. Понятие ортонормированного базиса. Связь координат вектора в ортонормированном базисе и его ортогональных проекций на векторы этого базиса. Формулы вычисления длины вектора, его направляющих косинусов, угла между двумя векторами в ортонормированном базисе.
6. Определение скалярного произведения векторов, его связь с ортогональной проекцией вектора. Свойства скалярного произведения и его вычисление в ортонормированном базисе.
7. Правые и левые тройки векторов. Определение векторного произведения векторов. Свойства векторного произведения и его вычисление в ортонормированном базисе. Вычисление площади параллелограмма и треугольника, построенных на векторах.
8. Определение смешанного произведения векторов. Его свойства и вычисление в ортонормированном базисе. Вычисление объема параллелепипеда и пирамиды, построенных на некопланарных векторах.
9. Определение декартовой прямоугольной системы координат. Преобразование координат. Параллельный перенос системы координат.
10. Простейшие задачи аналитической геометрии: связь координат вектора с координатами его начала и конца; деление отрезка в заданном отношении; длина отрезка.
11. Понятия алгебраической кривой на плоскости (поверхности в пространстве) и ее порядка.
12. Теорема о том, что любое уравнение 1-й степени в прямоугольных координатах на плоскости определяет прямую. Нормальный вектор прямой. Общее уравнение прямой.
13. Вывод различных уравнений прямой на плоскости (с угловым коэффициентом, векторного, параметрических, канонического, через две заданные точки, „в отрезках“). Геометрическое толкование входящих в эти уравнения параметров.
14. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, заданных своими общими или каноническими уравнениями. Вычисление угла между двумя прямыми.
15. Нормальное уравнение прямой. Отклонение точки от прямой. Формула для вычисления расстояния от точки до прямой.
16. Теорема о том, что любое уравнение 1-й степени в прямоугольных координатах в пространстве определяет плоскость. Нормальный вектор плоскости. Общее уравнение плоскости.
17. Вывод различных уравнений плоскости (векторного, через три заданные точки, „в отрезках“). Геометрическое толкование входящих в эти уравнения параметров.
18. Общие уравнения прямой в пространстве. Направляющий вектор прямой.
19. Вывод различных уравнений прямой в пространстве (векторного, параметрических, канонических, через две заданные точки). Геометрическое толкование входящих в эти уравнения параметров. Способы преобразования уравнений прямой из одного вида в другой.
20. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Вычисление угла между плоскостями.
21. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве. Вычисление угла между двумя пространственными прямыми. Условие принадлежности двух прямых одной плоскости. Скрещивающиеся прямые.
22. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Вычисление угла между пространственной прямой и плоскостью. Условие принадлежности прямой заданной плоскости.
23. Вычисление расстояния от точки до плоскости и до прямой в пространстве. Вычисление расстояния между прямыми в пространстве.

24. Геометрические определения эллипса, гиперболы, параболы. Вывод их канонических уравнений. Параметры этих кривых (полуоси, центр, фокусы, эксцентриситет, директрисы, полуфокусное расстояние, вершины, асимптоты). Формулировки оптических свойств.
25. Исследование неполного уравнения  $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$  кривой второго порядка в случаях: 1)  $A \neq 0, C \neq 0$ ; 2)  $A = 0, C \neq 0$ ; 3)  $A \neq 0, C = 0$ .
26. Понятие поверхности вращения и вывод ее уравнения. Поверхности, образованные вращением эллипса, гиперболы и параболы и их канонические уравнения. Преобразование поверхности с помощью сжатия.
27. Понятие цилиндрической поверхности и вывод ее уравнения. Канонические уравнения цилиндрических поверхностей 2-го порядка.
28. Метод сечений исследования формы поверхности.
29. Исследование неполного уравнения поверхности второго порядка.
30. Понятие матрицы. Виды матриц. Равенство матриц. Линейные операции над матрицами и их свойства. Операция транспонирования матриц и ее свойства.
31. Определители: определение и формулировки свойств.
32. Умножение матриц. Свойства умножения матриц.
33. Блочные матрицы и операции над ними (сложение, умножение) Прямая сумма матриц.
34. Элементарные преобразования строк (столбцов) матрицы. Теорема о приведении матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк.
35. Понятие обратной матрицы. Теорема о ее единственности. Критерий существования. Присоединенная матрица. Определитель обратной матрицы.
36. Теоремы об обратной матрице произведения двух невырожденных матриц и транспонированной матрицы.
37. Методы вычисления обратной матрицы. Решение матричных уравнений вида  $AX = B, XA = B$  с невырожденной матрицей  $A$ .
38. Минор матрицы и ранг матрицы. Теорема о ранге транспонированной матрицы.
39. Понятие линейной зависимости (независимости) строк (столбцов) матрицы. Критерий линейной зависимости. Теорема о сохранении ранга матрицы при элементарных преобразованиях (без док-ва).
40. Теорема о базисном миноре. Ее следствия (критерий невырожденности квадратной матрицы, теорема о ранге матрицы как максимальном количестве ее линейно независимых строк или столбцов).
41. Методы вычисления ранга матрицы.
42. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Различные формы записи СЛАУ.
43. Понятие совместности СЛАУ. Теорема Кронекера — Капелли.
44. Системы с квадратной невырожденной матрицей (крамеровские) и правило Крамера.
45. Однородные СЛАУ и свойства их решений.
46. Фундаментальная система решений (ФСР). Доказательство существования ФСР. Нормальная ФСР. Критерий существования ненулевых решений однородной СЛАУ.
47. Теорема о структуре общего решения однородной СЛАУ (доказательство в случае нормальной ФСР).
48. Неоднородные СЛАУ и свойства ее решений. Теорема о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.

### Литература

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005.
2. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1986.

**Замечание.** Теоремы, критерии, следствия, свойства, условия необходимо знать с доказательствами, а формулы для вычисления — с их выводом (если явно не указано иное).