ЛАиФНП, 2-й сем., ИУ-РЛ-БМТ (2021–22)

Домашнее задание „Линейная алгебра“

Задача 1 (*1 балл*)

В линейном пространстве V_3 свободных векторов выбран правый ортонормированный базис $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$. Этот базис поворачивается вокруг вектора $\boldsymbol{e}_1$ (это один из базисный векторов) на угол φ (в положительном направлении, если $\varphi > 0$, т.е. против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{e}_1$). Затем полученный базис поворачивается вокруг вектора $\boldsymbol{e}_2$ (это один из базисных векторов нового базиса) на угол ψ. В результате получается новый базис $(\boldsymbol{i}',\ \boldsymbol{j}',\ \boldsymbol{k}')$. Найти матрицу перехода из старого базиса в новый.

Вар.	$\boldsymbol{e}_1$	φ	$\boldsymbol{e}_2$	ψ
1	$\boldsymbol{i}$	45°	$\boldsymbol{k}$	135°
2	$\boldsymbol{j}$	135°	$\boldsymbol{i}$	30°
3	$\boldsymbol{i}$	30°	$\boldsymbol{j}$	135°
4	$\boldsymbol{j}$	150°	$\boldsymbol{i}$	60°
5	$\boldsymbol{i}$	60°	$\boldsymbol{j}$	150°
6	$\boldsymbol{j}$	-45°	$\boldsymbol{i}$	150°
7	$\boldsymbol{i}$	150°	$\boldsymbol{j}$	-45°
8	$\boldsymbol{i}$	-45°	$\boldsymbol{k}$	60°
9	$\boldsymbol{k}$	60°	$\boldsymbol{i}$	-45°
10	$\boldsymbol{j}$	60°	$\boldsymbol{k}$	150°
11	$\boldsymbol{k}$	150°	$\boldsymbol{j}$	60°

Вар.	$\boldsymbol{e}_1$	φ	$\boldsymbol{e}_2$	ψ
12	$\boldsymbol{i}$	30°	$\boldsymbol{j}$	45°
13	$\boldsymbol{j}$	30°	$\boldsymbol{k}$	45°
14	$\boldsymbol{k}$	30°	$\boldsymbol{i}$	45°
15	$\boldsymbol{i}$	45°	$\boldsymbol{j}$	60°
16	$\boldsymbol{i}$	-45°	$\boldsymbol{j}$	-60°
17	$\boldsymbol{k}$	-15°	$\boldsymbol{i}$	30°
18	$\boldsymbol{k}$	-45°	$\boldsymbol{i}$	75°
19	$\boldsymbol{j}$	30°	$\boldsymbol{k}$	150°
20	$\boldsymbol{i}$	120°	$\boldsymbol{k}$	150°
21	$\boldsymbol{i}$	-60°	$\boldsymbol{k}$	15°
22	$\boldsymbol{k}$	30°	$\boldsymbol{i}$	120°

Вар.	$\boldsymbol{e}_1$	φ	$\boldsymbol{e}_2$	ψ
23	$\boldsymbol{j}$	120°	$\boldsymbol{k}$	45°
24	$\boldsymbol{k}$	-135°	$\boldsymbol{j}$	60°
25	$\boldsymbol{j}$	60°	$\boldsymbol{i}$	150°
26	$\boldsymbol{i}$	135°	$\boldsymbol{k}$	240°
27	$\boldsymbol{j}$	30°	$\boldsymbol{k}$	-120°
28	$\boldsymbol{k}$	-135°	$\boldsymbol{j}$	30°
29	$\boldsymbol{i}$	60°	$\boldsymbol{j}$	-120°
30	$\boldsymbol{k}$	-150°	$\boldsymbol{i}$	45°
31	$\boldsymbol{j}$	120°	$\boldsymbol{k}$	-150°
32	$\boldsymbol{i}$	-45°	$\boldsymbol{j}$	-120°

Задача 2 (*1 балл*)

Векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ евклидова пространства E_4 представлены своими координатами в базисе $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, векторы которого в свою очередь представлены своими координатами в некотором ортонормированном базисе.

а) применяя процесс ортогонализации к базису $\{\boldsymbol{a}_i\}$, построитьортонормированный базис $\{\boldsymbol{b}_j\}$);

б) найти матрицу перехода $T_{b_j \to a_i}$ из полученного ортонормированного базиса $\{\boldsymbol{b}_j\}$ в исходный базис $\{\boldsymbol{a}_i\}$;

в) Найти координаты векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ в ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{b}_i\}$;

г) вычислить скалярное произведение $(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q})$;

д) вычислить угол между векторами $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$.

Вариант 1.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 2.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2 (*1 балл*)

Векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ евклидова пространства E_4 представлены своими координатами в базисе $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, векторы которого в свою очередь представлены своими координатами в некотором ортонормированном базисе.

а) применяя процесс ортогонализации к базису $\{\boldsymbol{a}_i\}$, построитьортонормированный базис $\{\boldsymbol{b}_j\}$);

б) найти матрицу перехода $T_{b_j \to a_i}$ из полученного ортонормированного базиса $\{\boldsymbol{b}_j\}$ в исходный базис $\{\boldsymbol{a}_i\}$;

в) Найти координаты векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ в ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{b}_i\}$;

г) вычислить скалярное произведение $(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q})$;

д) вычислить угол между векторами $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$.

Вариант 3.

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}-5\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}3\\7\\-1\\5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}1\\6\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Вариант 4.

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}-4\\-1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\\-4\end{pmatrix}.$$

Вариант 5.

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}-8\\-4\\2\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}-18\\-8\\3\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-5\\5\\3\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}7\\7\\5\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-3\end{pmatrix}.$$

Вариант 6.

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}5\\5\\1\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}9\\1\\-5\\5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-3\end{pmatrix}.$$

Вариант 7.

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\3\\-3\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}5\\-2\\2\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\1\\5\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}4\\3\\-2\\5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Вариант 8.

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\5\\-1\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}-4\\-3\\2\\-5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}-4\\-4\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Вариант 9.

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\3\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Задача 2 (*1 балл*)

Векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ евклидова пространства E_4 представлены своими координатами в базисе $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, векторы которого в свою очередь представлены своими координатами в некотором ортонормированном базисе.

а) применяя процесс ортогонализации к базису $\{\boldsymbol{a}_i\}$, построитьортонормированный базис $\{\boldsymbol{b}_j\}$);

б) найти матрицу перехода $T_{b_j \to a_i}$ из полученного ортонормированного базиса $\{\boldsymbol{b}_j\}$ в исходный базис $\{\boldsymbol{a}_i\}$;

в) Найти координаты векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ в ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{b}_i\}$;

г) вычислить скалярное произведение $(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q})$;

д) вычислить угол между векторами $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$.

Вариант 10.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 11.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Вариант 12.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 13.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 14.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Вариант 15.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 16.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2 (*1 балл*)

Векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ евклидова пространства E_4 представлены своими координатами в базисе $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, векторы которого в свою очередь представлены своими координатами в некотором ортонормированном базисе.

а) применяя процесс ортогонализации к базису $\{\boldsymbol{a}_i\}$, построитьортонормированный базис $\{\boldsymbol{b}_j\}$);

б) найти матрицу перехода $T_{b_j\to a_i}$ из полученного ортонормированного базиса $\{\boldsymbol{b}_j\}$ в исходный базис $\{\boldsymbol{a}_i\}$;

в) Найти координаты векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ в ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{b}_i\}$;

г) вычислить скалярное произведение $(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q})$;

д) вычислить угол между векторами $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$.

Вариант 17.

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}3\\4\\-5\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}5\\4\\2\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-3\\-6\\-7\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-11\\-5\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\\5\end{pmatrix}.$$

Вариант 18.

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}2\\2\\-4\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\8\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}2\\-2\\-5\\4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}7\\2\\-3\\6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}5\\0\\1\\11\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}4\\-5\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

Вариант 19.

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\7\\-7\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}8\\4\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}8\\3\\5\\8\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}7\\3\\13\\4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}-4\\8\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Вариант 20.

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}7\\-1\\5\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\\8\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}8\\5\\-3\\-8\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}4\\13\\-3\\-7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\-8\\4\end{pmatrix}.$$

Вариант 21.

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}4\\1\\-1\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}7\\4\\4\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}7\\8\\0\\7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}11\\8\\-7\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}4\\-7\\0\\4\end{pmatrix}.$$

Вариант 22.

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}6\\3\\3\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}7\\1\\-1\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\4\\-4\\7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}7\\0\\8\\-7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}3\\7\\8\\-11\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}4\\0\\-7\\-4\end{pmatrix}.$$

Вариант 23.

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}5\\6\\4\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}9\\4\\-1\\8\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}15\\-1\\1\\4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}-2\\-4\\6\\5\end{pmatrix}.$$

Задача 2 (*1 балл*)

Векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ евклидова пространства E_4 представлены своими координатами в базисе $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, векторы которого в свою очередь представлены своими координатами в некотором ортонормированном базисе.

а) применяя процесс ортогонализации к базису $\{\boldsymbol{a}_i\}$, построитьортонормированный базис $\{\boldsymbol{b}_j\}$);

б) найти матрицу перехода $T_{b_j \to a_i}$ из полученного ортонормированного базиса $\{\boldsymbol{b}_j\}$ в исходный базис $\{\boldsymbol{a}_i\}$;

в) Найти координаты векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ в ортонормированном базисе $\{\boldsymbol{b}_i\}$;

г) вычислить скалярное произведение $(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q})$;

д) вычислить угол между векторами $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$.

Вариант 24.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 19 \\ -3 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Вариант 25.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 21 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Вариант 26.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -13 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 27.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Вариант 28.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Вариант 29.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Вариант 30.

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 3 (*2 балла*)

Уравнение кривой второго порядка на плоскости Oxy привести к каноническому виду, указав:

а) преобразование перехода из заданной системы координат в каноническую (собственные числа ортогонального преобразования расположить в порядке возрастания);

б) канонический вид уравнения кривой;

в) каноническую систему координат и кривую на плоскости Oxy.

Вариант 1. $5x^2 + 2y^2 + 4xy + 4\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 14 = 0.$

Вариант 2. $8x^2 + 6xy - 5\sqrt{10}x - 3\sqrt{10}y - 22 = 0.$

Вариант 3. $4xy - 4x^2 - y^2 + 10\sqrt{5}x + 10\sqrt{5}y + 25 = 0.$

Вариант 4. $4xy - 2x^2 - 5y^2 + 4\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y - 4 = 0.$

Вариант 5. $7x^2 - y^2 + 6xy - 4\sqrt{10}x - 4\sqrt{10}y + 8 = 0.$

Вариант 6. $2x^2 + 2y^2 - 4xy + 3\sqrt{2}x - 5\sqrt{2}y - 6 = 0.$

Вариант 7. $6x^2 + 3y^2 - 4xy + 4\sqrt{5}x + 8\sqrt{5}y + 22 = 0.$

Вариант 8. $x^2 - 7y^2 - 6xy - 6\sqrt{10}x + 2\sqrt{10}y + 42 = 0.$

Вариант 9. $12xy - 9x^2 - 4y^2 + 14\sqrt{13}x - 18\sqrt{13}y - 65 = 0.$

Вариант 10. $3x^2 + 6y^2 - 4xy + 8\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + 36 = 0.$

Вариант 11. $5x^2 - 3y^2 + 6xy + 8\sqrt{10}x + 80 = 0.$

Вариант 12. $x^2 + y^2 - 2xy + 5\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 8 = 0.$

Вариант 13. $7x^2 + 4y^2 + 4xy + 6\sqrt{5}x - 12\sqrt{5}y + 51 = 0.$

Вариант 14. $3x^2 - 5y^2 + 6xy - 8\sqrt{10}y + 4 = 0.$

Вариант 15. $24xy - 16x^2 - 9y^2 + 70x + 10y - 125 = 0.$

Вариант 16. $8x^2 + 5y^2 - 4xy + 8\sqrt{5}x + 16\sqrt{5}y + 64 = 0.$

Вариант 17. $13x^2 - 3y^2 + 12xy + 10\sqrt{10}x - 5 = 0.$

Вариант 18. $16x^2 + y^2 + 8xy + 10\sqrt{17}x - 6\sqrt{17}y - 51 = 0.$

Вариант 19. $5x^2 + 8y^2 - 4xy + 16\sqrt{5}x + 8\sqrt{5}y - 44 = 0.$

Вариант 20. $3x^2 - 13y^2 + 12xy - 10\sqrt{10}y + 5 = 0.$

Вариант 21. $4x^2 + y^2 + 4xy + 6\sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y - 5 = 0.$

Вариант 22. $10x^2 + 7y^2 - 4xy - 20\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 16 = 0.$

Вариант 23. $3x^2 + 4xy - 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 9 = 0.$

Вариант 24. $9x^2 + y^2 + 6xy + 20\sqrt{10}y - 50 = 0.$

Вариант 25. $11x^2 + 3y^2 + 6xy - 2\sqrt{10}x + 6\sqrt{10}y - 22 = 0.$

Вариант 26. $x^2 + 7y^2 - 8xy + 2\sqrt{5}x - 8\sqrt{5}y - 4 = 0.$

Вариант 27. $6xy - 9x^2 - y^2 - 5\sqrt{10}x + 5\sqrt{10}y + 30 = 0.$

Вариант 28. $13x^2 + 5y^2 + 6xy + 10\sqrt{10}x - 2\sqrt{10}y - 26 = 0.$

Вариант 29. $6x^2 + 8xy - 4\sqrt{5}x - 8\sqrt{5}y - 26 = 0.$

Вариант 30. $8xy - 16x^2 - y^2 + 6\sqrt{17}x - 10\sqrt{17}y + 51 = 0.$

Задача 4 (*2 балла*)

Уравнение поверхности второго порядка в пространстве $Oxyz$ привести к каноническому виду, указав:

а) преобразование перехода от заданной системы координат в каноническую (собственные числа ортогонального преобразования расположить в порядке возрастания);

б) канонический вид поверхности;

в) в канонической системе координат построить поверхность, используя метод сечений для исследования формы поверхности.

Вариант 1. $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + 4x + 4y - 14 = 0.$

Вариант 2. $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz + 8y + 8z - 8 = 0.$

Вариант 3. $2x^2 + 10y^2 - 2z^2 + 12xy + 8yz + 12\sqrt{14}x - 4\sqrt{14}y - 8\sqrt{14}z - 56 = 0.$

Вариант 4. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz + 24y - 6z - 7 = 0.$

Вариант 5. $x^2 - 5y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz + 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}z + 12 = 0.$

Вариант 6. $5x^2 + 6y^2 + 4z^2 - 4xy - 4xz - 20x - 20y - 10 = 0.$

Вариант 7. $4x^2 + y^2 + 2z^2 + 4xy + 2\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y - 4z - 18 = 0.$

Вариант 8. $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 8xy + 8yz - 20x - 10y - 20z + 45 = 0.$

Вариант 9. $x^2 + y^2 - 2z^2 + 2xy + 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 4z - 2 = 0.$

Вариант 10. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz + 6\sqrt{6}x + 12\sqrt{6}y + 6\sqrt{6}z = 0.$

Вариант 11. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 8xz - 8\sqrt{2}x - 2y - 8\sqrt{2}z + 17 = 0.$

Вариант 12. $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z - 72 = 0.$

Вариант 13. $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 10z + 74 = 0.$

Вариант 14. $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2\sqrt{14}x + 4\sqrt{14}y - 6\sqrt{14}z - 28 = 0.$

Вариант 15. $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 20\sqrt{2}x + 20\sqrt{2}y + 40 = 0.$

Вариант 16. $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + 12x - 12y + 18 = 0.$

Вариант 17. $4x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 4xz + 12\sqrt{2}x - 20y + 12\sqrt{2}z - 106 = 0.$

Вариант 18. $y^2 + z^2 - 2\sqrt{2}xz - 2\sqrt{6}x + 2y - 2\sqrt{3}z = 0.$

Вариант 19. $5x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 4xy + 6x - 6y + 4z + 46 = 0.$

Вариант 20. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz + 4x + 4\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}z - 6 = 0.$

Вариант 21. $6x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy + 4\sqrt{5}x + 6\sqrt{5}y + 2z + 2 = 0.$

Вариант 22. $2y^2 - 2xy - 2xz + 2yz + 6\sqrt{3}x - 6\sqrt{3}z - 9 = 0.$

Вариант 23. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 9\sqrt{2}x + 7\sqrt{2}y - 4z + 10 = 0.$

Вариант 24. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xz + \sqrt{2}x - 4y + \sqrt{2}z - 9 = 0.$

Вариант 25. $6xy + 8xz + 40x + 50z + 10 = 0.$

Вариант 26. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2\sqrt{3}xz + 2yz + 16x - 4 = 0.$

Вариант 27. $10x^2 + 10y^2 + 10z^2 + 6xz + 8yz + 60z = 0.$

Вариант 28. $3y^2 - 4xy - 10xz + 4yz - \sqrt{6}x - 2\sqrt{6}y + \sqrt{6}z + 9 = 0.$

Вариант 29. $4x^2 - y^2 - z^2 - 10xy - 10xz + 4\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}y + 4\sqrt{3}z + 48 = 0.$

Вариант 30. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6xz - 4x + 2\sqrt{2}y - 2\sqrt{2}z + 25 = 0.$