

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА

по курсу «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

(ИОС «НОМОТЕХ»)

1 курс 1 семестр для групп ФН-11, Э4, Э9, Э7, АК1, АК2, АК3, АК4

Знание: Физико-математические науки
Направление науки: Математические науки
Наука: Математика
Раздел науки: Фундаментальная

Дисциплина: Математический анализ

МОДУЛЬ 1 «ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ. ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ»

Глава 1. Элементы теории множеств

Параграф 1.1. Множества и операции над ними

- Квант 1.1.1. Понятие множества (О1)
- Квант 1.1.2. Подмножество множества (О2)
- Квант 1.1.3. Объединение (сумма) множеств (О3)
- Квант 1.1.4. Свойства операции объединения множеств (Т1)
- Квант 1.1.5. Операции пересечения множеств и ее свойства (О4)
- Квант 1.1.6. Разность множеств и ее свойства (О5)
- Квант 1.1.7. Симметрическая разность множеств и ее свойства (О6)
- Квант 1.1.8. Покрытие множеств (О7)

Параграф 1.2. Элементы математической логики

- Квант 1.2.1. Высказывание, его истинность или ложность (О1)
- Квант 1.2.2. Операции над высказываниями (О2)
- Квант 1.2.3. Свойства логических операций (Т1)
- Квант 1.2.4. Предикаты (О3)
- Квант 1.2.5. Кванторы (О4)
- Квант 1.2.6. Теорема (О5)

Параграф 1.3. Действительные числа: определение и основные свойства

- Квант 1.3.1. Множество рациональных чисел (О2)
- Квант 1.3.2. Определение множества действительных чисел (О4)
- Квант 1.3.3. Абсолютная величина (модуль) действительного числа (О5)
- Квант 1.3.4. Определение равенства действительных чисел (О6)
- Квант 1.3.5. Сравнение действительных чисел (О7) Транзитивность отношения «>» (Т1)
- Квант 1.3.6. Аксиомы непрерывности в пространстве элементарной геометрии (А3)
- Квант 1.3.7. Соответствие рациональных чисел точкам на прямой (Т2)
- Квант 1.3.8. Соответствие действительных чисел точкам на прямой (Т3)
- Квант 1.3.9. Числовая прямая (О8) Рациональные границы действительного числа (О9)
- Квант 1.3.10. Сколь угодно близкие рациональные границы действительного числа (Т4)

- Квант 1.3.11.Существование рационального числа, заключенного между действительными числами (Т5)
- Квант 1.3.12.Единственность действительного числа, заключенного между сколь угодно близкими рациональными границами (Т6)
- Квант 1.3.13.Координаты точек числовой прямой (Т7)
- Квант 1.3.14.Бесконечно удаленные точки прямой. Расширенная числовая прямая (О10)
- Квант 1.3.15.Промежутки числовой прямой (О11)
- Квант 1.3.16.Декартова система координат на плоскости (О14)
- Квант 1.3.17.Полярные координаты (О16)

Параграф 1.4. Действительные числа: Точные грани и арифметические действия

- Квант 1.4.1. Ограниченность числового множества (О4)
- Квант 1.4.2. Грани числового множества (О5)
- Квант 1.4.3. Точная верхняя грань числового множества (О6)
- Квант 1.4.4. Точная нижняя грань числового множества (О7)
- Квант 1.4.5. Теорема о существовании точных граней ограниченного множества (Т1)
- Квант 1.4.6. Определение суммы действительных чисел (О10)
- Квант 1.4.7. Теорема о существовании и единственности суммы действительных чисел (Т3)
- Квант 1.4.8. Свойства операции сложения действительных чисел (Т4)
- Квант 1.4.9. Определение произведения действительных чисел (О11)
- Квант 1.4.10.Теорема о существовании и единственности произведения действительных чисел (Т5)
- Квант 1.4.11.Свойства операции умножения действительных чисел (Т6)
- Квант 1.4.12.Свойства отношения упорядоченности действительных чисел (Т8)
- Квант 1.4.13.Свойства абсолютной величины действительных чисел (Т9)

Параграф 1.7. Мощность множества

- Квант 1.7.1. Скалярное произведение (О4)
- Квант 1.7.2. Отображение множеств(О1)
- Квант 1.7.3. Понятие мощности и эквивалентности множеств (О3)
- Квант 1.7.4. Счетное множество (О4)Свойства счетного множества (Т2)
- Квант 1.7.5. Несчетность множества точек отрезка $[0, 1]$ (Т3)
- Квант 1.7.6. Множество мощности континуум (О8)
- Квант 1.7.7. Теорема об эквивалентности множеств точек отрезка и квадрата (Т4)
- Квант 1.7.8. Теорема о существовании множеств большей мощности (Т5)
- Квант 1.7.9. Теорема Кантора-Бернштейна (Т6)

Глава 2. Функциональная зависимость

Параграф 2.1. Понятие функции

- Квант 6.1.1. Определение функции (отображения) (О2)
- Квант 6.1.2. Определение обратной функции (О3)
- Квант 6.1.3. Определение сложной функции (О4)
- Квант 6.1.4. Арифметические действия с функциями (О7)

Параграф 2.2. Некоторые свойства функций

- Квант 2.2.1. Ограниченность функции (О4)
- Квант 2.2.2. Монотонность функции (О5)
- Квант 2.2.3. Четность функции (О6)
- Квант 2.2.4. Периодичность функции (О7)

Параграф 2.3. Степенная функция

- Квант 2.3.1. Степенная функция (O3)
- Квант 2.3.2. Свойства степенной функции с целым показателем степени (T2)
- Квант 2.3.3. Определение корня натуральной степени (O4)
- Квант 2.3.4. Теорема о существовании корня натуральной степени из действительного числа (T3)
- Квант 2.3.5. Степенная функция с рациональным показателем степени (O9)
- Квант 2.3.6. Свойства степенной функции с рациональным показателем степени (T4)
- Квант 2.3.7. Определение степенной функции с действительным показателем степени (O11)
- Квант 2.3.8. Теорема о существовании и единственности действительной степени действительного числа (T5)
- Квант 2.3.9. Свойства степенной функции с действительным показателем степени (T7)

Параграф 2.4. Показательная и логарифмическая функции

- Квант 2.4.1. Определение показательной функции (O3)
- Квант 2.4.2. Определение логарифма действительного числа (O4)
- Квант 2.4.3. Теорема о существовании логарифма действительного числа (T2)
- Квант 2.4.4. Основные свойства логарифмической функции (T3)

Глава 3. Предел последовательности

Параграф 3.1. Понятие предела последовательности

- Квант 3.1.1. Последовательность (O1)
- Квант 3.1.2. Ограниченная последовательность (O2)
- Квант 3.1.3. Монотонная последовательность (O3)
- Квант 3.1.4. Предел последовательности, сходимость последовательности (O4)
- Квант 3.1.5. Единственность предела последовательности (T1)
- Квант 3.1.6. Предел постоянной последовательности (T2)
- Квант 3.1.7. Ограниченность сходящейся последовательности (T3)

Параграф 3.2. Бесконечно малая и бесконечно большая последовательности

- Квант 3.2.1. Бесконечно малая последовательность (O3)
- Квант 3.2.2. Бесконечно большая последовательность (O4)
- Квант 3.2.3. Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей (T1)
- Квант 3.2.4. Сумма бесконечно малых последовательностей (T2)
- Квант 3.2.5. Теорема о связи бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей (T3)

Параграф 3.3. Свойства сходящихся последовательностей

- Квант 3.3.1. Сохранение сходящейся последовательностью знака предела (T1)
- Квант 3.3.2. Связь между сходящейся последовательностью и ее пределом (T2)
- Квант 3.3.3. Арифметические свойства предела (T5)
- Квант 3.3.4. Предельный переход в неравенстве (T6)
- Квант 3.3.5. Предел промежуточной последовательности (T7)

Параграф 3.4. Подпоследовательности. Частичный предел последовательности

- Квант 3.4.1. Частичный предел последовательности (O4)
- Квант 3.4.2. Верхний и нижний пределы последовательности (O5)
- Квант 3.4.3. Лемма Больцано-Вейерштрасса об ограниченной последовательности (T1)

Параграф 3.5. Критерии сходимости последовательностей

- Квант 3.5.1. Фундаментальная последовательность (условие Коши) (O2)
- Квант 3.5.2. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности (T3)
- Квант 3.5.3. Критерий Коши сходимости последовательности (T4)
- Квант 3.5.4. Второй замечательный предел последовательности. Число e (T5)
- Квант 3.5.5. Лемма о вложенных отрезках (T6)

Глава 4. Предел функции одной переменной

Параграф 4.1. Понятие предела функции

- Квант 4.1.1. Окрестность точки на числовой прямой (O1)
- Квант 4.1.2. Предельная точка множества (O2)
- Квант 4.1.3. Предел функции (определение по Коши) (O3)
- Квант 4.1.4. Предел функции (определение по Гейне) (O6)
- Квант 4.1.5. Эквивалентность определений предела функции по Коши и по Гейне (T1)
- Квант 4.1.6. Предел функции на бесконечности (O7)
- Квант 4.1.7. Односторонние пределы функции (O8)
- Квант 4.1.8. Односторонние пределы функции на бесконечности (O9)
- Квант 4.1.9. Связь между пределом функции и односторонними пределами (T2)

Параграф 4.2. Основные свойства предела функции

- Квант 4.2.1. Теорема о единственности предела (T1)
- Квант 4.2.2. Теорема о локальной ограниченности функции, имеющей предел (T2)
- Квант 4.2.3. Теорема о сохранении функцией знака предела (T3)
- Квант 4.2.4. Теорема о переходе к пределу в неравенстве (T4)
- Квант 4.2.5. Теорема о пределе промежуточной функции (T5)
- Квант 4.2.6. Теорема о пределе монотонной функции (T6)

Параграф 4.3. Сравнение асимптотического поведения функций

- Квант 4.3.1. Бесконечно большая функция (O2)
- Квант 4.3.2. Бесконечно малая функция (O3)
- Квант 4.3.3. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию (T1)
- Квант 4.3.4. Теорема о сумме бесконечно малых функций (T2)
- Квант 4.3.5. Теорема о связи функции с её пределом (T3)
- Квант 4.3.6. Теоремы об арифметических действиях с пределами (T5)
- Квант 4.3.7. Определение бесконечно малой функции более высокого порядка (O5)
- Квант 4.3.8. Определение эквивалентности функций (O6)
- Квант 4.3.9. Определение бесконечно малых функций одного порядка (O7)
- Квант 4.3.10. Определение порядка малости одной бесконечно малой функции относительно другой (O8)
- Квант 4.3.11. Определение бесконечно большой функции более высокого порядка роста (O9)
- Квант 4.3.12. Определение бесконечно больших функций одного порядка (O10)
- Квант 4.3.13. Определение эквивалентных бесконечно больших функций (O11)
- Квант 4.3.14. Определение порядка одной бесконечно большой функции относительно другой (O12)
- Квант 4.3.15. Необходимое и достаточное условие эквивалентности бесконечно малых функций (T6)
- Квант 4.3.16. Теорема о замене бесконечно малых на эквивалентные (T7)

Параграф 4.4. Замечательные пределы

- Квант 4.4.1. Первый замечательный предел (T2)

- Квант 4.4.2. Следствие 1 из первого замечательного предела (Т3)
- Квант 4.4.3. Следствие 2 из первого замечательного предела (Т4)
- Квант 4.4.4. Следствие 3 из первого замечательного предела (Т5)
- Квант 4.4.5. Следствие 4 из первого замечательного предела (Т6)
- Квант 4.4.6. Второй замечательный предел (Т9)
- Квант 4.4.7. Следствие 1 из второго замечательного предела (Т10)
- Квант 4.4.8. Следствие 2 из второго замечательного предела (Т11)
- Квант 4.4.9. Следствие 3 из второго замечательного предела (Т12)
- Квант 4.4.10. Следствие 4 из второго замечательного предела (Т13)
- Квант 4.4.11. Следствие 5 из второго замечательного предела (Т14)
- Квант 4.4.12. Неопределенные выражения (О4)

Глава 5. Непрерывность функции одной переменной

Параграф 5.1. Понятие непрерывности функции

- Квант 5.1.1. Функция, непрерывная в точке (О5)
- Квант 5.1.2. Функция, разрывная в точке (О6)
- Квант 5.1.3. Функция, непрерывная на множестве (О7)
- Квант 5.1.4. Непрерывность суммы, произведения, частного непрерывных функций (Т2)
- Квант 5.1.5. Переход к пределу под знаком непрерывной функции (Т3)
- Квант 5.1.6. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций (Т)

Параграф 5.2. Непрерывность элементарных функций

- Квант 5.2.1. Непрерывность рациональных функций (Т1)
- Квант 5.2.2. Непрерывность дробно-рациональных функций (Т2)
- Квант 5.2.3. Непрерывность показательной функции (Т4)
- Квант 5.2.4. Непрерывность логарифмической функции (Т6)
- Квант 5.2.5. Непрерывность тригонометрических функций (Т8)

Параграф 5.3. Односторонняя непрерывность и разрывы функций

- Квант 5.3.1. Односторонняя непрерывность функции в точке (О3)
- Квант 5.3.2. Разрывная функция, точки разрыва (О4)
- Квант 5.3.3. Точка устранимого разрыва (О6)
- Квант 5.3.4. Точка разрыва первого рода (О7)
- Квант 5.3.5. Точка разрыва второго рода (О8)

Параграф 5.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

- Квант 5.4.1. Равномерная непрерывность функции на множестве (О1)
- Квант 5.4.2. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции на отрезке (Т2)
- Квант 5.4.3. Теорема об обращении в нуль функции, непрерывной на отрезке (Т4)
- Квант 5.4.4. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке (Т5)
- Квант 5.4.5. Теорема об ограниченности непрерывной функции на отрезке (Т6)
- Квант 5.4.6. Достижение непрерывной на отрезке функцией минимального и максимального значений (Т7)

Параграф 5.5. Непрерывность монотонной и обратной функций

- Квант 5.5.1. Точки разрыва монотонной функции на отрезке (Т1)
- Квант 5.5.2. Непрерывность обратной функции (Т3)

МОДУЛЬ 2 «ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ПРИЛОЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ»

Глава 6. Дифференцируемость функций

Параграф 6.1. Производная функции

- Квант 6.1.1. Определение производной функции (О9)
- Квант 6.1.2. Бесконечная производная функции в точке (О7)
- Квант 6.1.3. Односторонние производные функции в точке (О5)
- Квант 6.1.4. Формулы производных основных элементарных функций (Т5)

Параграф 6.2. Основные свойства производной функций

- Квант 6.2.1. Производная суммы, произведения и частного двух функций (Т2)
- Квант 6.2.2. Производная обратной функции (Т4)

Параграф 6.3. Производные сложной, неявной и функции, заданной параметрически

- Квант 6.3.1. Производная сложной функции (Т1)
- Квант 6.3.2. Формулы производных тригонометрических и гиперболических функций (Т3)
- Квант 6.3.3. Формулы производных обратных тригонометрических и гиперболических функций (Т4)
- Квант 6.3.4. Формулы производных обратных тригонометрических и гиперболических функций (Т6)

Параграф 6.4. Дифференциал

- Квант 6.4.1. Дифференцируемость и дифференциал функции (О4)
- Квант 6.4.2. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке (Т2)
- Квант 6.4.3. Дифференциал суммы, произведения и частного двух функций (Т3)
- Квант 6.4.4. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала (Т5)
- Квант 6.4.5. Непрерывность дифференцируемой в точке функции (Т6)
- Квант 6.4.6. Определение секущей и касательной к графику функции (О9)
- Квант 6.4.7. Уравнение касательной и нормали к графику функции (Т7)

Параграф 6.5. Производные и дифференциалы высших порядков

- Квант 6.5.1. Производные высших порядков (О3)
- Квант 6.5.2. Производные высших порядков функций, заданных параметрически (Т2)
- Квант 6.5.3. Производные неявной функции (Т4)
- Квант 6.5.4. Дифференциалы высших порядков (О6)

Параграф 6.6. Условия экстремума и теоремы о среднем

- Квант 6.6.1. Определение точки экстремума (О4)
- Квант 6.6.2. Теорема Ферма (Т1)
- Квант 6.6.3. Теорема Ролля (Т3)
- Квант 6.6.4. Теорема Лагранжа (Т4)
- Квант 6.6.5. Теорема Коши (Т5)

Параграф 6.7. Правило Лопиталья

- Квант 6.7.1. Теорема Лопиталья 1 (неопределенность $0/0$) (Т2)

- Квант 6.7.2. Теорема Лопиталя 2 (неопределенность $0/0$) (Т3)
- Квант 6.7.3. Теорема Лопиталя 3 (неопределенность ∞/∞) (Т5)

Параграф 6.8. Формула Тейлора

- Квант 6.8.1. Формула Тейлора для многочлена (Т1)
- Квант 6.8.2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (Т4)
- Квант 6.8.3. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (Т6)
- Квант 6.8.4. Формулы Маклорена для элементарных функций (Т7)

Глава 7. Исследование функций и построение графиков

Параграф 7.1. Асимптоты графика функции

- Квант 7.1.1. Вертикальная асимптота (О6)
- Квант 7.1.2. Наклонная и горизонтальная асимптота (О7)
- Квант 7.1.3. Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты (Т2)

Параграф 7.2. Монотонность и экстремумы функции

- Квант 7.2.1. Теорема о связи знака производной с возрастанием и убыванием функции (Т2)
- Квант 7.2.2. Условие постоянства функции на интервале (Т4)
- Квант 7.2.3. Условие нестрогой монотонности функции на интервале (Т5)
- Квант 7.2.4. Условие строгой монотонности функции на интервале (Т6)
- Квант 7.2.5. Необходимое условие экстремума функции (Т8)
- Квант 7.2.6. Критическая точка первого рода (О11)
- Квант 7.2.7. Стационарная точка функции (О12)
- Квант 7.2.8. Первый достаточный признак экстремума (Т9)
- Квант 7.2.9. Второй достаточный признак экстремума (Т10)
- Квант 7.2.10. Третий достаточный признак экстремума (Т12)

Параграф 7.3. Выпуклость графика функции. Точки перегиба

- Квант 7.3.1. Направление выпуклости функции (О3)
- Квант 7.3.2. Некоторые свойства выпуклых функций (Т3)
- Квант 7.3.3. Критерий выпуклости функции (по первой производной) (Т4)
- Квант 7.3.4. Достаточное условие строгой выпуклости функции (по второй производной) (Т5)
- Квант 7.3.5. Точка перегиба функции (О10)
- Квант 7.3.6. Необходимое условие точки перегиба (Т7)
- Квант 7.3.7. Критическая точка второго рода (О15)
- Квант 7.3.8. Первый достаточный признак точки перегиба (Т8)
- Квант 7.3.9. Второй достаточный признак точки перегиба (Т10)
- Квант 7.3.10. Схема исследования функций и построения графиков (Т11)