АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Лекция № 1. Координаты и векторы в трехмерном евклидовом пространстве

1.1 Векторы

В курсе элементарной физики некоторые физические величины, например температура, объем, масса тела, плотность и другие вполне определяются числом. Такие величины называются скалярами. Для определения же некоторых других величин, например силы, скорости, ускорения и т. д. кроме числовых значений, необходимо задать еще и направление их в пространстве. Такие величины называются векторными.

Определение 1. Направленный отрезок, одна из граничных точек которого принята за начало, а другая за конец, называется *вектором*.

На чертеже вектор изображается отрезком прямой, на которой стрелкой отмечено направление. Направленный отрезок, началом которого является точка A, а концом точка B, будем обозначать $\overline{AB}$.

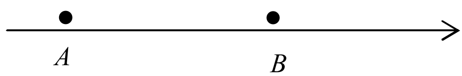


Рис. 1.1. Вектор $\overline{AB}$

Определение 2. Направленный отрезок, начало и конец которого совпадают, называется нулевым. Направление нулевого отрезка неопределенно, длина его считается равной нулю, обозначается он $\overline{0}$.

Определение 3. Расстояние между началом и концом вектора называется его *длиной*, или *модулем*. Длина вектора $\overline{AB}$ обозначается $|\overline{AB}|$.

Определение 4. Векторы, параллельные одной прямой, называются

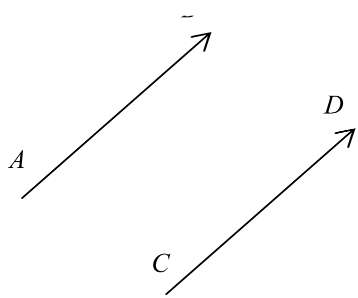


Рис. 1.2. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны

коллинеарными, а векторы, расположенные в одной плоскости или параллельные одной и той же плоскости, – компланарными.

Определение 5. Два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине.

Если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны, то записывают $\overline{AB} = \overline{CD}$. Иногда векторы обозначают одной буквой с чертой или стрелкой: $\overline{a}, \vec{b}$.

Из определения равенства векторов следует, что при параллельном переносе вектора получается вектор, равный исходному. Поэтому начало вектора можно помещать в любую точку пространства. В статике и геометрии векторы, начало которых при параллельном переносе можно помещать в любую точку пространства, называют свободными. В дальнейшем мы будем рассматривать только свободные векторы. Рассмотрим векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DE}$. Пусть вектор $\overline{AC}$ равен вектору $\overline{DE}$.

Определение 6. Под *углом между векторами* $\overline{AB}$ и $\overline{DE}$ мы понимаем угол φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, величина которого не больше π.

Определение 7. Если угол φ между векторами равен $\frac{\pi}{2}$, то векторы называются *ортогональными.*

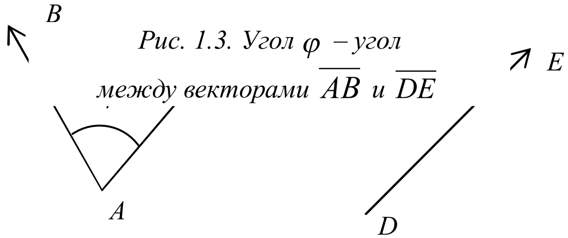


Рис. 1.3. Угол φ – угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{DE}$

1.2 Действия над векторами

Пусть вектор $\overline{a}$ изображает перемещение точки, тогда под вектором $3\overline{a}$ естественно понимать перемещение в том же направлении втрое большее, под вектором $\frac{1}{3}\overline{a}$ – втрое меньшее перемещение, под вектором $-3\overline{a}$ – втрое большее перемещение, но в противоположном направлении и т. д.

Определение 8. *Произведением вектора $\overline{a}$ на число m* называется вектор $\overline{b}$, имеющий (при $\overline{a} \neq \overline{0}$) направление вектора $\overline{a}$, если m положительно, и противоположное направление, если m отрицательно. Длина этого вектора равна произведению длины вектора $\overline{a}$ на модуль числа m. Записывается это так: $\overline{b} = m\overline{a}$.

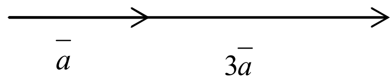


Рис. 1.4. Вектор $3\overline{a}$ в три раза длиннее вектора $\overline{a}$ и одинаково с ним направлен. Вектор $-3\overline{a}$ направлен в противоположную сторону

Определение 9. Для заданного вектора $\overline{a}$ вектор $(-1)\overline{a}$ называется *противоположным* и обозначается $-\overline{a}$.

Свойство 1. Для любых чисел m и n и любого вектора $\overline{a}$ справедливо равенство

$$m(n\overline{a}) = (mn)\overline{a}. \qquad (1.1)$$

Действительно, векторы, стоящие в обеих частях равенства (1.1), имеют одинаковую длину $|m| \cdot |n| \cdot |\overline{a}|$. Кроме того, эти векторы коллинеарны и одинаково направлены, т. к. их направление совпадает с направлением $\overline{a}$, если m и n одного знака, и противоположно направлению $\overline{a}$, если m и n разных знаков.

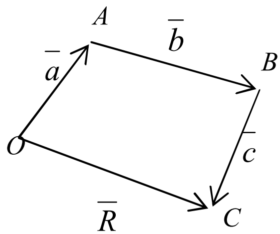


Рис. 1.5. Вектор $\overline{R}$ равен сумме векторов $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$

Свойство 2. Если вектор $\overline{a}$ не равен нулю, то для любого коллинеарного ему вектора $\overline{b}$ существует, и при этом только одно, число λ, удовлетворяющее равенству $\overline{b} = \lambda\overline{a}$.

Пусть движущаяся точка прошла сначала путь $\overline{OA} = \overline{a}$, затем $\overline{AB} = \overline{b}$ и $\overline{BC} = \overline{c}$. В результате точка переместилась из точки O в точку C. Вектор $\overline{OC} = \overline{R}$ естественно назвать суммой всех данных перемещений.

Определение 10. Суммой векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c},...,\overline{l}$ называется новый вектор $\overline{R}$, который замыкает ломаную линию, построенную из данных векторов так, что начало каждого из последующих векторов суммы совмещается с концом предыдущего. Замыкающий вектор $\overline{R}$ направлен из начала первого вектора суммы к концу последнего. Записывается сумма так: $\overline{R}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+...+\overline{l}$.

Легко проверяются следующие свойства сложения векторов.

Свойство 1. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$, т. е. сложение векторов коммутативно для любых двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Свойство 2. $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$, т. е. сложение векторов ассоциативно.

Свойство 3. $0\cdot\overline{a}=\overline{0}$ для любого вектора $\overline{a}$.

Свойство 4. $\alpha\left(\beta\overline{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\overline{a}$ для любых чисел α,β и вектора $\overline{a}$.

Свойство 5. $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$ для любого вектора $\overline{a}$.

Свойство 6. $\overline{a}+\left(-\overline{a}\right)=\overline{0}$ для любого вектора $\overline{a}$.

Свойство 7. $m(\overline{a}+\overline{b})=m\overline{a}+m\overline{b}$, т. е. сложение векторов дистрибутивно по отношению к умножению на число.

Свойство 8. $(m+n)\overline{a}=m\overline{a}+n\overline{a}$ для любых чисел m и n и вектора $\overline{a}$.

1.3 Базис

Определение 11. Пусть заданы векторы $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_m$ и числа $c_1,c_2,...,c_m$. Вектор $c_1\overline{a}_1+c_2\overline{a}_2...+c_m\overline{a}_m$ называется линейной комбинацией векторов $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_m$. Числа $c_1,c_2,...,c_m$ называются коэффициентами линейной комбинации.

Определение 12. Система векторов $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_m$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие постоянные $c_1,...,c_m$, одновременно не равные нулю, что имеет линейная комбинация равна нулевому вектору $c_1\overline{a}_1+c_2\overline{a}_2+...+c_m\overline{a}_m=\overline{0}$.

Определение 13. Система векторов $\overline{a}_1,\overline{a}_2,...,\overline{a}_m$ называется *линейно независимой*, если из равенства некоторой линейной комбинации векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_m$ нулевому вектору $(c_1\overline{a}_1 + c_2\overline{a}_2 ... + c_m\overline{a}_m = \overline{0})$ следует, что все $c_i = 0\left(i = \overline{1,m}\right)$.

Теорема 1.1. [6]. Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы, и, наоборот, два неколлинеарных вектора линейно независимы.

Теорема 1.2. [6]. Три компланарных вектора линейно зависимы, и, наоборот, три некомпланарных вектора линейно независимы.

Теорема 1.3. [6]. Каждые четыре вектора линейно зависимы.

Определение 14. *Базисом на плоскости* называются два неколлинеарных вектора на этой плоскости, взятые в определенном порядке.

Теорема 1.4. [6]. Если на плоскости векторы $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ выбраны за базис, то любой с ними компланарный вектор $\overline{a}$ можно представить, и притом единственным образом, как линейную комбинацию векторов базиса.

Определение 15. *Базисом в пространстве* называются три некомпланарных вектора, взятых в определенном порядке.

Теорема 1.5. [6]. Если в пространстве векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$ выбраны за базис, то любой вектор $\overline{l}$ пространства можно представить, и притом единственным образом, как линейную комбинацию векторов базиса.

Из этой теоремы следует, что каждому вектору в пространстве базис позволяет сопоставить однозначно упорядоченную тройку чисел.

Наоборот, каждой упорядоченной тройке чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ с помощью базиса $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ мы сопоставим единственный вектор пространства $\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \alpha_3\overline{e}_3$.

Определение 16. Если $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ – базис и вектор $\overline{a} = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \alpha_3\overline{e}_3$, то числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ называются *координатами вектора* $\overline{a}$ в данном базисе.

Свойство 1. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Свойство 2. При сложении векторов складываются их соответствующие координаты.

1.4 Декартова система координат

Зафиксируем в пространстве точку O и рассмотрим произвольную точку M .

Вектор $\overline{OM}$ называется радиус-вектором точки M по отношению к точке O.

Если выбран базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, то точке M можно сопоставить упорядоченную тройку чисел, которые являются координатами ее радиус-вектора.

Определение 17. *Декартовой системой координат* в пространстве называется совокупность точки O и базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Определение 18. Точка O называется началом координат. Прямые, проходящие через O в направлении базисных векторов, называются осями координат. Прямая Ox называется осью абсцисс, Oy – осью ординат, Oz – осью аппликат. Плоскости, проходящие через оси координат, называются координатными плоскостями.

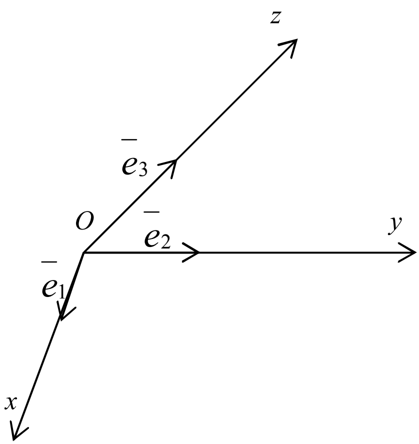


Рис. 1.6. Пример непрямоугольной системы координат Oxyz

Определение 19. Координаты радиус-вектора точки M по отношению к выбранному базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ называются *координатами точки M* в рассматриваемой системе координат.

Координаты точки пишут в круглых скобках после буквы, обозначающей точку. Например, $M(1,2,3)$ означает, что точка M имеет координаты 1, 2, 3 в ранее выбранной декартовой системе координат. Если базисные векторы попарно ортогональны и имеют длину, равную единице, то базис называется ортонормированным; обозначаются базисные векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, а на плоскости через $\bar{i}, \bar{j}$.

Пусть вектор $\overline{M_1M_2}$ имеет началом точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, а концом – точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда $\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1}$, и координаты вектора

$\overline{M_1M_2}$ будут $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

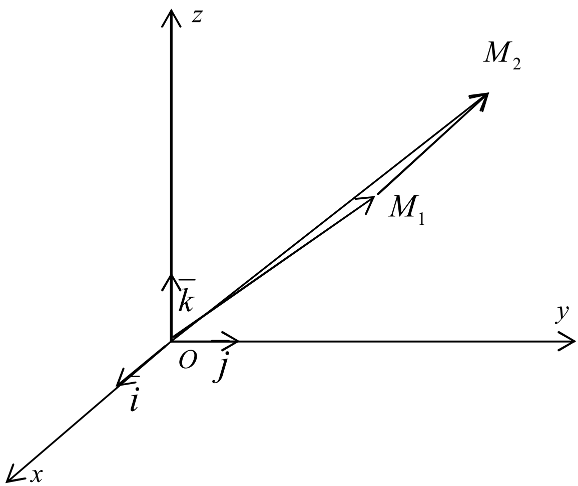


Рис. 1.7. Вектор $\overline{M_1M_2}$
в ортонормированной системе координат

Расстояние между точками M_1 и M_2 – это длина вектора $\overline{M_1M_2}$ с координатами $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Перенесем начало вектора $\overline{M_1M_2}$ в начало координат. Вектор $\overline{OB_1}$ является диагональю параллелепипеда $OABCO_1A_1B_1C_1$ на рисунке 8.

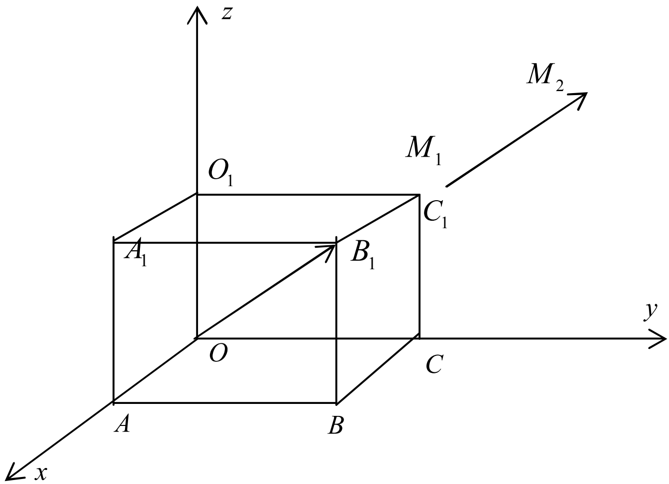


Рис. 1.8. Вектор $\overline{OB_1}$ равен вектору $\overline{M_1M_2}$ и является диагональю параллелепипеда $ABCOA_1B_1C_1O_1$

По свойству диагонали

$$|OB_1| = \sqrt{OA^2 + OC^2 + OO_1^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

т. к. $OA = |x_2 - x_1|, OC = |y_2 - y_1|, OO_1 = |z_2 - z_1|$.

Отсюда следует правило: расстояние между двумя точками равно корню квадратному из суммы квадратов разностей одноименных координат данных точек .

Пример 1. Найти модуль радиус-вектора точки M(2;1;-2). $|\overline{OM}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$.

Пусть даны точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. На прямой AB требуется найти точку $M(x, y, z)$, делящую отрезок AB в отношении λ так, чтобы

$$\overline{AM} = \lambda \overline{MB} \qquad (1.2)$$

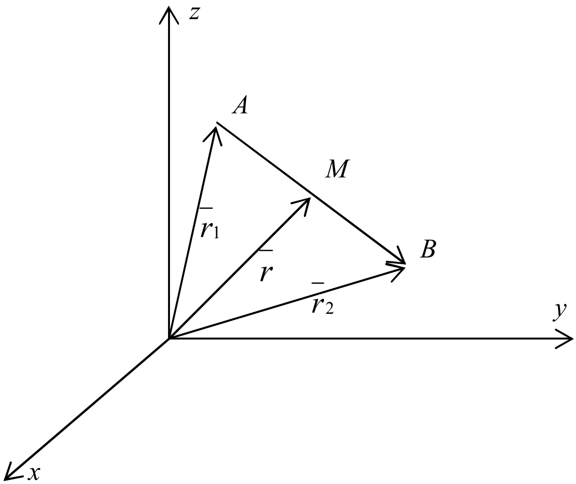


Рис. 1.9. Деление отрезка в заданном соотношении

Определение 20. Если искомая точка *M* лежит между точками *A* и *B,* то такое деление отрезка *AB* называется *внутренним*, и λ в этом случае положительно. Если точка *M* вне отрезка *AB* (на его продолжении), то такое деление называется *внешним*, и λ при этом отрицательно.

$$\overline{AM}=\bar r-\bar r_1, \overline{MB}=\bar r_2-\bar r$$

Условие (1.2) перепишется в виде

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}, \qquad (1.3)$$

Формулы (1.3) известны под названием формул деления отрезка в заданном отношении.

При $\lambda=1$ точка *M* делит отрезок *AB* пополам, и формулы (1.3) принимают вид $x_{cp}=\frac{x_1+x_2}{2}, y_{cp}=\frac{y_1+y_2}{2}, z_{cp}=\frac{z_1+z_2}{2}$, т. е. координаты середины отрезка равны полусумме соответствующих координат его концов.

Лекция № 2. Основы векторной алгебры

2.1 Скалярное произведение векторов

Определение 1. *Скалярным произведением* двух векторов называется число, равное произведению модулей векторов-сомножителей на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то угол не определен, и скалярное произведение по определению полагается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается $(\bar{a}, \bar{b})$ или $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi, \varphi = \left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right). \qquad (2.1)$$

Проекцией вектора $\overline{OB}$ на вектор $\overline{OA}$ называется длина вектора $\overline{OB'}$, где B' – проекция точки B на прямую OA, взятая со знаком плюс, если угол φ между векторами $\overline{OB}$ и $\overline{OA}$ удовлетворяет соотношениям: $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$ и минус, если $\frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$.

Спроецировав вектор $\overline{OB} = \bar{b}$ на вектор $\overline{OA} = \bar{a}$, получим $np_{\bar{a}}\bar{b} = OC = |\bar{b}|\cos\varphi$, $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi = |\bar{a}| \cdot np_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| \cdot np_{\bar{b}}\bar{a}$.

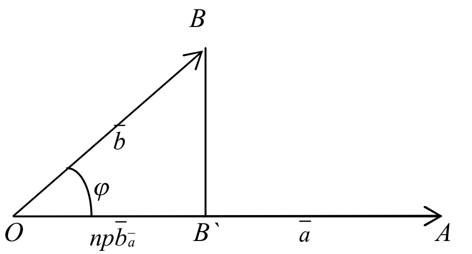


Рис. 2.1. Длина отрезка OB` – это проекция вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{a}$

Определение 2. *Проекцией вектора* $\overline{AB}$ на ось Ox называется проекция вектора $\overline{AB}$ на направляющий вектор $\bar{i}$ этой оси.

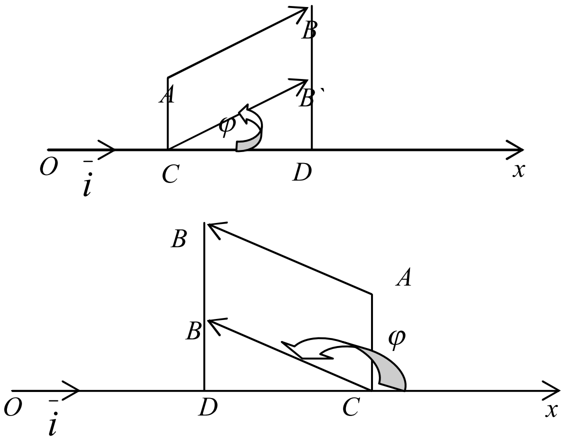


Рис 2.2. а – длина отрезка CD – это проекция вектора на ось Ox . Проекция положительна, поскольку угол φ острый б – проекция отрицательна, поскольку угол φ тупой

Теорема 2.1. [6]. *Проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью.*

Следовательно, скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию второго вектора на первый.

В результате скалярного произведения получается число, а не новый вектор.

Свойство 1. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$, т. е. скалярное произведение коммутативно для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Свойство 2. Для любого вектора $\bar{a}$ выполняется соотношение: $\bar{a}\cdot\bar{a}=|a|^2$.

Свойство 3. Скалярное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы перпендикулярны или один из сомножителей равен нулю.

Свойство 4. Скалярное произведение обладает свойством ассоциативности относительно скалярного множителя:

$$\left(\lambda\bar{a}\right)\cdot\bar{b} \quad \bar{a}=\left(\lambda\bar{b}\right)= \lambda\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\cdot$$

Свойство 5. Скалярное умножение дистрибутивно относительно сложения, т. е. для любых трех векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ имеет место равенство

$$\bar{a}\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}\cdot$$

Используя эти свойства, запишем произведение векторов ортонормированного базиса.

$\bar{i}^2=\bar{j}^2=\bar{k}^2=1$, т. к. $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ – единичные векторы.

Так как они ортогональны, то по свойству 3 $\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{j}\cdot\bar{k}=\bar{i}\cdot\bar{k}=0$.

Пусть в ортонормированном базисе $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$.

Тогда $\bar{a}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}$, $\bar{b}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2\bar{i}\cdot\bar{i}+x_1y_2\bar{i}\cdot\bar{j}+x_1z_2\bar{i}\cdot\bar{k}+y_1x_2\bar{j}\cdot\bar{i}+y_1y_2\bar{j}\cdot\bar{j}+y_1z_2\bar{j}\cdot\bar{k}+$$
$$+z_1x_2\bar{k}\cdot\bar{i}+z_1y_2\bar{k}\cdot\bar{j}+z_1z_2\bar{k}\cdot\bar{k}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, \qquad (2.2)$$

т. е. скалярное произведение двух векторов в ортонормированном базисе равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.

$\bar{a}^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$, откуда модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его координат, т. е. $|\bar{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

Пример 1. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}=2\bar{i}+4\bar{j}-3\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}-4\bar{j}+8\bar{k}$.

Вычислим скалярное произведение по формуле (2.2):

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=2\cdot1+4\cdot(-4)+(-3)\cdot8=-38$$

Определение 4. Косинусы углов вектора с осями координат Ox,Oy,Oz называются *направляющими косинусами* этого вектора.

Из определения скалярного произведения $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$ выразим

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} \qquad (2.3)$$

или

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \qquad (2.4)$$

Положив в формулах (2.3) и (2.4) $\bar{b}=\bar{i}$, найдем

$$\cos\alpha=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

где α – угол вектора $\bar{a}$ с осью Ox в ортогональной системе координат.

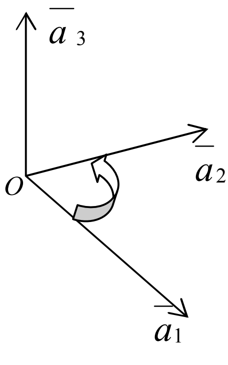
Полагая $\bar{b}=\bar{j}$ и $\bar{b}=\bar{k}$, найдем

$$\cos\beta=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},\ \cos\gamma=\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

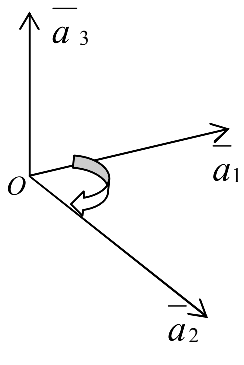
где β и γ – углы между вектором $\bar{a}$ и осями Oy и Oz.

Определение 5. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$ называется *правоориентированной* или просто *правой*, если при наблюдении из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки. В противном случае тройка называется *левоориентированной* или просто *левой*.

Определение 6. Если ортонормированный базис $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ образует правую тройку, то декартова прямоугольная система называется правой. В противном случае прямоугольная система координат называется левой.



а



б

Рис. 2.3. а – векторы $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$ *образуют правую тройку*

б – векторы $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$ *образуют левую тройку*

2.2 Векторное произведение векторов

Определение 7. *Векторным произведением* вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, который:

1) имеет модуль, равный $|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

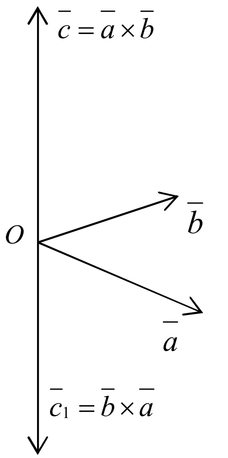


Рис. 2.4. Векторное произведение векторов

2) перпендикулярен к плоскости векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

3) направлен так, чтобы тройка векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ была правой.

Векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначается символом $\overline{a}\times\overline{b}=\overline{c}$ или $\left[\overline{a}\cdot\overline{b}\right]=\overline{c}\cdot$

Определение 8. Если хоть один из сомножителей – нулевой вектор, то векторное произведение, по определению, есть нулевой вектор.

Из определения 7 вытекает, что модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

В механике существуют различные приложения понятия векторного произведения. Например, если вектор $\overline{b}$ обозначает силу, приложенную к точке M с радиус-вектором $\overline{r}=\overline{OM}$, то векторное произведение $\overline{r}\times\overline{b}$ обозначает момент силы $\overline{b}$ относительно точки O.

Свойства векторного произведения

Свойство 1. [6]. Векторное произведение антикоммутативно, т. е. всегда $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$.

Свойство 2. [6]. Для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и любого числа λ выполнены равенства $\left(\lambda\overline{a}\right)\times\overline{b}=\overline{a}\times\left(\lambda\overline{b}\right)=\lambda\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot$

Свойство 3. [6]. Векторное умножение дистрибутивно относительно сложения, т. е. для любых векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ имеет место равенство

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}\cdot$$

Свойство 4. [6]. Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ является равенство нулю их векторного произведения.

На основании изложенных свойств рассмотрим векторные произведения ортов $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. По свойству коллинеарности векторов имеем: $\overline{i}\times\overline{i}=\overline{j}\times\overline{j}=\overline{k}\times\overline{k}=\overline{0}$. Вектор $\overline{i}\times\overline{j}$ – это вектор, ортогональный с $\overline{i}$ и $\overline{j}$ и образующий с ними правую тройку. Модуль вектора $\overline{i}\times\overline{j}$ – это площадь квадрата *OABD* со стороной 1, т. е. $|\overline{i}\times\overline{j}|=1$, следовательно, это вектор $\overline{k}$.

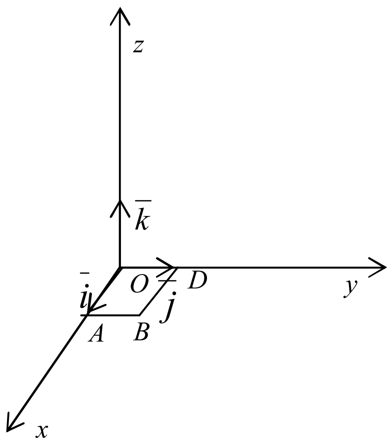


Рис. 2.5. Векторное произведение векторов $\overline{i}$ и $\overline{j}$ равно $\overline{k}$

$$\overline{i}\times\overline{j}=\overline{k} \tag{2.5}$$

Аналогично находим, что

$$\overline{j}\times\overline{k}=\overline{i}, \overline{k}\times\overline{i}=\overline{j}. \tag{2.6}$$

Переставив сомножители в равенствах (2.5) и (2.6), на основании свойства 1 векторного произведения получим

$$\overline{j}\times\overline{i}=-\overline{k},\ \overline{k}\times\overline{j}=-\overline{i},\ \overline{i}\times\overline{k}=-\overline{j}.$$

Для векторного произведения векторов ортонормированного базиса можно составить таблицу.

	$\overline{i}$	$\overline{j}$	$\overline{k}$
$\overline{i}$	$\overline{0}$	$\overline{k}$	$-\overline{j}$
$\overline{j}$	$-\overline{k}$	$\overline{0}$	$\overline{i}$
$\overline{k}$	$\overline{j}$	$-\overline{i}$	$\overline{0}$

Определение 9. Таблица $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, составленная из чисел $a_{ij}\,(i,j=\overline{1,2})$, называется *квадратной матрицей* второго порядка. Матрицы обозначаются обычно заглавными латинскими буквами A, B, C и т. д.

Определение 10. *Определителем* второго порядка квадратной матрицы $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ называется число $|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. Обозначается определитель также следующим образом: $\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Определение 11. Таблица

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad (2.7)$$

составленная из чисел $a_{ij}\,(i,j=\overline{1,3})$, называется *квадратной матрицей* третьего порядка.

Определителем матрицы (2.7) называется число

$$\Delta=(-1)^{1+1}\cdot a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (2.8)$$

Определитель третьего порядка также обозначается:

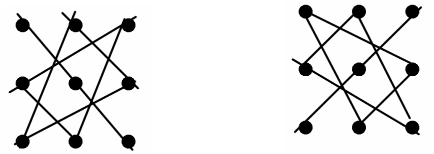
$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Числа $a_{ij}(i, j = \overline{1,3})$ называются элементами определителя и матрицы A.

Если в равенстве (2.8) заменить определители второго порядка их выражениями, то получим:

$$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{23})$$

Для вычисления определителей третьего порядка удобно пользоваться правилом треугольников (правилом Саррюса)



а *б*

Рис. 2.6. а – эти три слагаемые берутся со знаком плюс,
б – эти три слагаемые берутся со знаком минус

Первые три слагаемых вычисляются как на рисунке (2.6. а), из них вычитаются три слагаемых, изображенных на рисунке (2.6. б).

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot 1 -$$
$$-7 \cdot (-3) \cdot 4 = 14 + 18 + 12 - 18 + 2 + 84 = 112$$

Пусть в прямоугольной системе координат векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$; $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, тогда $\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}; \overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$.

Рассмотренные свойства векторного произведения позволяют произвести перемножение векторов $x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$ и

$x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ по правилам умножения обычных многочленов с учетом свойств векторного произведения ортов.

$$\bar{a}\times\bar{b} = \left(x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}\right)\times\left(x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}\right) = x_1x_2\bar{i}\times\bar{i} +$$
$$+x_1y_2\bar{i}\times\bar{j} + x_1z_2\bar{i}\times\bar{k} + y_1x_2\bar{j}\times\bar{i} + y_1y_2\bar{j}\times\bar{j} + y_1z_2\bar{j}\times\bar{k} +$$
$$z_1x_2\bar{k}\times\bar{i} + z_1y_2\bar{k}\times\bar{j} + z_1z_2\bar{k}\times\bar{k} = x_1y_2\bar{k} - x_1z_2\bar{j} - y_1x_2\bar{k} +$$
$$+y_1z_2\bar{i} + z_1x_2\bar{j} - z_1y_2\bar{i}.$$

Полученную формулу можно представить в виде символического определителя

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Пример 3. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = (1,2,2)$ и $\bar{b} = (5,3,4)$.

Найдем векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 6\bar{j} - 7\bar{k}$$

$$S = |\bar{a}\times\bar{b}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + (-7)^2} = \sqrt{4+36+49} = \sqrt{89}$$

Определение 12. *Смешанным произведением* трех векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ называется число, которое получается при умножении векторного произведения $\bar{a}\times\bar{b}$ скалярно на вектор $\bar{c}$. Оно обозначается $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right) = \bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$.

Смешанное произведение некомпланарных векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на сомножителях. Оно положительно, если тройка векторов $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ правая, и отрицательно, если она левая.

Свойство 1. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Свойство 2. Операции скалярного и векторного произведения в смешанном произведении можно менять местами, т. е. $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)$.

Свойство 3. Круговая перестановка трех сомножителей смешанного произведения не меняет его величины. Перестановка же двух соседних сомножителей меняет знак произведения на противоположный, т. е.

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=(\overline{b},\overline{c},\overline{a})=(\overline{c},\overline{a},\overline{b})=-(\overline{b},\overline{a},\overline{c})=-(\overline{c},\overline{b},\overline{a})=-(\overline{a},\overline{c},\overline{b}).$$

Пусть в прямоугольной системе координат векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ заданы своими координатами: $\overline{a}=(x_1,y_1,z_1);\overline{b}=(x_2,y_2,z_2);\overline{c}=(x_3,y_3,z_3)$.

Тогда $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$.

Используя свойство 1, условие компланарности трех векторов, заданных своими координатами, запишем так:

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=0.$$

Пример 4. Необходимо проверить, лежат ли точки $A(1;2;3),B(3;4;7),C(2;5;1),D(3;4;3)$ в одной плоскости.

Точки A,B,C,D лежат в одной плоскости при условии, что векторы $\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}$ компланарны.

$$\overline{AB}=(2,2,4),\overline{AC}=(1,3,-2),\overline{AD}=(2,2,0).$$

$$\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}2 & 2 & 4\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix}=2\cdot3\cdot0+2\cdot(-2)\cdot2+4\cdot1\cdot2-4\cdot3\cdot2-2\cdot1\cdot0-2\cdot2\cdot(-2)=$$

$$=-8+8-24+8=-16\neq0,$$

следовательно, точки *A,B,C,D* не лежат в одной плоскости.

Лекция № 3. Преобразования координат

3.1 Движения на плоскости

Рассмотрим на плоскости две прямоугольные системы координат *Oxy* и O_1XY, у которых направления соответствующих осей одинаковы, а начала *O* и O_1 различны.

Определение 1. Система координат O_1XY называется *новой*, получается из системы координат *Oxy*, называемой *старой*, параллельным переносом осей координат.

Пусть *M* – произвольная точка плоскости, *x,y* и *X,Y* – ее координаты соответственно в старой и новой системах.

Тогда $\overline{OM} = \overline{OO_1} + \overline{O_1M}$. Пусть O_1 имеет координаты a,b в старом базисе, тогда

$$x = X + a; y = Y + b \qquad (3.1)$$

выражение старых координат точки *M* через новые.

$$X = x - a; Y = y - b \qquad (3.2)$$

выражение новых координат через старые.

Равенства (3.1) и (3.2) – это формулы преобразования координат произвольной точки *M* плоскости при параллельном переносе координатных осей.

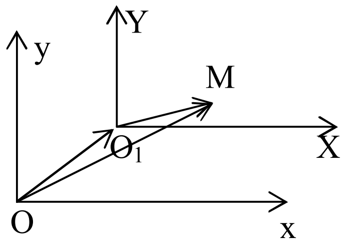


Рис. 3.1. Точка M имеет разные координаты в старой и новой системах координат

Поворот осей прямоугольной системы координат на плоскости

Рассмотрим две прямоугольные системы координат *Oxy* и *OXY* с общим началом, но различными направлениями осей, причем ось *Ox* составляет с осью *OX* угол α.

Говорят, что новая система координат получена из старой системы *Oxy* поворотом на угол α вокруг общего начала. Пусть *M* – произвольная точка плоскости, *x,y* и *X,Y* – ее координаты соответственно в старой и новой системах координат. Спроецируем точку *M* на оси координат и построим ее радиус-вектор $\overline{OM}$.

Введем обозначения: $r = |\overline{OM}|, (OM\hat{,}Ox) = \varphi; (OM\hat{,}OX) = \varphi_1$. Из треугольников *OMP* и *OMN* находим

$$x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi$$

$$X = r\cos\varphi_1; Y = r\sin\varphi_1$$

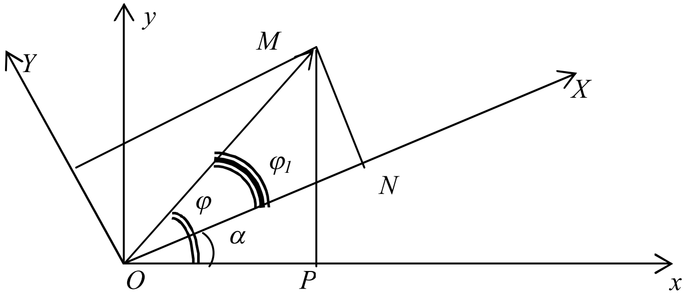


Рис. 3.2. Новая система координат получается из старой поворотом на угол α вокруг начала координат

Так как $\varphi = \alpha + \varphi_1$, то

$$x = r\cos(\varphi_1 + \alpha) = r(\cos\varphi_1\cos\alpha - \sin\varphi_1\sin\alpha) = X\cos\alpha - Y\sin\alpha$$

$$y = r\sin(\varphi_1 + \alpha) = r(\sin\varphi_1\cos\alpha + \cos\varphi_1\sin\alpha) = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \qquad (3.3)$$

Формулы (3.3) выражают старые координаты через новые.

Поскольку система Oxy получается из системы OXY поворотом на угол $-\alpha$, то, заменив в формулах (3.3) обозначения координат и угол α на $-\alpha$, получим

$$X = x\cos\alpha + y\sin\alpha \qquad (3.4)$$

$$Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha\,. \qquad (3.5)$$

Формулы (3.4) и (3.5) выражают новые координаты через старые.

Определение 2. Рассмотрим две прямоугольные правые системы координат $Oxyz$ и $OXYZ$ в пространстве, имеющие общее начало. Первую будем называть *старой*, вторую *новой*.

Разложим каждый из координатных векторов новой системы по координатам старой:

$$\bar{i}_1 = a_{11}\bar{i} + a_{12}\bar{j} + a_{13}\bar{k}$$

$$\bar{j}_1 = a_{21}\bar{i} + a_{22}\bar{j} + a_{23}\bar{k}$$

$$\bar{k}_1 = a_{31}\bar{i} + a_{32}\bar{j} + a_{33}\bar{k}.$$

Пусть M – произвольная точка, имеющая координаты (x,y,z) в старой системе координат и (X,Y,Z) в новой.

Тогда $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = X\bar{i}_1 + Y\bar{j}_1 + Z\bar{k}_1\cdot$

Умножая это равенство скалярно на $\bar{i}$, получаем

$$x = a_{11}X + a_{21}Y + a_{31}Z \qquad (3.6)$$

Умножая скалярно на $\overline{j}$ и $\overline{k}$, получаем

$$y = a_{12}X + a_{22}Y + a_{32}Z \qquad (3.7)$$

$$z = a_{13}X + a_{23}Y + a_{33}Z \qquad (3.8)$$

3.2 Полярная система координат на плоскости

Наряду с декартовой системой координат применяются и другие. На плоскости часто используется полярная система координат.

Определение 3. Полярная система координат на плоскости определяется заданием точки *O – полюса*, луча *Op – полярной оси* и единичного направленного отрезка $\overline{OE} \uparrow\uparrow Op$.

Положение произвольной точки *M*, отличной от точки O, на плоскости определяется следующими двумя числами (полярными координатами): $\rho = |\overline{OM}|, \varphi = \left(\widehat{Op, \overline{OM}}\right)$.

Отсчет угла φ ведется от полярной оси в положительном направлении и исчисляется в радианах. Число ρ называется полярным радиусом точки *M*, а φ – полярным углом. То, что упорядоченная пара чисел ρ и φ является координатами точки *M*, записывается так: $M(\rho, \varphi)$.

Из построения полярной системы координат следует, что числа ρ и φ могут изменяться в следующих пределах:

$$0 \le \rho < +\infty; 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Для полярных координат точки *O* примем $\rho = 0, \varphi$ остается неопределенным.

Таким образом, каждой точке плоскости (кроме полюса) соответствует вполне определенная упорядоченная пара чисел – ее полярные координаты, и обратно, любой паре чисел, первое из которых определено в промежутке $[0, +\infty)$, а второе – в промежутке $[0, 2\pi]$, соответствует вполне определенная точка плоскости.

Множество точек, для которых $\varphi = const$, а ρ изменяется в промежутке от 0 до $+\infty$,образует луч, исходящий из полюса, а множество точек, для которых $\rho = const$, а φ изменяется от 0 до 2π , образует окружность радиуса ρ с центром в полюсе.

Выясним, как связаны полярные и прямоугольные координаты одной и той же точки плоскости, если на этой плоскости введены одновременно полярные и прямоугольные координаты так, что полюс O совпадает с началом координат, а полярная ось Op с осью Ox.

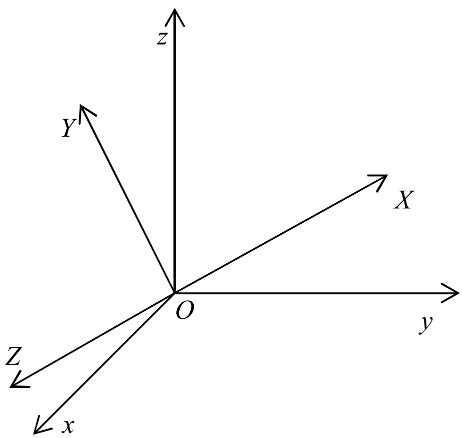


Рис. 3.3. Новая система получается из старой поворотом в пространстве вокруг начала координат

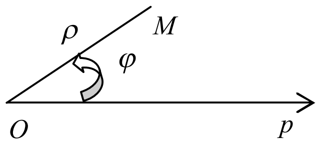


Рис. 3.4. Точка M имеет полярные координаты (ρ, φ)

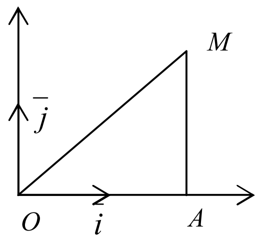


Рис. 3.5. Связь между полярными и декартовыми координатами точки M

Из треугольника OMA:

$$x = \rho\cos\varphi; y = \rho\sin\varphi \tag{3.9}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,; \ \cos\varphi = \frac{x}{\rho}; \sin\varphi = \frac{y}{\rho},$$

откуда

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{3.10}$$

Итак, если известны полярные координаты ρ и φ точки, то ее декартовы координаты определяются из равенств (3.9). Если же заданы декартовы координаты, то полярные координаты определяются из равенств (3.10).

Пример 1. Найти полярные координаты точки *A*, зная ее прямоугольные декартовы координаты: *A*(-3,3).

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$$\triangleright \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

следовательно, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. $\triangleleft$

3.3 Цилиндрическая система координат

В пространстве, кроме декартовой системы координат, часто используют и другие, например цилиндрическую систему координат.

Пусть в пространстве введена прямоугольная система координат *Oxyz* и задана произвольная точка *M*, не лежащая на оси *Oz*. Построим $\overline{MN}$, перпендикулярный к координатной плоскости Oxy и $\overline{ON}$. Точку *M* можно задать следующими тремя упорядоченными числами:

1) расстоянием $\rho = |\overline{ON}|$, называемым полярным радиусом проекции точки *M*;

2) мерой угла $\varphi = \left(Ox, \widehat{\overline{ON}} \right)$, называемым полярно-цилиндрическим углом;

3) аппликатой *z*.

Определение 4. Эта упорядоченная тройка чисел называется *цилиндрическими координатами* точки.

Цилиндрические координаты изменяются в следующих пределах

$$0 \le \rho < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi; -\infty < z < +\infty. \quad (3.11)$$

Каждой точке пространства, за исключением точек оси *Oz*, соответствует вполне определенная упорядоченная тройка чисел – ее цилиндрические координаты, и обратно, каждой упорядоченной тройке чисел, удовлетворяющих условиям (3.11), соответствует вполне определенная точка, для которой эти числа являются цилиндрическими координатами: $M(\rho, \varphi, z)$.

Установим связь между цилиндрическими и декартовыми координатами одной и той же точки пространства.

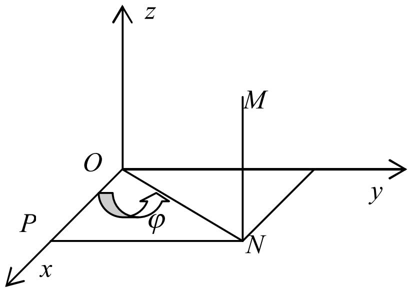


Рис. 3.6. Точка M в цилиндрической системе координат

Из треугольника *OPN*:

$$x = \rho\cos\varphi;\ y = \rho\sin\varphi;\ z = z. \tag{3.12}$$

Обращая эти формулы, получим:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{3.13}$$

3.4 Сферическая система координат в пространстве

В пространстве также часто используется сферическая система координат.

Пусть в пространстве задана прямоугольная система координат Oxyz и дана произвольная точка M(x,y,z), не лежащая на оси Oz.

Построим отрезок MN, перпендикулярный к координатной плоскости Oxy, NP и ON. Точку M можно задать следующими тремя упорядоченными числами:

1) Расстоянием $\rho = |\overline{OM}|$, называемым сферическим радиусом точки *M*;

2) мерой угла $\varphi = (Ox, \overline{ON})^{\wedge}$, который называется первым сферическим углом.

3) мерой угла $\varphi = (\overline{ON}, \overline{OM})^{\wedge}$, который называется вторым сферическим углом.

Определение 5. Эта упорядоченная тройка чисел называется *сферическими координатами* точки M.

Условимся исчисление углов φ и θ вести соответственно от положительного направления оси Ox и плоскости Oxy.

При этих условиях сферические координаты изменяются в следующих пределах:

$$0 \le \rho < +\infty; 0 \le \varphi < 2\pi; -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \qquad (3.14)$$

Выясним, как связаны сферические и прямоугольные координаты одной и той же точки.

Из треугольника OPN:

$$x = |ON| \cdot \cos\varphi; y = |ON| \cdot \sin\varphi, \qquad (3.15)$$

а из треугольника OMN:

$$|ON| = \rho\cos\theta, z = \rho\sin\theta. \qquad (3.16)$$

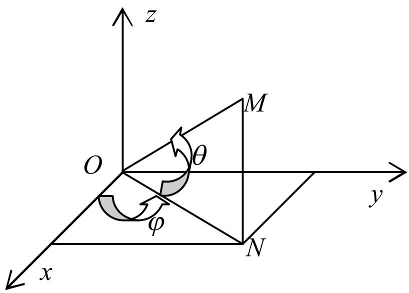


Рис. 3.7. Сферические координаты точки M

Подставив значение $|ON|$ из (3.16) в (3.15), получим

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta; y = \rho\sin\varphi\cos\theta; z = \rho\sin\theta. \qquad (3.17)$$

Обращая формулы (3.17), получим

$$\left.\begin{aligned} &\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &\sin\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (3.18)$$

ТЕОРИЯ МАТРИЦ, ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Лекция №4. Основы теории матриц

4.1 Матрицы

Определение 1. Рассмотрим прямоугольную таблицу из *mn* чисел:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

Эта таблица называется матрицей размеров $m \times n$.

Матрицу размеров $m \times n$ обычно обозначают следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; (a_{ij})(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}) \tag{4.1}$$

Иногда матрицу обозначают одной буквой, например $A = (a_{ij})(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$. Если хотят указать размеры матрицы, то пишут $A_{m \times n}$.

Определение 2. Числа, из которых составлена матрица, называются *элементами* матрицы.

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ составляют i-ую строку, а элементы $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}$ – j-й столбец матрицы (a_{ij} – элемент матрицы, стоящий в i-й строке и j-м столбце).

Определение 3. Матрица $[a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}]$, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой*.

Матрица $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix}$, состоящая из одного столбца, называется матрицей-столбцом.

Определение 4. Две матрицы называются *равными*, если они одинаковых размеров и элементы одной матрицы равны стоящим на этих же местах элементам другой.

Определение 5. Матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m = n$), называется *квадратной*. *Порядком* квадратной матрицы называется число ее строк (или столбцов).

Пример 1.

Матрицы $\left[a_1\right]$; $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ являются квадратными соответственно порядка 1, 2 и 3.

Определение 6. Будем говорить, что в квадратной матрице $(a_{ij})(i, j = \overline{1,n})$ элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ образуют *главную диагональ*, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1}$ – *побочную диагональ*.

Определение 7. *Нулевой* матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю. Она обозначается буквой O, т. е.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

Определение 8. *Диагональной* называется квадратная матрица, у которой все элементы, находящиеся не на главной диагонали, равны нулю, т. е. матрица вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Определение 9. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной*, обозначается буквой E.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = (\delta_{ij})$$

Здесь $\delta_{ij} = \begin{cases} 1\ при\ i = j \\ 0\ при\ i \neq j \end{cases}$ обозначает *символ Кронекера*. Таким образом, символ Кронекера – это функция, принимающая значение 1 если $i = j$ и 0, если $i \neq j$.

Определение 10. Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. При этом матрицу вида

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$ называют верхней треугольной,

а матрицу вида $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$ – нижней треугольной.

4.2 Операции над матрицами

Сложение матриц

Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров.

Определение 11. *Суммой* двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$, такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} (i \ \overline{1,m};\ j \ \overline{1,n})$.

Сумма матриц A и B обозначается $A + B$.

Умножение матрицы на число

Определение 12. *Произведением матрицы* $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на число* α называется матрица $B_{m\times n} = (b_{ij})$, такая, что $b_{ij} = \alpha a_{ij} (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$. Обозначается $B = \alpha A$.

Пример 2. Произведение матрицы $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ на число $\alpha = -4$ есть матрица $\begin{bmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 0 & -4 & -16 \end{bmatrix}$.

Матрицу *(-1)A* назовем матрицей, противоположной матрице *A*, и обозначим *–A*.

Легко проверить справедливость следующих свойств:

1. $A + B = B + A$.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность).
3. $A + 0 = A$.
4. $A + (-A) = 0$.
5. $1A = A$.
6. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (ассоциативность относительно умножения на числа).
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц).

8. $(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$ (дистрибутивность умножения на матрицу относительно сложения чисел).

Умножение матриц

Определение 13. Пусть дана сумма n слагаемых $a_1+a_2+\ldots+a_n$. Ее кратко обозначают с помощью символа $\sum$ следующим образом: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1+a_2+\ldots+a_n$.

При этом индекс i называется индексом суммирования. Например,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = a_{1j}+a_{2j}+\ldots+a_{nj};$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a_{i1}+a_{i2}+\ldots+a_{in}.$$

Легко проверить справедливость следующих свойств:

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{h=1}^{n} a_h$ (сумма не зависит от обозначения индекса суммирования).

2. $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha a_i = \alpha\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ (множитель, не зависящий от знака суммирования, можно выносить за знак суммы).

3. $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i+b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$.

4. $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$ (Здесь $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n}(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij})$).

Определение 14. Матрицу A будем называть *согласованной* с матрицей B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Пример 3. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}.$$

Матрица *A* согласована с матрицей *B*, поскольку число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B*.

Матрица *B* не согласована с матрицей *A*, т. к. матрица *B* имеет один столбец, а число строк матрицы *A* равно двум.

Матрица *A* не согласована с матрицей *C*, но матрица *C* согласована с матрицей *A*.

Матрица *B* не согласована с матрицей *C*, и матрица *C* также не согласована с матрицей *B*.

Произведение матрицы *A* на матрицу *B* вводится только для согласованных матриц, т. е. *A* есть матрица размеров $m \times n$, а *B* – размеров $n \times k$.

Определение 15. *Произведением матрицы* $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на матрицу* $B_{n\times k}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times k}=(c_{ij})$, такая, что $c_{ij}=\sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$.

Произведение матрицы *A* на матрицу *B* обозначается *AB*.

Из определения 15 следует, что элемент матрицы *AB*, стоящий в i -й строке и j -м столбце, равен сумме произведений элементов i -й строки на соответствующие элементы j -го столбца матрицы *B*.

Замечание. Если произведение *AB* существует, то произведение *BA*, вообще говоря, не существует. Если *AB* и *BA* существуют, то, возможно, $AB \neq BA$.

Определение 16. Если *AB* = *BA*, то матрицы называются *перестановочными*, или *коммутируемыми*.

Пример 4. Найти произведение *AB*, если

$$A_{2\times 3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix};\quad ;B_{3\times 2}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}.$$

Матрица $A_{2\times 3}$ согласована с матрицей $B_{3\times 2}$, поэтому существует матрица $C_{2\times 2}=A_{2\times 3}B_{3\times 2}$

$$A_{2\times3}B_{3\times2}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{bmatrix}$$

Пример 5. Умножить матрицу A на матрицу B.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 8\\ -1 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}2\cdot1+1\cdot(-1) & 2\cdot2+1\cdot0 & 2\cdot8+1\cdot4\\ (-2)\cdot1+3\cdot(-1) & -2\cdot2+3\cdot0 & -2\cdot8+3\cdot4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 20\\ -5 & -4 & -4\end{bmatrix}.$$

Из определения операции умножения матриц следует, что $AE=EA=A, A0=0A=0.$

Определение 17. Если матрица A согласована с матрицей B, а матрица B согласована с матрицей C, то под *произведением ABC трех матриц* понимаем матрицу, полученную последовательным умножением данных матриц, т. е. матрицу *(AB)C*.

Справедливы следующие свойства (при условии, что указанные операции имеют смысл)

1) $(AB)C=A(BC)$ (ассоциативность).
2) $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$ (обозначается αAB).
3) $(A+B)C=AC+BC$ (дистрибутивность умножения справа относительно сложения матриц).
4) $C(A+B)=CA+CB$ (дистрибутивность умножения слева относительно сложения матриц).

В лекции 3 был рассмотрен поворот системы координат в пространстве. Старые координаты точки M выражаются через новые по формулам (3.6), (3.7), (3.8). В матричном виде можно записать эти формулы в виде одного матричного равенства:

$$(x\quad y\quad z)=(X\quad Y\quad Z)\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\qquad(4.2)$$

Транспонирование матрицы

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, транспонированной к данной. Матрицу, транспонированную к матрице A, обозначают A^T.

Если

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

то

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Справедливы следующие свойства:

$$(A^T)^T = A.$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T.$$

$(A+B)^T = A^T + B^T$, где A и B – матрицы одинакового размера.

$(AB)^T = B^T A^T$, где матрица A согласована с матрицей B.

Для произведения трех матриц имеем

$$(ABC)^T = ((AB)C)^T = C^T (AB)^T = C^T B^T A^T.$$

Блочные матрицы

До сих пор мы рассматривали матрицы, элементами которых являются числа. Можно рассматривать матрицы, элементами которых являются, в свою очередь, матрицы. Такие матрицы называются *блочными*.

Определение 18. Пусть дана матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Разобьем ее вертикальными и горизонтальными прямыми на несколько матриц. Полученные при этом матрицы называются *блоками* (*клетками*) матрицы A.

Данную матрицу можно записать в виде матрицы, элементами которой являются блоки.

Определение 19. Если элементами матрицы являются матрицы, то будем говорить, что матрица записана в виде *блочной* матрицы.

Пример 6.

Пусть данная матрица A разбита на блоки следующим образом

$$A=\left[\begin{array}{c|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{array}\right]$$

Введем обозначения:

$$B=B_{2\times1}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}; \qquad C=C_{2\times2}=\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix};$$

$$D=D_{2\times1}=\begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{bmatrix}; \qquad F=F_{3\times1}=\begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{41} \\ a_{51} \end{bmatrix};$$

$$G=G_{3\times2}=\begin{bmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \\ a_{52} & a_{53} \end{bmatrix}; \qquad H=H_{3\times1}=\begin{bmatrix} a_{34} \\ a_{44} \\ a_{54} \end{bmatrix}.$$

Тогда матрицу A можно записать в виде блочной:

$$A=\begin{bmatrix} B_{2\times1} & C_{2\times2} & D_{2\times1} \\ F_{3\times1} & G_{3\times2} & H_{3\times1} \end{bmatrix} \text{ или } A=\begin{bmatrix} B & C & D \\ F & G & H \end{bmatrix}.$$

Определение 20. Сумма элементов главной диагонали квадратной матрицы A обозначается $Tr(A)$ и называется *следом* матрицы A.

Легко проверить следующие свойства следа:

1) $Tr(A^T)=Tr(A)$.

2) $Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B)$ (порядок матрицы A равен порядку матрицы B).

3) $Tr(\alpha A)=\alpha Tr(A)$, где α – некоторое число.

Определение 21. Квадратная матрица, для которой $a_{ij}=a_{ji}$, называется *симметричной.*

Матрица A является симметричной тогда и только тогда, когда $A^T=A$.

Определение 22. Квадратная матрица, у которой $a_{ij}=-a_{ji}$, называется *антисимметричной*.

Из этого определения следует, что диагональные элементы антисимметричной матрицы равны нулю, например

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Определение 23. Квадратная матрица A вида

$$A=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}$$

называется *матрицей Жордана.* У матрицы Жордана на главной диагонали стоит число λ, а справа от этого числа стоит 1. Все остальные элементы матрицы Жордана равны нулю.

Лекция № 5. Определитель матрицы

5.1 Перестановки

Определение 1. *Перестановкой* из n натуральных чисел *(1,2,3,…,n)* называется любое их расположение в определенном порядке.

Произвольную перестановку из n чисел будем записывать в виде $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$, где каждое α_i – одно из чисел *1,2,…,n* и $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$.

Подсчитаем число различных перестановок из чисел (1,2,3,…,n). На первом месте можно поместить любое из n данных чисел, на втором – любое из *n-1* оставшихся чисел и т. д., получаем $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 1$. Итак, число различных перестановок из чисел 1,2,3,…,n равно произведению $1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot(n-1)\cdot n$, которое обозначается $n!$ (“эн факториал”).

Определение 2. Будем говорить, что два числа образуют *инверсию* в перестановке, если большее число стоит левее меньшего.

Например, в перестановке (2, 1, 4, 3, 5) пары (2, 1) и (4, 3) образуют инверсию.

Число инверсий в перестановке $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ будем обозначать $I(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$.

Определение 3. Если число инверсий в перестановке четное, то она называется *четной*, в противном случае – *нечетной.*

Определение 4. Если в данной перестановке поменять местами два числа α_i и α_j и оставить на месте другие, то будем говорить, что мы произвели *транспозицию* чисел α_i и α_j.

Теорема 5.1 [2]. *Четность перестановки меняется, если произвести транспозицию.*

5.2 Определитель

Рассмотрим квадратную матрицу

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Возьмем произведение элементов этой матрицы, взятых по одному элементу из каждой строки и столбца. Любое такое произведение будет содержать *n*-элементов и может быть записано в виде $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}...a_{n\alpha_n}$. Здесь первые индексы (*n* строк) упорядочены по возрастанию, а вторые (*n* столбцов) образуют некоторую перестановку из чисел $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$. Всего таких произведений будет столько, сколько существует различных перестановок из *n* элементов, т.е. *n!*. Умножив каждое из *n!* произведений на знак перестановки $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, получим

$$(-1)^{I(\alpha_1\cdots\alpha_n)}\ a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}...a_{n\alpha_n} \tag{5.1}$$

Определение 5. Сумма *n!* произведений вида (5.1) называется *определителем* матрицы *A*, или *детерминантом*.

Определитель обозначается одним из следующих символов

$$\Delta = \det A = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$=\sum(-1)^{I(\alpha_1\cdots\alpha_n)}\ a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}...a_{n\alpha_n} \tag{5.2}$$

Определение 6. Элементы, строки, столбцы матрицы называют соответственно элементами, строками, столбцами определителя матрицы. Рассмотрим частные случаи.

1) *n = 1.* Определитель первого порядка. $|a_{11}| = a_{11}$;

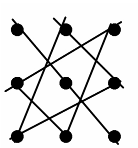
2) *n = 2.* Определитель второго порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21};$$

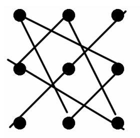
3) $n = 3$. Определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ содержит $3! = 6$ слагаемых

$$(-1)^{I(1,2,3)} \cdot a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{I(1,3,2)} \cdot a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{I(2,1,3)} \cdot a_{12}a_{21}a_{33} +$$
$$+(-1)^{I(2,3,1)} \cdot a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{I(3,1,2)} \cdot a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{I(3,2,1)} \cdot a_{13}a_{22}a_{31} =$$
$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

Эти определения согласуются с определениями, данными в лекции 2. Определитель третьего порядка можно вычислять по правилу треугольников:



а



б

Рис. 5.1. а – эти три слагаемые берутся со знаком плюс;
б – эти три слагаемые берутся со знаком минус

Берутся три слагаемых со знаком плюс и три слагаемых со знаком минус:

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}).$$

5.3 Свойства определителя

1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

▹ Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (5.3)$$

После транспонирования получим матрицу

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (5.4)$$

Всевозможные произведения $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}$ будут одинаковы для матриц (5.3) и (5.4) с той лишь разницей, что элемент i-й строки и j-го столбца матрицы A будет элементом j-й строки и i-го столбца матрицы A^T. Число инверсий в перестановке номеров строк матрицы A^T будет равно числу инверсий в перестановке номеров столбцов матрицы A. Следовательно, $\det A = \det A^T$. ◁

2. Если элементы некоторой строки определителя состоят из нулей, то определитель равен нулю.

▷ Каждое слагаемое (5.2) содержит в качестве множителя элемент нулевой строки, следовательно, оно равно нулю. ◁

3. От перестановки двух строк определитель меняет знак.

▷ В определителе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (5.5)$$

поменяем местами i-ю и j-ю строки. Не нарушая общности, считаем $i < j$. Получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (5.6)$$

Если

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}...a_{i\alpha_i}...a_{j\alpha_j}...a_{n\alpha_n} \qquad (5.7)$$

одно из произведений, составляющее определитель (5.5), то соответствующим ему произведением для определителя (5.6) будет

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}...a_{j\alpha_j}...a_{i\alpha_i}...a_{n\alpha_n}\,. \qquad (5.8)$$

Знаки перестановки для произведения (5.7) и (5.8) отличаются знаком в силу теоремы 5.1, поскольку перестановка $\left(\alpha_1,...,\alpha_j,...,\alpha_i,...,\alpha_n\right)$ получается из перестановки $\left(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j,...,\alpha_n\right)$ применением одной транспозиции, меняющей местами α_i и α_j. Поскольку все произведения, входящие в сумму (5.2), поменяет знак, то и определитель поменяет знак. ◁

4. Определитель, содержащий две одинаковых строки, равен нулю.

▷ Действительно, переставляя две равные строки, получим $\Delta = -\Delta$ в силу свойства 3, откуда следует, что $\Delta = 0$. ◁

5. Общий множитель всех элементов некоторой строки можно вынести за знак определителя.

▷ Пусть элементы i-й строки имеют общий множитель. Так как в каждое произведение (5.1) входит один элемент i-й строки, то все они имеют общий множитель λ, который можно вынести за скобки. ◁

6.Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

▷ Пусть элементы i-й строки пропорциональны элементам j-й строки. Тогда вынесем коэффициент пропорциональности за скобки и получим определитель, содержащий две одинаковые строки, который, в силу свойства 4, равен нулю. ◁

7. Если все элементы i-й строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей , у которых все строки кроме i-й те же, что и у данного определителя, а i-я строка одного определителя состоит из первых слагаемых i-й строки данного определителя, а вторая строка второго из вторых слагаемых данного определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{i1}+b_{i1} & . & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & . & \cdots & \vdots \\ a_{n} & . & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ . & . & \cdots & . \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & . & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

8. Определитель не изменится, если к элементу одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и тоже число.

В приведенных свойствах можно рассматривать не строки, а столбцы определителя.

5.4 Разложение определителя по строке или столбцу

Рассмотрим определитель (5.2). Из его определения известно, что в произведение входит элемент i-ой строки один раз. Сгруппируем те элементы, которые содержат элементы a_{ik} и вынесем за скобки те слагаемые, которые остались. Проделаем эту операцию для всех элементов i-ой строки и получим

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \qquad (5.9)$$

Определение 7. Величину A_{ik} назовем *алгебраическим дополнением* элемента a_{ik}.

Разложение (5.9) называется разложением по элементам i-й строки. Аналогично раскладывается определитель по элементам столбца

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + \ldots + a_{nk}A_{nk} \qquad (5.10)$$

Формулы (5.9) и (5.10) используются при вычислении определителей.

Вычеркнем в определителе (5.2) i-ю строку и j-й столбец. Получится определитель $(n-1)$-го порядка, он называется *минором* элемента a_{ij} определителя n-го порядка и обозначается M_{ij}.

Пример 1. Минором элемента a_{23} матрицы $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ будет определитель $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Для вычисления алгебраических дополнений используется

Теорема 5.2. [2]. *Алгебраические дополнения A_{ij} и минор M_{ij} одного и того же элемента a_{ij} определителя связаны между собой соотношениями*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \qquad (5.11)$$

Теорема 5.3. [2]. *Сумма произведений элементов любого столбца (строки) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца (строки) равна нулю.*

Определение 8. *Элементарными преобразованиями* матрицы называются следующие преобразования:

1. Умножение некоторого столбца (строки) на число, не равное нулю.
2. Прибавление к одному столбцу (строке) другого столбца (строки), умноженного на произвольное число.
3. Перестановку местами двух столбцов (строк) матрицы.

Они используются при вычислении определителя.

Пример 2.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 15 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 15 \end{vmatrix} \overset{2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 11 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 1 & 15 \end{vmatrix} \overset{3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 11 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -11 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 8 & 11 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -11 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= -468$$

1. Прибавили строку 2 к 1.
2. Вычли из 3 строки 1-ую.
3. Умножили 1 строку на (-4) и прибавили 4 строку.

5.5 Обратная матрица

Определение 9. Если для матрицы A существует матрица B такая, что

$$AB = BA = E, \tag{5.12}$$
то матрица B называется *обратной* к матрице A.

Из (5.12) следует, что матрицы A и B квадратные и одного и того же порядка.

Пусть дана квадратная матрица A n-го порядка:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Определение 10. Матрицей, *ассоциированной* с матрицей A, называется матрица

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

где символ A_{ij} обозначает алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы.

Определение 11. *Невырожденной* матрицей называется квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля. Если определитель равен нулю, то матрица называется *вырожденной.*

Теорема 5.4. [2]. *Для того, чтобы существовала матрица B, обратная матрице A, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной.*

Матрица, обратная матрице A, обозначается символом A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Теорема 5.5. *Для невырожденной матрицы существует единственная обратная матрица.*

$\triangleright$: “От противного”. Допустим, что существует две матрицы A_1^{-1} и A_2^{-1}, обратные к матрице A. Тогда имеет место равенство $AA_1^{-1} = E$. Умножив слева на A_2^{-1}, получим $A_2^{-1}(AA_1^{-1}) = A_2^{-1}E = A_2^{-1}$.

С другой стороны, $A_2^{-1}AA_1^{-1} = (A_2^{-1}A)A_1^{-1} \quad EA_1^{-1} \quad A_1^{-1}$. Следовательно, $A_2^{-1} = A_1^{-1}$. $\triangleleft$

Теорема 5.6. *Определитель произведения двух квадратных матриц одного порядка равен произведению определителей:* $\det AB = \det A \det B$.

Следствие: $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$. Это следует из равенства $A \cdot A^{-1} = E, \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$.

5.6 Ранг матрицы

Пусть дана матрица размером $m \times n$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$.

Определение 12. *Рангом* матрицы называется наибольший порядок отличных от нуля миноров матрицы (ранг матрицы A обозначается $rangA$).

Из определения следует:

1) $0 \le rang(A) \le \min(m,n)$, где $\min(m,n)$ – меньшее из чисел m и n;

2) $rangA = 0$ тогда и только тогда, когда матрица A нулевая;

3) для квадратной матрицы A n-го порядка $rangA = n$ тогда и только тогда, когда матрица невырожденная, т. е. $\det A \neq 0$.

Теорема 5.7. *Ранг матрицы, полученной из данной элементарными преобразованиями, равен рангу данной матрицы.*

Эту теорему применяют для нахождения ранга матрицы.

Для нахождения ранга матрицы матрицу элементарными преобразованиями приводят к такой, ранг которой легко найти.

Пример 3. *Найти ранг матрицы*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & 6 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3+(-3)S_1]{S_2+(-2)S_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & -1 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2+(-1)S_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг полученной матрицы равен 2, поскольку есть минор 2-го порядка, отличный от нуля: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$, а любой минор третьего порядка равен нулю.

Лекция № 6.
Системы линейных уравнений

6.1 Матричная запись системы уравнений

Определение 1. *Линейной системой m* уравнений с *n* неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2} + \ldots + a_{mn}x_n = h_m \end{cases}, \qquad (6.1)$$

где $a_{ij}, h_i (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ – числа. Заметим, что h_i – свободный член в i-м уравнении, а a_{ij} – коэффициент при неизвестном x_j в i-м уравнении.

Определение 2. Матрица *A,* составленная из коэффициентов при неизвестных x_i системы (6.1), называется *матрицей системы.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Матрица $\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_2 & \ldots & a_{2n} & h_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & h_m \end{bmatrix}$ называется расширенной матрицей системы.

Обозначим матрицу-столбец из неизвестных $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, а столбец из свободных членов $H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}$.

Тогда система (6.1) может быть записана в матричной форме: $AX = H$.

6.2 Решение системы

Определение 3. Упорядоченный набор чисел $c_1, c_2, ..., c_n$ называется *решением* системы (6.1), если каждое из уравнений (6.1) обращается в верное равенство после подстановки вместо $x_1, x_2, ..., x_n$ соответственно чисел $c_1, c_2, ..., c_n$.

Определение 4. Если существует хотя бы одно решение системы (6.1), то она называется *совместной*, в противном случае – *несовместной*.

Определение 5. Совместная система, имеющая одно (единственное) решение, называется *определенной*. Система, имеющая более одного решения, называется *неопределенной*.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или нет, и в случае совместности найти все ее решения. Например,

$\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ – несовместная система.

Система $\begin{cases} 2x_1 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} \\ x_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$ имеет единственное решение, значит, она совместная и определенная.

Система, состоящая из одного уравнения $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 8$, является совместной, но неопределенной. Положив $x_1 = c_1, x_2 = c_2$, где c_1 и c_2 – произвольные числа, находим $x_3 = \frac{8 - c_1 - 2c_2}{5}$. Множество решений данной системы бесконечно и имеет вид $\left\{ \left(c_1; c_2; \frac{8}{5} - \frac{c_1}{5} - \frac{2}{5}c_2 \right) \middle| \forall c_1, c_2 \in R \right\}$.

Система $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$ – несовместная система.

Определение 6. Две системы называются *эквивалентными*, если каждое решение одной системы является решением другой и наоборот.

6.3 Метод Гаусса

Пусть дана система m уравнений с n неизвестными (6.1). Среди коэффициентов a_{ij} есть хотя бы один, отличный от нуля. Без ограничения общности мы можем считать, что это a_{11}, потому что в ином случае можно переставить уравнения и перенумеровать неизвестные.

Исключаем неизвестное x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для этого умножим i-е уравнение на $-\dfrac{a_{11}}{a_{i1}}$ и прибавим к нему первое уравнение. Если же $a_{i1} = 0$, то i-е уравнение не содержит x_1.

В результате получим систему вида

$$
\begin{array}{r}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1\ ; \\
a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = h_2^{(1)}; \\
a_{32}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = h_3^{(1)}; \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \\
a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = h_m^{(1)};
\end{array}
\qquad (6.2)
$$

эквивалентную системе (6.1). Переход от системы (6.1) к (6.2) назовем первым шагом. После первого шага могут быть следующие случаи:

1. Среди уравнений (6.2) есть такое, у которого все коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член не равен нулю. В этом случае система (6.2), а значит и система (6.1) несовместны.

2. Все коэффициенты $a_{ij}^{(1)}$ и $h_i^{(1)}$ равны нулю. Тогда система (6.2) состоит из одного уравнения. Если $n = 1$, то система имеет единственное решение. В противном случае она имеет бесконечно много решений, т. е. неопределенна.

3. Среди коэффициентов $a_{ij}^{(1)}$ есть отличные от нуля. Без ограничения общности можем считать, что это $a_{22}^{(1)}$.

Переходим ко второму шагу. Исключаем неизвестное x_2 из всех уравнений системы (6.2), начиная с третьего.

Получим систему

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= h_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= h_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n &= h_3^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{mn}^{(2)}x_n &= h_m^{(2)}, \end{aligned}$$

эквивалентную системе (6.1).

В результате второго шага могут быть случаи, аналогичные тем, которые были после первого шага. Если имеет место третий случай, переходим к третьему шагу. Продолжаем этот процесс, пока это возможно. После *p-1* шага получим систему

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= h_1 \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n &= h_2^{(1)} \\ c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n &= h_3^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ d_{pp}x_p + \ldots + d_{pn}x_n &= h_p^{(p-1)} \\ 0 &= h_{p+1}^{(p-1)} \\ \ldots & \\ 0 &= h_m^{(p-1)} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Переход от системы (6.1) к эквивалентной ей системе (6.3) называется прямым ходом метода Гаусса.

Возможны следующие случаи:

1. Хотя бы одно из чисел $h_{p+1}^{(p-1)}, \ldots, h_m^{(p-1)}$ отлично от нуля, тогда система (6.3), а следовательно, и система (6.1) несовместны.

2. Все $h_i^{(p-1)} (i = \overline{p+1, m})$ равны нулю. Тогда последние $m - p$ уравнений вида *0 = 0* можно отбросить. Система (6.3) может иметь один из двух видов: треугольный (при $p = n$)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= h_1 \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n &= h_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ l_{n-1n-1}x_{n-1} + l_{n-1n}x_n &= h_{n-1}^{(n-2)} \\ d_{nn}x_n &= h_n^{(n-1)} \end{aligned} \tag{6.4}$$

или трапецевидный (при $p < n$)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= h_1 \\
b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n &= h_2^{(1)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
d_{pp}x_p + \ldots + d_{pn}x_n &= h_p^{(p-1)},
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

где $a_{11}, b_{22}, \ldots, d_{pp}$ отличны от нуля.

Нахождение неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из системы (6.4) или (6.5) называется обратным ходом метода Гаусса. В системе (6.4) из последнего уравнения находим x_n, подставляем его в (n-1)-е уравнение, находим x_{n-1} и т. д. В результате находим единственное решение системы (6.1).

В системе (6.5) выразим x_p через $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Осуществляя обратный ход, выразим $x_{p-1}, x_{p-2}, \ldots, x_1$ через $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Придавая последним произвольные значения $c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots, c_n$, получаем бесконечно много решений системы (6.1).

На практике при применении метода Гаусса преобразования производятся над строками расширенной матрицы системы.

Пример 1. Решить методом Гаусса систему

$$
\begin{cases}
6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\
x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\
2x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\
3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1
\end{cases}
$$

1. Выпишем расширенную матрицу системы

$$
\overline{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}
$$

2. С помощью элементарных преобразований строк этой матрицы приводим ее к трапециевидному виду, т. е. под главной диагональю стоят нули

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}6&-2&-3&2\\1&1&-1&-2\\2&-1&2&7\\3&2&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-6S_2+S_1\\-3S_3+S_1\\-2S_4+S_1}]{}\begin{bmatrix}6&-2&-3&2\\0&-8&3&14\\0&1&-9&-19\\0&-6&-1&4\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{8S_3+S_2\\-\frac{4}{3}S_4+S_2}]{}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}6&-2&-3&2\\0&-8&3&14\\0&0&-69&-138\\0&0&\frac{13}{3}&\frac{26}{3}\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{S_2}{-69}]{}\begin{bmatrix}6&-2&-3&2\\0&-8&3&14\\0&0&1&2\\0&0&\frac{13}{3}&\frac{26}{3}\end{bmatrix}\xrightarrow[-\frac{3}{13}S_4+S_3]{}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}6&-2&-3&2\\0&-8&3&14\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Этой матрице соответствует система

$$\begin{cases}6x_1-2x_2-3x_3=2\\ \quad -8x_2+3x_3=14\\ \qquad\qquad x_3=2\end{cases}$$

Осуществляя обратный ход метода Гаусса, находим $x_3=2, x_2=-1, x_1=1$.

Преобразования, проводимые на прямом ходе метода Гаусса, соответствуют элементарным преобразованиям системы (6.1). Системе (6.3) соответствует расширенная матрица

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_3&\dots&a_{1n}&h_1\\ &b_{22}&b_{23}&\dots&b_{2n}&h_2^{(1)}\\ &&c_{33}&\dots&c_{3n}&h_3^{(2)}\\ &&.&.&.&.\\ &&d_{pp}&\dots&d_{pn}&h_p^{(p-1)}\\ &&&&&\dots\\ &&&&&h_m^{(p-1)}\end{bmatrix}\qquad(6.6)$$

Система (6.3) совместна тогда и только тогда, когда все $h_{p+1}^{(p-1)},\dots,h_m^{(p-1)}$ равны нулю. Ранг основной матрицы системы (6.3) равен p, поскольку минор порядка p, образованный первыми строками и столбцами, отличен от нуля. Ранг же матрицы (6.6) может быть $p+1$, если хотя бы одно из чисел $h_{p+1}^{(p-1)},...,h_m^{(p-1)}$ отлично от нуля. Нами доказана следующая.

Теорема 6.1. (Кронекера-Капелли) [7]**..** *Для того, чтобы система (6.1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы системы.*

6.4 Метод Крамера

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = h_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = h_n \end{cases} \tag{6.7}$$

или в матричной форме

$$AX = H. \tag{6.8}$$

Матрица A такой системы является квадратной матрицей порядка n.

Определитель этой матрицы

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определение 7. Если определитель системы отличен от нуля, то она называется *невырожденной*. В противном случае – *вырожденной*.

Решим систему (6.7) в случае, если она невырождена. Умножив равенство (6.8) слева на A^{-1}, получим

$$X = A^{-1}H. \tag{6.9}$$

Матричное равенство (6.9) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ . & . & . \\ A_{1j} & \dots & A_{nj} \\ . & . & . \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_j \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11}h_1 + \dots + A_{n1}h_n \\ . \quad . \quad . \quad . \\ A_{1j}h_1 + \dots + A_{nj}h_n \\ . \quad . \quad . \quad . \\ A_{1n}h_1 + \dots + A_{nn}h_n \end{bmatrix}$$

откуда следует, что для любого $j(j=\overline{1,n})$

$$x_j = \frac{1}{\Delta}(A_{1j}h_1 + \dots + A_{nj}h_n),$$

$$A_{1j}h_1 + A_{2j}h_2 + \dots + A_{nj}h_n = \Delta_j,$$

где Δ_j – определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом из свободных членов системы. Итак,

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = \overline{1,n}). \qquad (6.10)$$

Определение 8. Выражения (6.10) называются формулами *Крамера*.

Пример 2. Решить методом Крамера систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 26 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + \ x_3 = 6 \end{cases}.$$

Составим определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot(-2) - \left(3\cdot(-3)\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot(-2)\cdot 1\right) =$$

$$= -3 + 12 - 12 - (-27 + 4 - 4) = 24.$$

Заменим в матрице первый столбец столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 26 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 26\cdot(-3)\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 6 + 3\cdot 4\cdot(-2) - \left(3\cdot(-3)\cdot 6 + 2\cdot 4\cdot 1 + 26\cdot(-2)\cdot 2\right) =$$

$$= -78 + 24 - 24 - (-54 + 8 - 104) = 72.$$

Аналогично найдем

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 26 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot 1 + 26\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 6\cdot 3 - \left(3\cdot 4\cdot 3 + 26\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 6\right) =$$

$$= 4+156+36-(36+52+12)=96.$$

И, наконец, заменяя третий столбец в матрице системы столбцом свободных членов, найдем

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 26 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 6 + 2\cdot 4\cdot 3 + 26\cdot 2\cdot(-2) - \left(26\cdot(-3)\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 6 + 1\cdot 4\cdot(-2)\right) =$$

$$= -18+24-104-(-234+24-8) = 120.$$

Теперь находим по формулам Крамера решения

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 4;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5.$$

Матричный метод решения системы (6.7) состоит в вычислении матрицы A^{-1}. После этого, по формуле (6.9) находим столбец неизвестных *X*. Матричный метод применим также только для невырожденных систем.

6.5 Системы однородных уравнений

Определение 9. Система линейных уравнений называется *однородной*, если свободный член в каждом уравнении равен нулю.

Однородная система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (6.11)$$

Система однородных уравнений всегда имеет решение $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$.

Определение 10. Нулевое решение называется *тривиальным*.

Из критерия совместности следует, что система (6.11) имеет лишь тривиальное решение в случае, если ранг матрицы системы равен числу неизвестных ($r = n$). В частности, если число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$), то система имеет только тривиальное решение в случае, когда определитель матрицы системы отличен от нуля.

Если ранг матрицы системы меньше числа неизвестных, то решений системы бесконечно много.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен двум, поскольку минор $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$ Данная система эквивалентна системе $\begin{cases} 3x_1 - x_3 = -x_2 - 2x_4 \\ 6x_1 + x_3 = -2x_2 + x_4 \end{cases}.$

Отсюда

$$x_1 = \frac{-3x_2 - x_4}{9}, \; x_3 = \frac{-3x_2 - x_4}{3} + x_2 + 2x_4 = \frac{5}{3}x_4.$$

Решения системы имеют вид $\left(\frac{-3C_1 - C_2}{9}; C_1; \frac{5}{3}C_2; C_2 \right)$, где C_1 и C_2 – произвольные числа.

Пусть $C_1, C_2, ..., C_k$ – вектор-решения системы однородных линейных уравнений (т.е. столбцы решений), а $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ – некоторые числа.

Определение 11. Выражение $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + ... + \alpha_k C_k$ называется *линейной комбинацией* вектор-решений $C_1, C_2, ..., C_k$, а $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ – *коэффициенты* этой комбинации. Если все $\alpha_i = 0 (i = \overline{1,k})$, то комбинация называется *тривиальной*.

Определение 12. Вектор-решения $C_1, C_2, ..., C_k$ называются *линейно зависимыми*, если одно из них является линейной комбинацией других. В противном случае они называются *линейно независимыми*.

Теорема 6.2. *Любая линейная комбинация конечного числа вектор-решений системы однородных линейных уравнений является вектор-решением этой системы.*

Определение 13. *Базисными* неизвестными совместной системы, ранг которой равен *r*, назовем *r* неизвестных, коэффициенты которых образуют отличный от нуля минор, называемый также базисным. Остальные неизвестные назовем *свободными*.

Очевидно, базисный минор и базисные переменные можно выбрать различными способами.

Теорема 6.3. *Пусть для системы линейных однородных уравнений* $r < n$*, где* r *– ранг матрицы системы, n – число неизвестных. Тогда существует* $n - r$ *линейно независимых вектор-решений*

$C_1, C_2, ..., C_{n-r}$ *данной системы и любое вектор-решение системы является линейной комбинацией* $C_1, C_2, ..., C_{n-r}$.

$\triangleright$ Пусть в системе (6.11) $r < n$. Тогда система имеет $n - r$ свободных неизвестных.

Не нарушая общности, будем считать базисными неизвестными $x_1, x_2, ..., x_r$. Выразив базисные неизвестные через свободные, получим

$$\begin{cases} x_1 = d_{11}x_{r+1} + ... + d_{1n-r}x_n \\ x_2 = d_{21}x_{r+1} + ... + d_{2n-r}x_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_r = d_{r1}x_{r+1} + ... + d_{rn-r}x_n \end{cases} \qquad (6.12)$$

Придавая $x_{r+1}, ..., x_n$ произвольные значения и находя $x_1, x_2, ..., x_r$ из системы (6.12), найдем все решения системы (6.11).

Любое вектор-решение данной системы можно записать в виде

$$C = \left[x_1, ..., x_r, \alpha_1, ..., \alpha_{n-r}\right]^T, \qquad (6.13)$$

где $\alpha_1, ..., \alpha_{n-r}$ – произвольные числа; $x_1, x_2, ..., x_r$ определяется из равенств (6.12) при $x_{r+1} = \alpha_1, x_{r+2} = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_{n-r}$.

Рассмотрим вектор-решения

$$C_1 = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ \vdots \\ d_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; C_2 = \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ \vdots \\ d_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; ...; C_{n-r} = \begin{bmatrix} d_{1n-r} \\ d_{2n-r} \\ \vdots \\ d_{rn-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (6.14)$$

Из соотношений (6.12)-(6.14) следует, что для любого вектор-решения C имеем

$$C = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + ... + \alpha_{n-r} C_{n-r}, \qquad (6.15)$$

т. е. вектор-решение (6.13) является линейной комбинацией $C_1, C_2, ..., C_{n-r}$. $\triangleleft$

Из доказательства теоремы следует, что $n-r$ есть максимальное число линейно независимых вектор-решений.

Определение 14. Совокупность максимального числа линейно независимых решений однородной системы уравнений называется *фундаментальной системой решений* этой системы.

Решения (6.14) образуют фундаментальную систему решений системы (6.11).

Определение 15. Формула (6.15), где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-r}$ – произвольные числа, дает *общее решение* системы (6.11). Каждое решение, которое получается из (6.15) при конкретных значениях $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-r}$, будем называть *частным решением* системы (6.11).

Пример 4. Найти фундаментальную систему решений для системы, заданной в предыдущем примере.

$$x_1 = \frac{-3x_2 - x_4}{9}$$

$$x_3 = \frac{5}{3}x_4,$$

значит, по формулам (6.14), вектор-решения

$$C_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} \\ 0 \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений.

Лекция № 7. Эквивалентность и подобие матриц

В пункте 5.4 лекции 5 были определены элементарные преобразования матриц.

Определение 1. Матрицы A и B одинаковых размеров называются *эквивалентными* $(A : B)$, если матрицу B можно получить из матрицы A с помощью конечного числа элементарных преобразований.

Определение 2. Матрицы A и B называются *подобными*, если существует такая квадратная невырожденная матрица S, что $B = S^{-1}AS$.

Из определения 2 следует, что если матрица A подобна матрице B, то A и B – квадратные матрицы одного порядка.

Действительно, пусть $B = S^{-1}AS$, где S – квадратная матрица порядка n.

Тогда A согласована с S, следовательно у A n столбцов, S^{-1} согласована с A, следовательно, у A n строк.

Теорема 7.1. Пусть матрица A подобна матрице B. Тогда $\det B = \det A$.

$$\triangleright\ B = S^{-1}AS,\ \det B \quad \det\left(S^{-1}AS\right) = \det\left(S^{-1}\right)\det A \det S$$

$$\frac{1}{\det S}\det A \det S = \det A.\ \triangleleft$$

Теорема 7.2. [2]. *Пусть матрица A подобна матрице B. Тогда след trA матрицы A равен следу trB матрицы B.*

Свойства отношения подобия:

1. Матрица A подобна A. Рефлексивность.
2. Если A подобна B, то B подобна A. Симметричность.
3. Если A подобна B, B подобна C, то A подобна C. Транзитивность.

КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Лекция № 8. Прямые и плоскости

8.1 Прямые на плоскости

Пусть дана прямая l и точка O, не лежащая на l. Возьмем некоторую точку $M_0 \in l$ и вектор $\bar{a} = \overline{AB}$, коллинеарный данной прямой.

Определение 1. Вектор $\bar{a}$, коллинеарный прямой l, называется *направляющим вектором* прямой *l.*

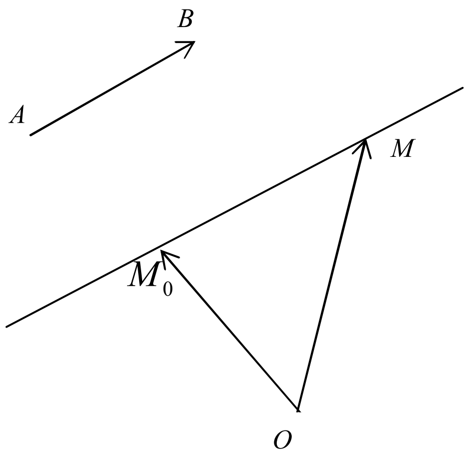


Рис. 8.1. Вектор $\overline{AB}$ *является направляющим вектором прямой.*

Пусть M – произвольная точка прямой l. Приняв точку *O* за начало отсчета, будем иметь $\bar{r}_0 = \overline{OM_0}, \bar{r} \quad \overline{OM}, \bar{r} - \bar{r}_0 = \overline{M_0M}$. Так как $\overline{M_0M}$ коллинеарен $\bar{a}$, то $\overline{M_0M} = \bar{a}t, t \in R$.

Следовательно, $\bar{r} - \bar{r}_0 = \bar{a}t$, или

$$\overline{r} = \overline{r_0} + \overline{a}t \qquad (8.1)$$

Определение 2. Уравнение (8.1) называется *векторно-параметрическим* уравнением прямой.

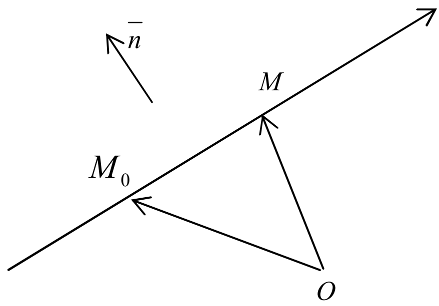


Рис. 8.2. Вектор $\overline{n}$ перпендикулярен прямой

Выберем теперь произвольный ненулевой вектор $\overline{n}$, перпендикулярный к прямой l. Так как $\overline{M_0M}$ перпендикулярен $\overline{n}$, то скалярное произведение $\overline{M_0M} \cdot \overline{n} = 0$ или $\left(\overline{r} - \overline{r_0}\right) \cdot \overline{n} = 0,$ откуда

$$\overline{r} \cdot \overline{n} + C = 0, \qquad (8.2)$$

где $C = -\overline{r_0} \cdot \overline{n}$.

Определение 3. Уравнение (8.2) называется *векторным* уравнением прямой на плоскости в нормальной форме.

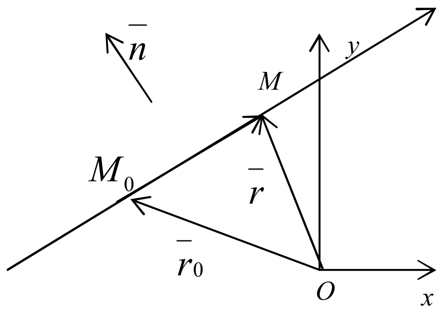


Рис. 8.3. Фиксируем прямоугольную систему координат

Пусть на плоскости в прямоугольной системе координат Oxy с базисом $\left(\bar{i}, \bar{j}\right)$ заданы ненулевой вектор $\bar{n} = (A, B)$ и точка $M_1(x_1, y_1)$.

Теорема 8.1. *Произвольной прямой на плоскости в прямоугольной системе координат соответствует уравнение первой степени относительно координат любой ее точки, и обратно, всякому уравнению первой степени с двумя переменными на плоскости в прямоугольной системе координат соответствует прямая.*

▷ Любая прямая l на плоскости определяется точкой M_0 и вектором $\bar{n}$, нормальным к прямой. Уравнение такой прямой имеет вид $\bar{n}(\bar{r} - \bar{r}_0) = 0$. Пусть $\bar{n}$ имеет координаты $\left(A, B\right), M_0\left(x_0, y_0\right), \bar{r} = (x, y), \bar{r}_0 = (x_0, y_0)$. Тогда уравнение прямой принимает вид $A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) = 0$ или

$$Ax + By + C = 0, \qquad (8.3)$$

где $C = -Ax_0 - By_0$.

Определение 4. Уравнение (8.3) первой степени относительно переменных x и y называется *общим* уравнением прямой.

Обратно, пусть координаты точки $M_0(x_0, y_0)$ удовлетворяют уравнению $Ax + By + C = 0$, т. е.

$$Ax_0 + By_0 + C = 0, \qquad (8.4)$$

Вычтем из уравнения (8.3) уравнение (8.4), получим $A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0$. Это значит, что существуют векторы $\overline{n}=(A,B)$ и $\overline{r}-\overline{r_0}$ $\left(x-x_0, y-y_0\right)$ такие, что $\overline{n}\cdot(\overline{r}-\overline{r_0})=0$. Следовательно, рассматриваемая линия первого порядка есть прямая. ◁

Уравнение (8.1) можно записать в координатной форме. Пусть $\overline{a}=\left(a_x,a_y\right), M_0\left(x_0,y_0\right), M\left(x,y\right)$. Тогда параметрические уравнения примут вид: $\begin{cases} x = x_0 + a_x t \\ y = y_0 + a_y t \end{cases}$.

Если выразить t из обоих уравнений, то получим *каноническое* уравнение прямой:

$$\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}. \qquad (8.5)$$

Пусть задана прямая l и на ней две точки $M_1(\overline{r_1})$ и $M_2(\overline{r_2})$. Вектор $\overline{M_1M_2}=\overline{r_2}-\overline{r_1}$ может быть взят за направляющий вектор и уравнение прямой примет вид

$$\overline{r}=\overline{r_1}+t(\overline{r_2}-\overline{r_1})$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} x = x_1 + t\left(x_2 - x_1\right) \\ y = y_1 + t\left(y_2 - y_1\right) \end{cases}.$$

Если $M_1\left(a,0\right)\in l$ и $M_2\left(0,b\right)\in l$, то уравнение прямой l примет вид

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b} \text{ или } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (8.6)$$

Определение 5. Уравнение прямой (8.6) называется уравнением прямой *в отрезках*.

Уравнение прямой в отрезках можно получить из общего уравнения прямой (8.3), разделив его на $-C$, если $C\neq 0$. Получим $-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1$.

Если прямая l не перпендикулярна к оси Ox, то $B \neq 0$ в уравнении (8.3) и выразив y из этого уравнения, получим $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$. Введя обозначения $-\dfrac{A}{B} = k, -\dfrac{C}{B} = b$, получим уравнение

$$y = kx + b, \tag{8.7}$$

которое называется уравнением прямой с угловым коэффициентом. В этом уравнении $k = tg\varphi$, где φ – угол между прямой l и осью Ox.

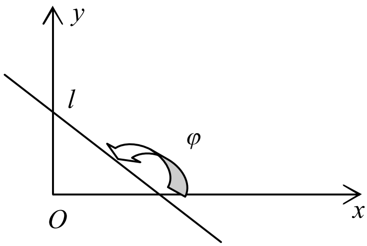


Рис. 8.4. Угол φ – угол между прямой l и осью Ox

В полярных координатах $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$ и уравнение прямой (8.3) принимает вид

$$A\rho\cos\varphi + B\rho\sin\varphi + C = 0 \tag{8.8}$$

Пусть даны две прямые l_1 и l_2, заданные своими параметрическими уравнениями: $x = x_1 + a_1 t, y = y_1 + a_2 t$ и $x = x_2 + b_1 t, y = y_2 + b_2 t$ соответственно. Тогда угол φ между прямыми можно найти как угол между направляющими векторами:

$$\cos\varphi = \left| \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \right|. \tag{8.9}$$

Здесь знак модуля берется, поскольку угол α между векторами может быть тупой, и тогда угол φ между прямыми найдем так: $\varphi = 180^\circ - \alpha$.

Рассмотрим теперь условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.

Если две прямые l_1 и l_2 параллельны, то коллинеарны и их направляющие векторы $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$, и их нормальные векторы $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$. Так как вектор $\overline{a}_1$ коллинеарен $\overline{a}_2$, то их координаты пропорциональны

$$a_{x1} = \lambda a_{x2}; a_{y1} = \lambda a_{y2}. \tag{8.10}$$

Так как $\overline{n}_1$ коллинеарен $\overline{n}_2$, то

$$A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2. \tag{8.11}$$

Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами, то

$$k_1 = k_2 \tag{8.12}$$

Каждое из условий (8.10), (8.11) и (8.12) необходимо и достаточно для того, чтобы прямые были параллельны.

Если прямые l_1 и l_2 взаимно перпендикулярны, то перпендикулярны и их направляющие векторы $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ и нормальные векторы $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$. В координатах это условие можно записать так

$$a_{x1}a_{x2} + a_{y1}a_{y2} = 0 \tag{8.13}$$

Пусть $\overline{n}_1 = (A_1, B_1), \overline{n}_2 = (A_2, B_2)$, тогда условие их перпендикулярности можно записать так: $\overline{n}_1\overline{n}_2 = 0$ или

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{8.14}$$

Угловые коэффициенты связаны соотношением

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{8.15}$$

Каждое из условий (8.13), (8.14) и (8.15) необходимо и достаточно для перпендикулярности прямых l_1 и l_2.

8.2 Плоскости в пространстве

Пусть в пространстве даны плоскость π и точка $O \notin \pi$. Примем O за точку отсчета.

Зафиксируем на плоскости точку $M_0(\overline{r_0})$ и рассмотрим два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$, коллинеарных плоскости π, причем $\overline{a}$ не коллинеарен $\overline{b}$.

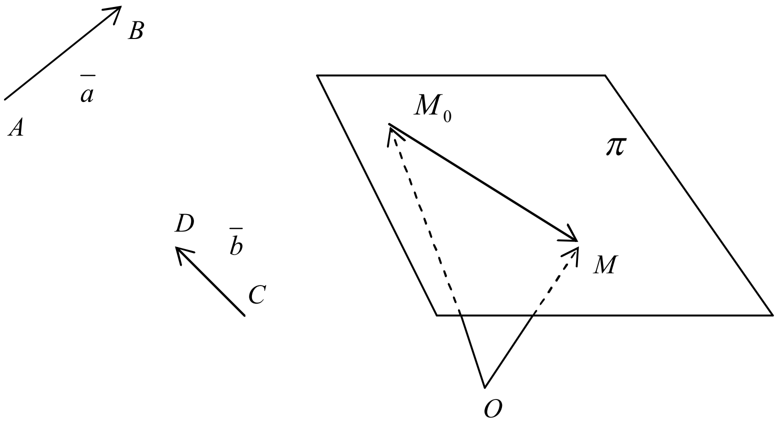


Рис. 8.5. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ параллельны плоскости π

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(\overline{r})$ и построим вектор $\overline{M_0M} = \overline{r} - \overline{r_0}$.

Векторы $\overline{r} - \overline{r_0}$, $\overline{a}$ и $\overline{b}$ компланарны, следовательно, $\overline{M_0M} = u\overline{a} + v\overline{b}(u, v \in R)$ или $\overline{r} - \overline{r_0} = u\overline{a} + v\overline{b}$, откуда

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + u\overline{a} + v\overline{b} \tag{8.16}$$

Если задан вектор $\overline{n}$, перпендикулярный плоскости π, то

$$\left(\overline{r} - \overline{r_0}\right) \cdot \overline{n} = 0 \text{ или } \overline{r} \cdot \overline{n} + D = 0, \tag{8.17}$$

где $D = -\overline{r}_0 \cdot \overline{n}$.

Определение 6. Уравнение (8.16) называется *векторно-параметрическим* уравнением плоскости, а уравнение (8.17) – уравнением плоскости *в нормальной форме*.

Теорема 8.2. *Всякая плоскость в пространстве задается уравнением первой степени относительно переменных* x, y *и* z *в прямо-*

угольной декартовой системе координат, и обратно, всякое уравнение первой степени относительно переменных x, y *и* z *в прямоугольной декартовой системе координат есть уравнение плоскости.*

⊳ Любая плоскость π в пространстве может быть задана вектором $\overline{n}$, перпендикулярным к этой плоскости, и некоторой точкой $M_0 \in \pi$. Уравнение такой плоскости может быть записано в виде $\overline{n}(\overline{r} - \overline{r}_0) = 0$. Пусть в некоторой прямоугольной декартовой системе координат

$$\overline{n} = (A, B, C), \overline{r_0} = (x_0, y_0, z_0), \overline{r} = (x, y, z).$$

Тогда уравнение плоскости π примет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

или

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (8.18)$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Обратно, рассмотрим уравнение первой степени относительно *x, y, z*: $Ax + By + Cz + D = 0$ (8.18).

Пусть x_0, y_0, z_0 – некоторое решение уравнения (8.18)

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \qquad (8.19)$$

Вычтя из уравнения (8.18) уравнение (8.19), получим уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Значит, существуют векторы $\overline{n} = (A, B, C)$ и $\overline{r} - \overline{r_0}$ $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ такие, что $\overline{n} \cdot (\overline{r} - \overline{r_0}) = 0$

Значит, уравнение это является уравнением плоскости. ⊲

Определение 7. Уравнение (8.18) называется *общим* уравнением плоскости.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку *A(2;-3;-1)* перпендикулярно к вектору $\overline{n} = (4, 2, 3)$.

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно к данному вектору, имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ или $4(x-2) + 2(y+3) + 3(z+1) = 0$. Раскрывая скобки, получаем $4x - 8 + 2y + 6 + 3z + 3 = 0$. Приводя подобные, получим $4x + 2y + 3z + 1 = 0$.

Пусть даны три точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Составим уравнение плоскости, проходящей через эти три точки. Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x, y, z)$ и рассмотрим векторы

$$\overline{M_1M} = \bar{r} - \bar{r}_1, \overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1, \overline{M_1M_3} = \bar{r}_3 - \bar{r}_1.$$

Векторы $\bar{r} - \bar{r}_1, \bar{r}_2 - \bar{r}_1, \bar{r}_3 - \bar{r}_1$ компланарны, а значит, смешанное произведение

$$\left(\bar{r} - \bar{r}_1\right)\left(\bar{r}_2 - \bar{r}_1\right)\left(\bar{r}_3 - \bar{r}_1\right) = 0. \qquad (8.20)$$

Определение 8. Уравнение (8.20) – это уравнение плоскости, проходящей через три точки, в векторной форме. В координатах его можно переписать так:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (8.21)$$

Пусть плоскость π пересекает оси координат в точках $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$. Запишем уравнение плоскости

$$\pi: \begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (8.22)$$

Определение 9. Уравнение (8.22) называется уравнением плоскости *в отрезках*.

Пример 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2,2,3), B(-1,-2,0), C(1,2,-1)$. Уравнение (8.21) принимает вид

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 2 & z - 3 \\ -3 & -4 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(-1)^{1+1} 16(x-2) + (-1)^{1+2}(y-2)9 + (-1)^{1+3}(z-3)(-4) = 0;$$

$$\Updownarrow$$

$$16x - 32 - 9y + 18 - 4z + 12 = 0;$$

$$\Updownarrow$$

$$16x - 9y - 4z - 2 = 0.$$

Пусть дана плоскость π , уравнение которой в нормальной форме

$$\bar{r}\cdot\bar{n}_0 - p = 0 \text{, причем } \left|\bar{n}_0\right| = 1 . \qquad (8.23)$$

Определение 10. Уравнение (8.23) называется *нормальным* уравнением плоскости π .

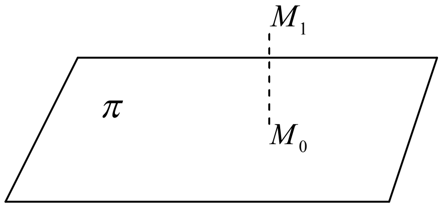


Рис. 8.6. Прямая $\overline{M_1M_0}$ перпендикулярна плоскости

Рассмотрим теперь следующую задачу: требуется найти расстояние d от точки $M_1\left(\bar{r}_1\right)$ до плоскости π . Через точку M_1 проведем прямую l, перпендикулярную к плоскости π . Пусть $M_0\left(\bar{r}_0\right) \in l \cap \pi$. Тогда $\left|\overline{M_0M_1}\right| = \left|\bar{r}_1 - \bar{r}_0\right| = d$.

Поскольку точка $M_1 \notin \pi$, значит

$$\bar{r}_1 \cdot \bar{n}_0 - p \neq 0 . \qquad (8.24)$$

Точка $M_0 \in \pi$, значит $\bar{r}_0 \cdot \bar{n}_0 - p = 0$. Отсюда $p = \bar{r}_0 \cdot \bar{n}_0$.

Подставим значение *p* в (8.24), получим

$$\bar{r}_1 \cdot \bar{n}_0 - \bar{r}_0 \cdot \bar{n}_0 \quad \left(\bar{r}_1 - \bar{r}_0\right) \cdot \bar{n}_0 \quad \pm\left|\bar{r}_1 - \bar{r}_0\right| \cdot \left|\bar{n}_0\right| \quad \pm\left|\bar{r}_1 - \bar{r}_0\right| \quad \pm d$$

(плюс ставится, если векторы $\bar{r}_1 - \bar{r}_0$ и $\bar{n}_0$ сонаправлены, минус – если противоположно направлены).

Итак, $\bar{r}_1\bar{n}_0 - p \quad \pm d$, откуда

$$d = \left|\bar{r}_1\bar{n}_0 - p\right| \qquad (8.25)$$

Если плоскость задана общим уравнением, то для того, чтобы найти расстояние от точки $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ до плоскости

$Ax + By + Cz + D = 0,$ необходимо привести уравнение плоскости к нормальному виду. Тогда

$$\left|\bar{n}_0\right| = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right), p \quad -\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Формула (8.25) запишется в виде

$$d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (8.26)$$

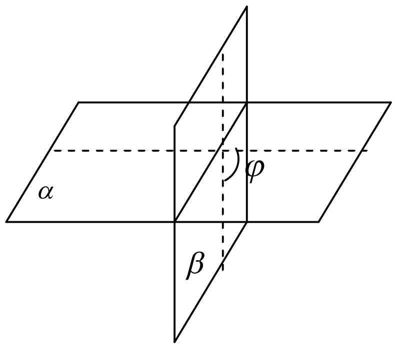


Рис. 8.7. Угол ϕ – это угол между плоскостями α и β

Итак, расстояние от точки до плоскости равно абсолютному значению левой части нормального уравнения этой плоскости при условии, что в это уравнение вместо переменных x, y, z подставлены координаты данной точки.

Пример 3. Вычислить расстояние от точки $A(2,3,-5)$ до плоскости $4x - 2y + 4z + 5 = 0.$

$$d = \left|\frac{4\cdot 2 - 2\cdot 3 + 4\cdot(-5) + 5}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2}}\right| = \left|\frac{8 - 6 - 20 + 5}{\sqrt{36}}\right| = \left|\frac{-13}{6}\right| = \frac{13}{6}.$$

Пусть даны плоскости $\alpha : \bar{n}_1 \cdot \bar{r} + D_1 = 0$ и $\beta : \bar{n}_2 \cdot \bar{r} + D_2 = 0$. При пересечении этих двух плоскостей образуется четыре двугранных угла, попарно равные между собой. Обозначим $\left(\alpha,\hat{\ }\beta\right)=\varphi$, где $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

Рассмотрим условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Если $\alpha\parallel\beta$, то и $\overline{n}_1\parallel\overline{n}_2$, следовательно, $\overline{n}_2=\lambda\overline{n}_1$ и

$$A_2=\lambda A_1, B_2=\lambda B_1, C_2=\lambda C_1,$$

где $\overline{n}_2=\left(A_2,B_2,C_2\right),\overline{n}_1=\left(A_1,B_1,C_1\right)$ в некотором ортонормированном базисе. Если $\alpha\perp\beta,$ то $\overline{n}_1\perp\overline{n}_2.$ Следовательно, $\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2=0$ и $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$

$$\cos\varphi\left(\alpha,\hat{\ }\beta\right)=\cos\varphi=\frac{|\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2|}{|\overline{n}_1|\cdot|\overline{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \quad (8.27)$$

8.3 Прямые в трехмерном евклидовом пространстве

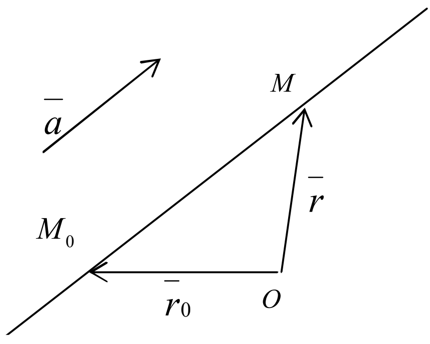


Рис. 8.8. Вектор $\overline{a}$ параллелен прямой

Пусть даны прямая l и точка $O\notin l.$ Возьмем некоторую точку $M_0\left(\overline{r}_0\right)\in l$ и вектор $\overline{a},$ коллинеарный прямой l. Пусть $M\left(\overline{r}\right)$ – произвольная точка на прямой l. Тогда

$$\overline{r}=\overline{r}_0+\overline{a}t \quad (8.28)$$

Определение 11. Уравнение (8.28) называется *векторно-параметрическим* уравнением прямой.

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат $\overline{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right), M\left(x,y,z\right), M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$. Тогда параметрические уравнения прямой в пространстве имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t \\ y = y_0 + a_y t \\ z = z_0 + a_z t \end{cases} \tag{8.29}$$

От параметрических уравнений легко перейти к каноническим уравнениям прямой. Для этого исключим параметр t из уравнений (8.29):

$$\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}. \tag{8.30}$$

Определение 12. Уравнения (8.30) называются *каноническими* уравнениями прямой.

Рассмотрим две пересекающиеся плоскости:

$$\overline{n_1}\cdot\overline{r}+D_1=0;\ \overline{n_2}\cdot\overline{r}+D_2=0, \tag{8.31}$$

причем $\overline{n_1}\not\parallel\overline{n_2}$. Две пересекающиеся плоскости определяют в пространстве некоторую прямую – линию пересечения этих плоскостей.

Определение 13. Уравнения (8.31) называются *общими* уравнениями прямой в векторной форме.

В координатах общие уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{8.32}$$

Например, ось *Ox* есть прямая пересечения плоскостей *xOy* и *xOz*, поэтому имеет следующие общие уравнения: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Чтобы привести общие уравнения прямой к каноническому виду $\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}$, нужно найти точку, принадлежащую этой прямой и вектор, коллинеарный данной прямой. Найдем точку как решение системы (8.32). Вектор $\overline{a}$, коллинеарный l, найдем как векторное произведение $\overline{n_1}\times\overline{n_2}$:

$$\bar{a} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Уравнения прямой l запишутся в виде

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Пример 4. Привести к каноническому виду уравнение прямой

$$\begin{cases} 4x - y + 3z + 5 = 0 \\ 2x + 3y + 7z - 1 = 0 \end{cases}.$$

▷ Найдем точку, расположенную на прямой. Положим $z = 0$, получим

$$\begin{cases} 4x - y + 5 = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow[S_2 \cdot (-2) + S_1]{} -7y + 7 = 0 \to y = 1, x = -1.$$

Итак, точка $A(-1, 1, 0)$ лежит на прямой.

$$\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -16\bar{i} - 22\bar{j} + 14\bar{k}.$$

$\dfrac{x+1}{-16} = \dfrac{y-1}{-22} = \dfrac{z}{14}$ – канонические уравнения прямой. ◁

Пусть даны две скрещивающиеся прямые, т. е. не имеющие общих точек:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{a_{x_1}} = \frac{y - y_1}{a_{y_1}} = \frac{z - z_1}{a_{z_1}};$$

$$l_2 : \frac{x - x_2}{a_{x_2}} = \frac{y - y_2}{a_{y_2}} = \frac{z - z_2}{a_{z_2}}.$$

Вычислим расстояние между ними. Кратчайшим расстоянием d между двумя скрещивающимися прямыми является длина их общего перпендикуляра, равная расстоянию от любой точки прямой l_1 до плоскости, проходящей через прямую l_2 параллельно l_1.

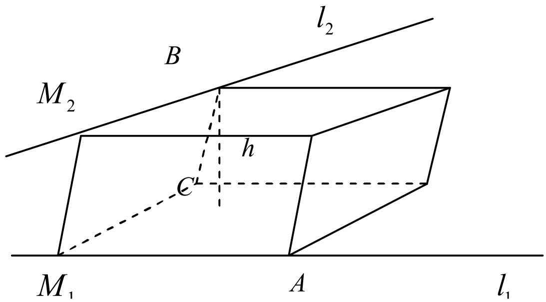


Рис. 8.9. Расстояние между прямыми l_1 и l_2 можно найти как длину перпендикуляра h

Расстояние d равно высоте h параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{M_1A} = \bar{a}_1, \overline{M_2B} = \bar{a}_2, \overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$, основанием которого служит параллелограмм, построенный на отрезках M_1A и M_1C. Итак, $d = h = \dfrac{V}{S} = \dfrac{\left|\left(\bar{r}_2 - \bar{r}_1\right)\bar{a}_1\bar{a}_2\right|}{\left|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2\right|}$ или в координатах

$$d = \frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_{x_1} & a_{y_1} & a_{z_1} \\ a_{x_2} & a_{y_2} & a_{z_2} \end{vmatrix}}{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_{x_1} & a_{y_1} & a_{z_1} \\ a_{x_2} & a_{y_2} & a_{z_2} \end{vmatrix}} \tag{8.33}$$

Если прямые параллельны, то расстояние между ними можно найти, как расстояние от точки, лежащей на одной прямой, до другой прямой. Итак, h – высота параллелограмма, построенного на $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1A}$.

$$d = \frac{\left|\left(\bar{r}_2 - \bar{r}_1\right) \times \bar{a}_2\right|}{\left|\bar{a}_2\right|}.$$

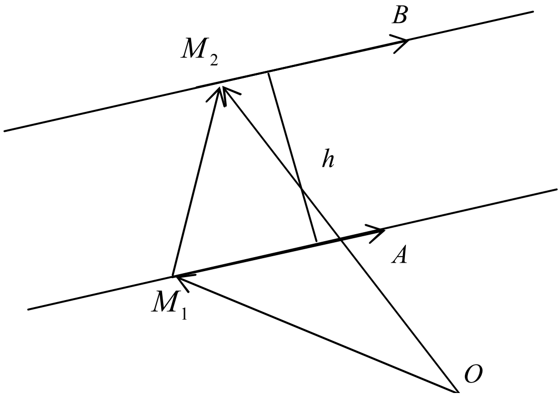


Рис. 8.10. Длина перпендикуляра h – это расстояние между параллельными прямыми

Перейдем к координатам

$$d=\frac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ a_{x_1} & a_{y_1} & a_{z_1}\end{vmatrix}}{\sqrt{a_{x_1}^2+a_{y_1}^2+a_{z_1}^2}} \tag{8.34}$$

Углом φ между прямыми l_1 и l_2 называется наименьший из ориентированных углов между направляющими векторами этих прямых.

Если l_1 и l_2 параллельны, то $\bar{a}_1=\lambda\bar{a}_2$ или

$$\begin{cases} a_{x_1}=\lambda a_{x_2}\\ a_{y_1}=\lambda a_{y_2}\\ a_{z_1}=\lambda a_{z_2}\end{cases} \tag{8.35}$$

Если l_1 и l_2 ортогональны, то $\bar{a}_1\cdot\bar{a}_2=0$ или

$$a_{x_1}a_{x_2}+a_{y_1}a_{y_2}+a_{z_1}a_{z_2}=0. \tag{8.36}$$

Лекция № 9. Кривые на плоскости

9.1 Алгебраические кривые

Определение 1. *Уравнением линии (кривой)* на плоскости в заданной системе координат называется уравнение с двумя переменными $F(x, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты точек, лежащих на этой линии, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на ней.

Для составления уравнения линии нужно взять точку на линии и, исходя из свойств линии, составить уравнение, связывающее координаты точек на линии.

Пример 1. Составить уравнение окружности радиуса r с центром в начале координат.

▷ Возьмем точку M на окружности. Расстояние $|OM|$ равно r, значит $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ или $x^2 + y^2 = r^2$. Этому уравнению удовлетворяют все точки, лежащие на окружности. Если точка M лежит внутри окружности, то $|OM| < r$, если снаружи, то $|OM| > r$. ◁

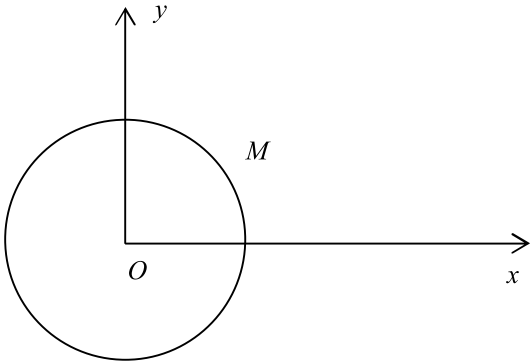


Рис. 9.1. Точка M лежит на окружности радиуса r с центром в начале координат

Специфика метода аналитической геометрии состоит в том, что изучение свойств линий сводится к изучению свойств уравнений этих линий.

Отметим, что множество точек, удовлетворяющих заданному уравнению $F(x, y) = 0$, может не образовывать линии в обычном понимании этого слова.

Определение 2. Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, называется *фигурой*.

Всякая линия является фигурой, но не каждая фигура соответствует нашему представлению о линии.

Определение 3. Линия называется *алгебраической*, если в некоторой декартовой системе координат ее уравнение является алгебраическим, т. е. имеет вид

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x^{m_i} y^{n_i} = 0, \qquad (9.1)$$

где a_i – вещественные числа; m_i, n_i – целые неотрицательные числа.

Определение 4. Пусть $a_j \neq 0$ и $m_j + n_j = s$ – наибольшее из чисел $m_i + n_i \left(i = \overline{1,k}\right)$. Тогда s называется *порядком* алгебраической кривой.

Например, линия, заданная в декартовой системе координат уравнением $x^3 + 3y^3 - 3xy = 0$, является алгебраической линией третьего порядка.

Теорема 9.1. [7]. *Если линия на плоскости в некоторой декартовой прямоугольной системе координат задается алгебраическим уравнением порядка s, то ее уравнение в любой другой декартовой прямоугольной системе координат является алгебраическим того же порядка.*

Кривая второго порядка имеет уравнение

$$a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 = 0 \qquad (9.2)$$

в декартовой прямоугольной системе координат. Уравнению (9.2) соответствует одна из следующих линий:

1) Парабола;
2) Эллипс;
3) Гипербола;
4) Пара параллельных прямых;
5) Пара пересекающихся прямых.

Ниже мы изучим свойства перечисленных кривых второго порядка.

9.2 Парабола

Определение 5. *Параболой* называется множество точек плоскости, каждая из которых равноудалена от принадлежащих этой плоскости данных прямой и точки, не лежащей на этой прямой. Данная точка называется *фокусом*, а данная прямая – *директрисой*. Расстояние от точки до директрисы обозначим через $p\left(p>0\right)$.

Составим уравнение параболы. Для этого выберем систему координат, как на рисунке 9.2, т. е. ось *Ox* перпендикулярна директрисе DD_1 и проходит через фокус. Начало координат выберем в середине отрезка *DF*. Тогда уравнение директрисы имеет вид:

$$x+\frac{p}{2}=0,$$

фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2},0\right)$.

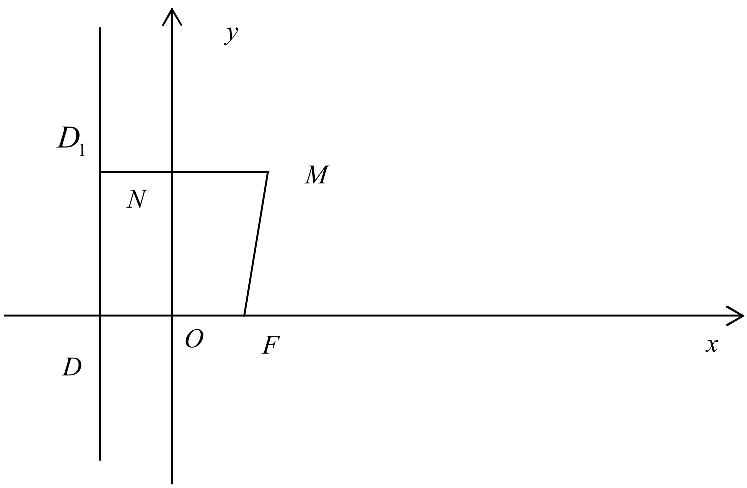


Рис. 9.2. Точка M лежит на параболе на расстоянии p от директрисы DD_1

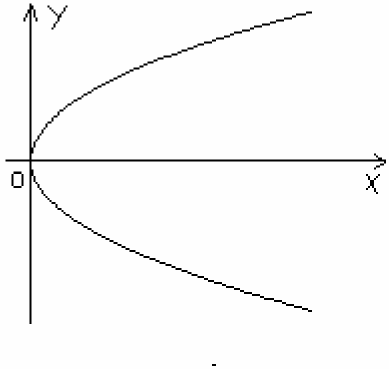


Рис. 9.3. Равнобочная парабола $y^2 = x$

Пусть $M\left(x, y\right)$ – произвольная точка на параболе. Расстояния от M до директрисы и фокуса находятся следующим образом: $\left|MN\right| = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$, $\left|MF\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$. Для точек параболы $\left|MF\right| = \left|MN\right|$, т. е.

$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

или, после возведения в квадрат и раскрытия скобок, получим

$$y^2 = 2px . \qquad (9.3)$$

Определение 6. Уравнение (9.3) называется *каноническим* уравнением параболы, а входящее в него *p – параметром* параболы.

Когда $p = \frac{1}{2}$, получаем уравнение $y^2 = x$. Это парабола, ветви которой направлены вправо.

9.3 Эллипс

Определение 7. *Эллипсом* называется такое множество точек плоскости, что сумма расстояний от любой точки этого множества до двух данных точек плоскости есть величина постоянная, большая расстояния между данными точками. Данные точки называют *фокусами.*

Обозначим фокусы через F_1 и F_2, расстояние между ними через $2c$, а сумму расстояний от любой точки эллипса до его фокусов – через $2a$. Из определения эллипса следует, что $a > c$.

Выберем декартову прямоугольную систему так, чтобы ось Ox прошла через фокусы, а ось Oy через середину отрезка F_1F_2.

Пусть $M(x, y)$ – точка на эллипсе. Тогда $|MF_1| + |MF_2| = 2a$.

Так как $|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, то уравнение примет вид

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (9.4)$$

Запишем уравнение (9.4) в виде

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Возведем обе части в квадрат, получим

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

или, приведя подобные,

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Еще раз возведем в квадрат, получим

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

или, приведя подобные и группируя члены,

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right). \qquad (9.5)$$

Так как $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$. Введем обозначение $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Уравнение (9.5) можно записать в виде

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделив обе части на $a^2b^2\ (a \neq 0, b \neq 0)$, получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (9.6)$$

Это уравнение эквивалентно уравнению (9.4), что можно доказать. Это не очевидно, т. к. мы два раза возводили в квадрат.

Определение 8. Уравнение (9.6) называется *каноническим* уравнением эллипса, *a – большей полуосью*, *b – меньшей.*

Построим часть эллипса, расположенную в первой четверти. Так как $y \geq 0$ в первой четверти, то $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Ось Oy эллипс пересекает в точке $B_1(0, b)$, ось Ox в точке $A_1(a, 0)$. Часть эллипса изображена на рисунке 9.4. Можно доказать, находя вторую производную, что выпуклость направлена вверх. Пользуясь симметрией эллипса относительно осей Ox и Oy, продолжим эллипс в остальные четверти.

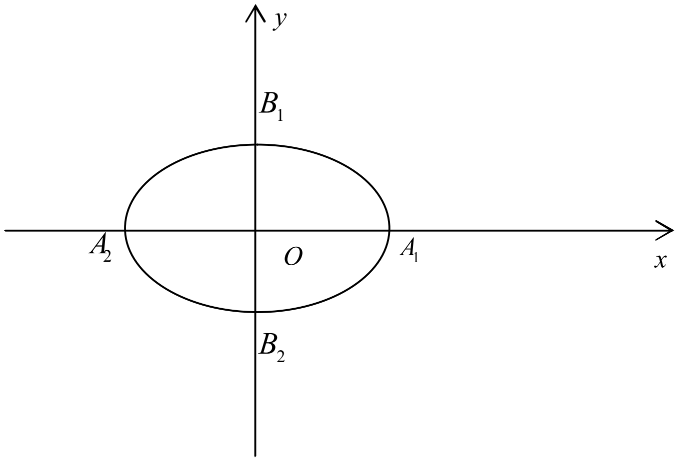


Рис. 9.4. На рисунке изображена часть эллипса в первой четверти

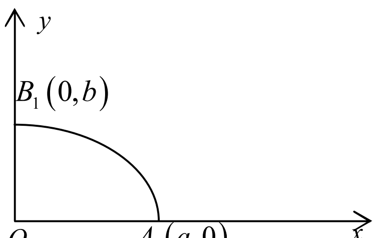


Рис. 9.5. В остальные четверти продолжаем эллипс, пользуясь его симметрией относительно осей координат

Определение 9. Точки $A_1(a,0), A_2(-a,0), B_1(0,b), B_2(0,-b)$, т. е. точки пересечения эллипса с осями симметрии, называются *вершинами* эллипса.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $a<b$, также является уравнением эллипса, только фокусы его расположены на оси Oy.

Если $a=b$, то каноническое уравнение эллипса примет вид $x^2+y^2=a^2$. Этому уравнению соответствует окружность радиуса a с центром в начале координат.

Определение 10. Отношение c к большей полуоси (a в уравнении (9.6)), называется *эксцентриситетом* и обозначается $\varepsilon=\frac{c}{a}$.

При изучении эллипса особую роль играют две прямые, перпендикулярные к большой его оси и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него.

Определение 11. Эти прямые называются *директрисами* эллипса.

Уравнение директрис в выбранной системе координат имеет вид: $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ и $x=\frac{a}{\varepsilon}$.

Имеет место следующая

Теорема 9.2. [6]. *Отношение расстояния от любой точки эллипса до фокуса к расстоянию ее до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса:* $\frac{r}{d}=\varepsilon$.

9.4 Гипербола

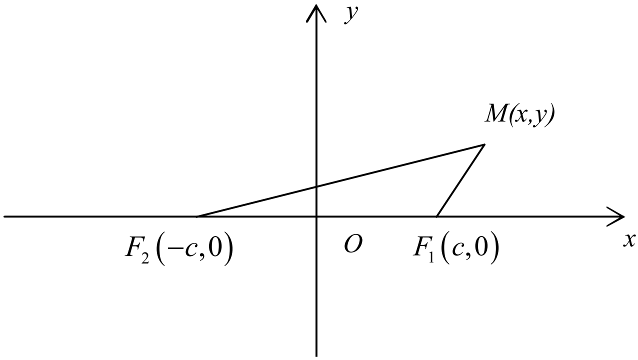


Рис. 9.6. Точка M лежит
на гиперболе с фокусами F_1 и F_2

Определение 12. *Гиперболой* называется такое множество точек на плоскости, что модуль разности расстояний от любой точки этого множества до двух данных точек плоскости есть величина постоянная, меньшая расстояния между данными точками и отличная от нуля. Данные точки называются *фокусами*.

Расстояние между ними обозначим через $2c$, а модуль разности расстояний от любой точки гиперболы до фокусов – через $2a$. Согласно определению гиперболы $0 < a < c$.

Выберем систему координат так, как при выводе уравнения эллипса. Для точки $M(x, y)$, лежащей на гиперболе, $\left||MF_2| - |MF_1|\right| = 2a$ или $|MF_2| - |MF_1| = \pm 2a.$ Так как $|MF_2| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $|MF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, то для точек гиперболы будем иметь $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$. Далее избавляемся от иррациональности, как в случае с эллипсом; получим $\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$.

Поскольку $a < c$, то $c^2 - a^2 > 0$, ведем обозначение $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Тогда уравнение гиперболы примет вид: $-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$ или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (9.7)$$

Определение 13. Уравнение (9.7) называется *каноническим* уравнением гиперболы.

Для построения гиперболы в первой четверти, выразим y через x (в 1 четверти $y \geq 0$).

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\cdot$$

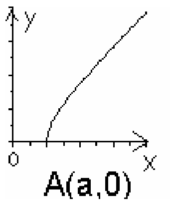


Рис. 9.7. Часть гиперболы в первой четверти

Точка $A_1(a,0)$ лежит на гиперболе. При возрастании x, y также возрастает. Пользуясь дифференциальным исчислением, можно доказать, что выпуклость направлена вверх.

Используя симметрию, строим гиперболу в остальных четвертях. Поскольку при замене в уравнении (9.7) x на $-x$, оно не изменятся, то гипербола симметрична относительно оси Oy. По такой же причине она симметрична относительно оси Ox.

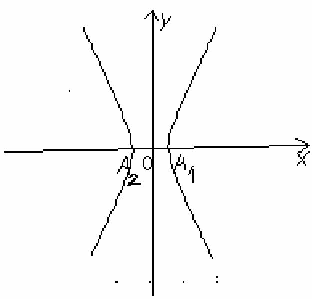


Рис. 9.8. Пользуясь симметрией гиперболы относительно осей координат, строим ее в остальных четвертях

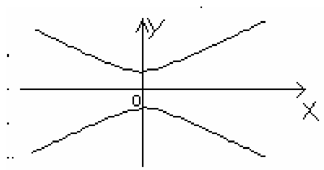


Рис. 9.9. У этой гиперболы фокусы расположены на оси Оу

Определение 14. Точка пересечения осей симметрии гиперболы называется ее *центром*. Точки $A_1(a,0)$ и $A_2(-a,0)$ – точки пересечения оси симметрии Ox с гиперболой, называются *вершинами* гиперболы. Число a называется *действительной полуосью*, b – *мнимой*.

Уравнению

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \qquad (9.8)$$

соответствует гипербола, фокусы которой расположены на оси Oy. Гипербола состоит из двух отдельных кривых, называемых ее *ветвями*.

Определение 15. *Асимптотой* кривой называется прямая, обладающая следующим свойством: расстояние от точки кривой до этой прямой стремится к нулю, когда точка удаляется от начала координат на бесконечность, двигаясь по этой кривой.

У гиперболы, заданной уравнением (9.7), есть две асимптоты:

$$y=\pm\frac{b}{a}x\,. \qquad (9.9)$$

У гиперболы (9.8) асимптотами являются эти же две прямые.

Определение 16. *Эксцентриситетом* гиперболы называется отношение полуфокусного расстояния c к действительной полуоси, т. е. $\varepsilon=\frac{c}{a}$. Так же, как и для эллипса, вводятся две прямые, перпендикулярные к действительной оси. Они называются *директрисами*. Уравнения директрис имеют следующий вид: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$.

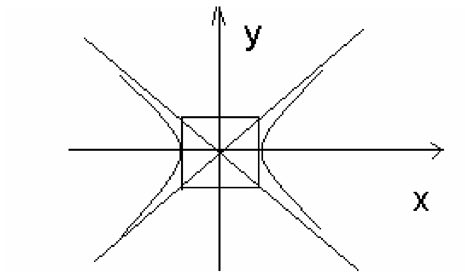


Рис. 9.10. Гипербола и ее асимптоты

Так же, как и для эллипса, для гиперболы имеют место следующие равенства $\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon$, где r_1 и r_2 – расстояние от точки гиперболы до соответствующих фокусов, d_1 и d_2 – расстояния от этой точки гиперболы до директрис.

Если $a=b$, то гипербола называется равнобочной; уравнение ее $x^2-y^2=a^2$. Уравнения асимптот для нее имеют вид $y=\pm x$. Например, гипербола $y=\frac{1}{x}$, изучаемая в школе, будет равнобочной гиперболой.

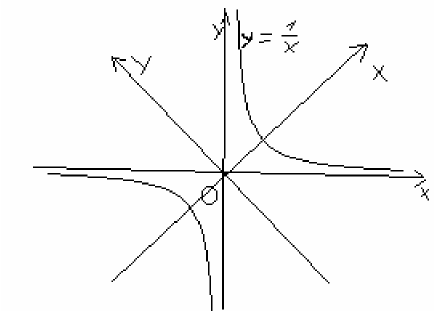


Рис. 9.1.Равнобочная гипербола $y=\frac{1}{x}$

Если перейти к новым координатам по формуле $y=-Y+X$, $x=Y+X$, получим ее каноническое уравнение $X^2-Y^2=1$.

Лекция № 10.
Алгебраические поверхности второго порядка в пространстве

10.1 Поверхности и линии в пространстве

Определение 1. *Уравнением поверхности* в заданной системе координат *Oxyz* называется уравнение с тремя переменными $F(x, y, z) = 0$, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на этой поверхности, sи не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на ней.

Пример 1. Составить уравнение координатной плоскости *Oxy*.

▷ Уравнению $z = 0$ удовлетворяют точки на плоскости *Oxy* и не удовлетворяют другие точки. Значит, $z = 0$ – искомое уравнение. ◁

Пусть заданы две поверхности уравнениями $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$. Тогда линия L их пересечения задается системой $\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$.

Пример 2. Составить уравнение окружности, лежащей в плоскости Oxy, центром в точке *O* и радиусом a.

▷ Окружность можно рассматривать, как кривую пересечения плоскости *Oxy* и сферы радиуса a. Уравнение сферы радиуса a с центром в точке O легко вывести, и оно имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Значит, уравнение окружности имеет вид: $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$. ◁

Определение 2. Поверхность называется *алгебраической*, если в некоторой декартовой прямоугольной системе координат *Oxyz* ее уравнение имеет вид

$$\sum_{i=1}^{k} A_i x^{m_i} y^{n_i} z^{p_i} = 0, \qquad (10.1)$$

где A_i – вещественные числа, m_i, n_i, p_i – целые неотрицательные числа.

Определение 3. Пусть $A_j \neq 0$ и $m_j + n_j + p_j = s$ – наибольшее из чисел $m_i, n_i, p_i \left(i = \overline{1,k}\right)$. Тогда s называется порядком алгебраической поверхности (10.1).

10.2 Поверхности второго порядка

Определение 4. Поверхностью второго порядка называется поверхность, уравнение которой в прямоугольной системе координат будет уравнением второй степени относительно текущих координат.

Общее уравнение второй степени с тремя переменными записывается так:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + \\ +2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (10.2)$$

Перемещением начала координат, поворотом системы координат и заменой координат уравнение (10.2) можно привести к одному из следующих типов:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{(Конус второго порядка)} \qquad (10.3)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{(Эллипсоид)} \qquad (10.4)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{(Однополостный гиперболоид)} \qquad (10.5)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{(Двуполостный гиперболоид)} \qquad (10.6)$$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad \text{(Эллиптический параболоид)} \qquad (10.7)$$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad \text{(Гиперболический параболоид)} \qquad (10.8)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(Эллиптический цилиндр)} \qquad (10.9)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \quad \text{(Гиперболический цилиндр)} \qquad (10.10)$$

$$y^2 = 2px \quad \text{(Параболический цилиндр)} \qquad (10.11)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{(Пара пересекающихся плоскостей)} \qquad (10.12)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \text{ (Одна точка } O\text{)} \tag{10.13}$$

Рассмотрим подробнее поверхности второго порядка.

10.3 Конус второго порядка

Конус второго порядка определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\cdot$$

Так как в уравнение переменные x, y, z входят только во второй степени, то поверхность симметрична относительно всех трех координатных плоскостей и координатных осей. Начало координат является центром симметрии и называется вершиной конуса.

Сечениями конуса плоскостями yOz и xOz является пара пересекающихся прямых

$$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\\ x=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\\ y=0\end{cases}$$

Плоскость xOy имеет с конусом только одну общую точку – начало координат O.

Плоскость $z=h$ пересекает конус второго порядка по эллипсу

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}=0\\ z=h\end{cases}$$

Следует отметить, что при сечении поверхности второго порядка плоскостью получается кривая второго порядка на этой плоскости. При сечении конуса плоскостями можно получить эллипс, гиперболу и параболу. Поэтому кривые второго порядка также называются коническими сечениями.

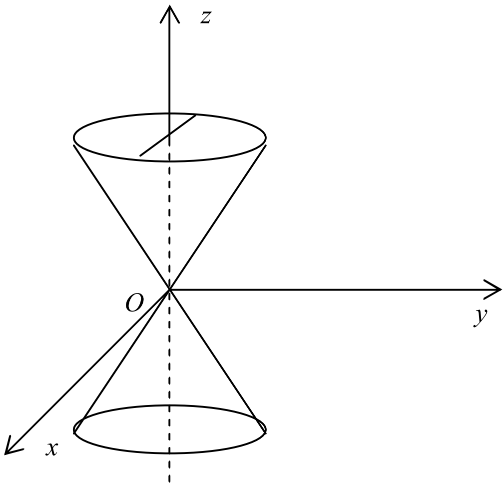


Рис. 10.1. Конус второго порядка

10.4 Эллипсоид

Уравнение эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Если точка $M(x,y,z)$ лежит на эллипсоиде, то и точки

$M_1(-x,y,z), M_2(x,-y,z), M_3(x,y,-z), M_4(-x,-y,z), M_5(-x,y,-z),$

$M_6(x,-y,-z),$ $M_7(-x,-y,-z)$ лежат на эллипсоиде.

Значит, эллипсоид симметричен относительно всех координатных плоскостей, осей и начала координат. Начало координат является центром симметрии, оси координат – осями симметрии, координатные плоскости – плоскостями симметрии эллипсоида.

Определение 5. Точки пересечения осей симметрии с эллипсоидом называются *вершинами* эллипсоида.

Плоскость *zOy* пересекает эллипсоид по линии

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$$

Плоскость xOz – по линии

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}.$$

Плоскость xOy по линии

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}.$$

В сечениях эллипсоида координатными плоскостями получили эллипсы.

Также, $|x|\le a, |y|\le b, |z|\le c$, т. е. эллипсоид –ограниченная поверхность.

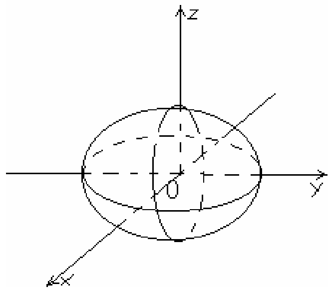


Рис. 10.2. Эллипсоид

10.5 Однополостный гиперболоид

Однополостный гиперболоид задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\cdot$$

В его уравнение x,y,z входят только во второй степени, значит однополостный гиперболоид симметричен относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат. Плоскость yOz пересекает однополостный гиперболоид по гиперболе

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Плоскость xOy – по эллипсу

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

а плоскость xOz – по гиперболе

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

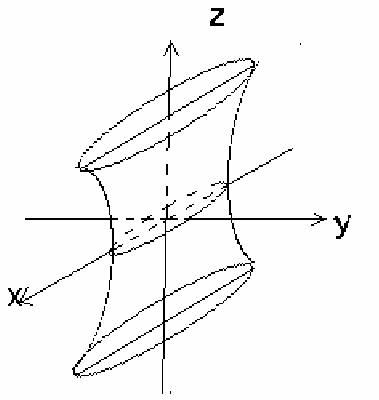


Рис. 10.3. Однополостный гиперболоид

10.6 Двуполостный гиперболоид

Уравнение двуполостного гиперболоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \cdot$$

Он также симметричен относительно осей координат, координатных плоскостей и начала координат.

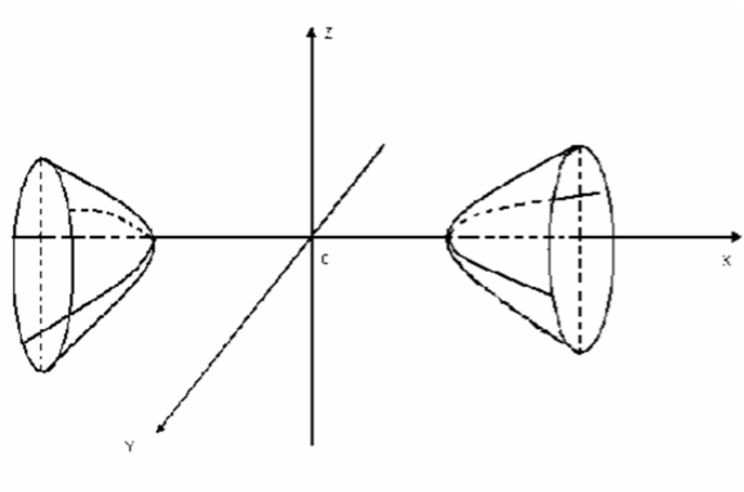
Плоскость xOy пересекает его по гиперболе

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Плоскость xOz – по гиперболе

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

плоскость $x = h$ при $|h| < a$ не пересекает поверхность, при $|h| = a$ касается в одной точке – вершине двуполостного гиперболоида, а при $|h| > a$ по эллипсу $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{h^2}{a^2} - 1$.



10.4. Двуполостный гиперболоид

10.7 Эллиптический параболоид

Уравнение эллиптического параболоида

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$

В пересечении его плоскостью $x=0$ получаем параболу $\begin{cases}2yz=y^2\\x=0\end{cases}.$

В пересечении с плоскостью $y=0$ получаем при $h>0$ эллипс $\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1$. При $h<0$ пересечение пусто, а при $h=0$ плоскость xOy касается эллиптического параболоида.

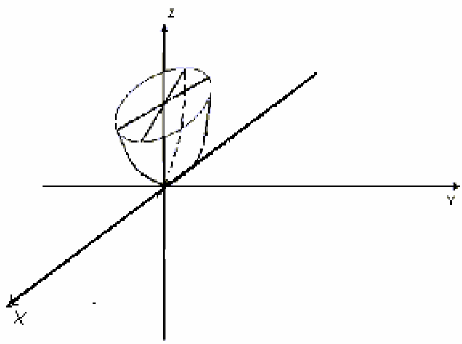


Рис. 10.5. Эллиптический параболоид

10.8 Гиперболический параболоид

Уравнение гиперболического параболоида имеет вид:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

Он симметричен относительно плоскостей *yOz* и *xOz* как и эллиптический параболоид.

Плоскость $x = 0$ пересекает его по параболе

$$\begin{cases} y^2 = -2qz \\ x = 0 \end{cases}$$

плоскость $y = 0$ – по параболе

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$$

плоскость $z = h > 0$ по гиперболе

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ph} - \dfrac{y^2}{2qh} = 1 \\ z = h \end{cases}$$

плоскость $z = 0$ по паре прямых

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

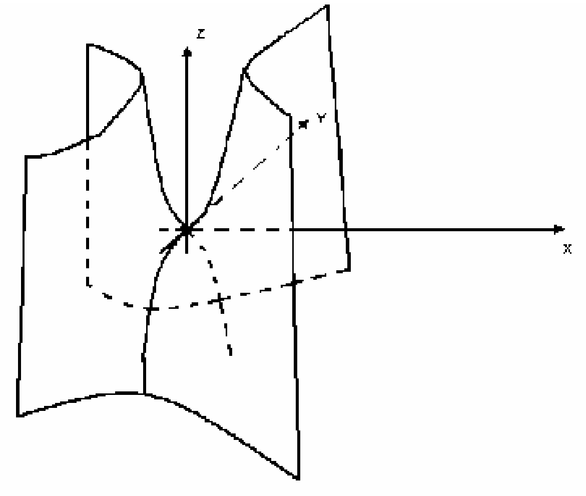


Рис. 10.6. Гиперболический параболоид

10.9 Цилиндрические поверхности

Определение 6. *Цилиндрическая* поверхность образуется при поступательном движении прямой, называемой *образующей*, проходящей через все точки некоторой кривой, называемой *направляющей*.

Существует три типа цилиндров второго порядка:

Эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ изображен на рисунке 10.7.

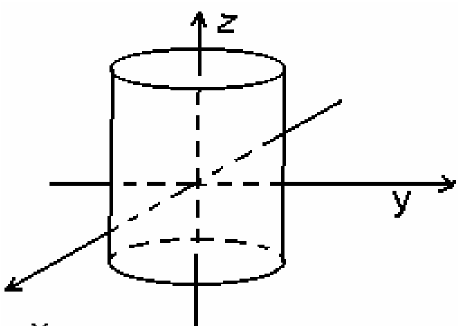


Рис. 10. 7. Эллиптический цилиндр

Гиперболический цилиндр имеет уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Параболический цилиндр $y^2 = 2px$ изображен на рисунке 10.9.

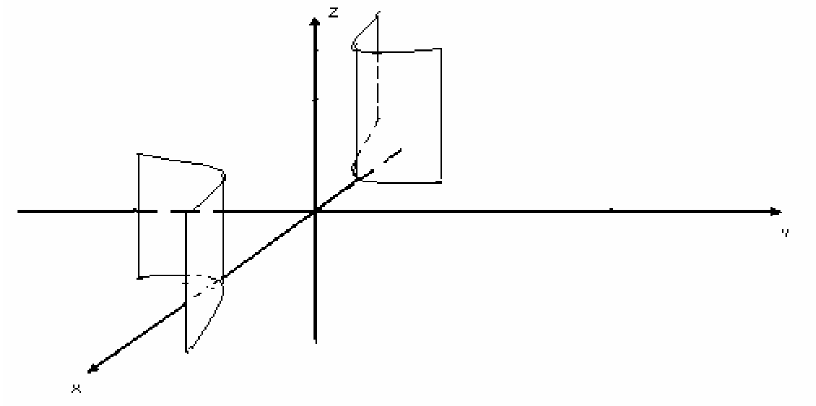


Рис. 10.8. Гиперболический цилиндр

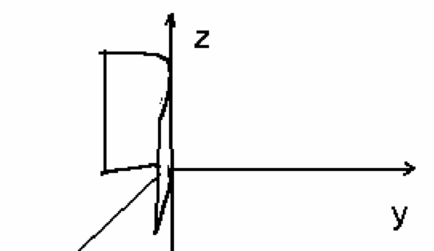


Рис. 10.9. Параболический цилиндр

Это уравнение задает на плоскости параболу. В пространстве получается поверхность, описываемая прямой, параллельной оси *Oz* и проходящей через параболу на плоскости *xOy*.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА В МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Лекция № 11. Квадратичные формы

Кривая второго порядка задается уравнением второго порядка

$$F(x,y) = 0, \tag{11.1}$$

где $F(x,y)$ – многочлен второй степени. Если (11.1) является уравнением центральной кривой (гиперболы или эллипса), то, поместив начало координат в центр кривой, ее уравнение примет вид:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = h \tag{11.2}$$

В левой части уравнения (11.2) стоит однородный многочлен степени два, т. е. каждое слагаемое имеет степень два. Такой многочлен называется *квадратичной формой* от переменных x и y.

При помощи поворота системы координат на некоторый угол можно уравнение (11.2) привести к виду:

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 = h \tag{11.3}$$

относительно новых переменных x' и y'.

Такую задачу приведения квадратичной формы к наиболее простому виду мы будем рассматривать в этом параграфе.

Определение 1. Квадратичной формой называется однородный многочлен $f = f(x_1, x_2, ... x_n)$ второй степени от n переменных.

Например, квадратичными формами являются $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$,

$$\sum_{1<i<j<r} x_i x_j,$$

$$x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 3xy + 4xz.$$

Укажем для квадратичных форм одну специальную форму записи. Считая, что в форме $f = f(x_1, x_2, ... x_n)$ же выполнено приведение подобных членов, обозначим коэффициент при x_i^2 через a_{ii}, коэффициент при $x_i x_j$ – через $2a_{ij} = a_{ij} + a_{ji} = 2a_{ji}$ так, что $a_{ij} = a_{ji}$.

Для члена, содержащего $x_i x_j$, мы получаем тогда симметричную запись:

$$2a_{ij}x_i x_j = a_{ij}x_i x_j + a_{ji}x_j x_i.$$

Вся квадратичная форма *f* может быть записана теперь в виде

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{matrix} a_{11}x_1^2 + & a_{12}x_1x_2 + & ...+ & a_{1n}x_1x_n + \\ +a_{21}x_2 + & a_{22}x_2^2 + & ...+ & a_{2n}x_2x_n + \\ .... & ... & ... & ... \\ a_{n1}x_nx_1 + & a_{n2}x_nx_2 + & ...+ & a_{nn}x_n^2 \end{matrix} \qquad (11.4)$$

Определение 2. Составленная из коэффициентов матрица

A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$ называется *матрицей квадратичной формы* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Так как $a_{ij} = a_{ji}$, то матрица *A* – симметричная.

Пример 1. Для квадратичной формы

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3$$

запись (11.4) имеет вид

$$\begin{aligned} f = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + \\ + 2x_2x_1 + 0 \cdot x_2^2 + \frac{1}{2}x_2x_3 + \\ + x_3x_1 + \frac{1}{2}x_3x_2 + 0 \cdot x_3^2 \end{aligned}$$

Матрица ее равна $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

Для квадратичной формы может быть дана компактная запись в виде произведения трех матриц:

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = x_1\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n\right) +$$
$$+ x_2\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n\right) +$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ x_n\left(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n\right) =$$
$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Таким образом,

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX\ , \qquad (11.5)$$

где X – столбец из переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ а X^T – строчка из тех же переменных (транспонированный столбец).

Обратно, если A – произвольная симметричная матрица порядка n и X – столбец из переменных высоты n, то произведение $X^T AX$ является квадратичной формой и матрица этой формы равна A.

Пусть задано преобразование переменных в матричной форме

$$X = CY\ , \qquad (11.6)$$

где X и Y – столбцы из старых и новых переменных соответственно, а C – квадратная матрица преобразования.

Если $\det C \neq 0$, то существует обратное преобразование

$$Y = C^{-1}X\ , \qquad (11.7)$$

выражающее новые переменные через старые. Подставив выражения для ($x_1, x_2, ..., x_n$) в форму $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, получим

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} c_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} c_{2j}y_j, ..., \sum_{j=1}^{n} c_{nj}y_j\right) = g\left(y_1, y_2, ..., y_n\right).$$

Подвергнем форму (11.2) преобразованию (11.3). Так как $X^T = (CY)^T = Y^T C^T$, то получим $f = X^T AX = Y^T C^T ACY$.

Квадратная матрица $B = C^T AC$ симметрична, т. к.

$$(C^T AC)^T = C^T A^T C^{TT} = C^T AC,$$

и она является матрицей квадратичной формы $y = Y^T BY$. Нами доказана следующая

Теорема 11.1. *Если в квадратичной форме с матрицей А сделано линейное преобразование переменных с матрицей С, то полученная квадратичная форма будет иметь матрицу* $C^T AC$.

Определение 3. Квадратичная форма вида

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2,$$

не содержащая членов с произведениями различных переменных и имеющая поэтому диагональную матрицу, называется *канонической* квадратичной формой.

Нашей целью является доказательство того, что любая квадратичная форма при помощи неособенного линейного преобразования может быть приведена к диагональному виду.

Лемма 1. *Если у квадратичной формы (11.5) имеется хотя бы один ненулевой коэффициент, то надлежащим неособенным линейным преобразованием переменных X = CY она может быть преобразована в форму, у которой коэффициент при* y_1^2 *отличен от нуля.*

1. Если $a_{11} \neq 0$, то можно взять тождественное преобразование $x_i = y_i$.

2. Предположим, что $a_{11} = 0$, но $a_{ii} \neq 0$ для некоторого $i \geq 2$.

Тогда можно взять преобразование $x_1 = y_i, x_i = y_1, x_k = y_k$ при $k \neq 1, k \neq i,$ которое переставит 1-ю и i-ю переменные.

$f = a_{ii} y_1^2 + \ldots$. Член $a_{ii} y_1^2$ не имеет при себе подобных и сократиться не может.

3. Допустим, что все коэффициенты при квадратах переменных равны нулю: $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 0$

Но хотя бы один элемент отличен от нуля. Выберем такой элемент $a_{ij} \neq 0 \;\; (i \neq j)$

Сделаем преобразование

$$x_j = y_j + y_i; x_k = y_k \text{ при } k \neq j.$$

Тогда мы сведем этот случай к случаю (2), поскольку коэффициент при y_i^2 равен

$2a_{ij} : f = \ldots + 2a_{ij} x_i x_j + \ldots = \ldots + 2a_{ij} y_i (y_j + y_i) + \ldots = \ldots + 2a_{ij} y_i y_j + 2a_{ij} y_i^2 + \ldots;$

Теорема 11.2. (Теорема Лагранжа). *Всякая квадратичная форма при помощи неособенного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду.*

$\triangleright$ В силу леммы 1 мы можем считать, что коэффициент при x_1^2 не равен нулю.

Выделим ту группу слагаемых в квадратичной форме, которые содержат x_1.

$$f(x_1,\ldots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{1n}x_1x_n+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}x_iy_j\,.$$

Преобразуем выделенную группу слагаемых следующим образом:

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{1n}x_1x_n=a_{11}(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_1)^2-\frac{a_{12}^2x_2^2}{a_{11}}-\ldots-\frac{a_{1n}^2x_n^2}{a_{11}}-\frac{2a_{12}a_{13}}{a_{11}}x_1x_3-\ldots$$
$$-\frac{2a_{1n-1}a_{1n}}{a_{11}}x_{n-1}x_n$$

Тогда $f(x_1,\ldots\ {}_n)$ можно переписать так

$$f(x_1,\ldots,x_n)=a_{11}(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n)^2+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}^*x_ix_j\ ,\quad(11.7)$$

где a_{ij}^* – коэффициенты при x_ix_j, полученные после преобразования. Рассмотрим следующее неособенное преобразование:

$$\begin{array}{llll}
y_1=x_1+\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\ldots+\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n & & & \\
y_2= & x_2 & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y_n= & & & x_n
\end{array}$$

Тогда $f_1(y_1,\ldots,y_n)=a_{11}y_1^2+\sum_{ij=2}^{n}a_{ij}^*y_iy_j$. Форму от переменных $y_2,\ldots,y_n$ мы можем преобразовать аналогичным способом, не изменяя y_1. Ясно, что за конечное число шагов мы приведем квадратичную форму $f(x_1,\ldots,x_n)$ к каноническому виду. Отметим, что нужное преобразование исходных переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ можно получить путем перемножения найденных в процессе рассуждений преобразований. Теорема доказана. $\triangleleft$

Пример 2. Привести методом Лагранжа к каноническому виду квадратичную форму

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3+x_3^2$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2-x_1(3x_2-4x_3)+\frac{1}{4}(3x_2-4x_3)^2)-\frac{1}{4}(3x_2-4x_3)^2+2x_2x_3+x_3^2=(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3)^2-$$

$$-\frac{9}{4}x_2^2+6x_2x_3-4x_3^2+2x_2x_3+x_3^2=(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3)^2-\frac{9}{4}x_2^2+8x_2x_3-3x_3^2=(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3)^2-$$

$$-\frac{9}{4}(x_2^2-\frac{32}{9}x_2x_3+\frac{256}{81}x_3^2)+\frac{64}{9}x_3^2-3x_3^2=(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3)^2-\frac{9}{4}(x_2-\frac{16}{9}x_3)^2+\frac{37}{9}x_3^2.$$

Неособое преобразование $y_1=x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3,\ y_2=x_2-\frac{16}{9}x_3,\ y_3=x_3$ приводит данную квадратичную форму к каноническому виду $f_1(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-\frac{9}{4}y_2^2+\frac{37}{9}y_3^2.$

Заметим, что для данной квадратичной формы канонический вид определяется не единственным образом.

Однако все канонические формы, к которым может быть приведена данная квадратичная форма, обладают рядом общих свойств, одно из которых называется *законом инерции* квадратичных форм: все канонические формы, к которым может быть приведена данная квадратичная форма, имеют:

1) одно и то же число нулевых коэффициентов;

2) одно и то же число положительных коэффициентов;

3) одно и то же число отрицательных коэффициентов.

Определение 4. Если в канонической форме квадратичной формы $f(x_1,...,x_n)$ все коэффициенты больше нуля, то она называется *положительно определенной;* если все коэффициенты меньше нуля, то она называется *отрицательно определенной.*

Пусть $f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum\limits_{ij=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ и пусть $\Delta_1=a_{11}$

$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},...,\Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11} & ... & a_{1n}\\ ... & ... & ...\\ a_{n1} & ... & a_{nn}\end{vmatrix}.$ – угловые миноры и определитель матрицы (a_{ij}). Справедливо следующее утверждение:

Теорема 11. 3. (критерий Сильвестра) [7]. Для того, чтобы квадратичная форма $f(x_1,...,x_n)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0.$. Для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, причем $\Delta_1 < 0$.

Определение 5. *Сигнатурой* квадратичной формы называется упорядоченная пара чисел *(p, q),* где *p* - число положительных коэффициентов в канонической форме, *q* - число отрицательных коэффициентов.

Определение 6. Число p называется положительным индексом инерции, q – отрицательным индексом инерции данной формы.

Замечание: иногда сигнатурой называют *разность p-q*.

Лекция № 12. Линейные пространства

12.1 Определение линейного пространства

Рассмотрим множество V элементов x, y, z ... и множество всех действительных чисел R. Пусть задан закон, по которому каждой паре x, y элементов множества V ставится в соответствие элемент этого же множества.

Определение 1. Элемент z называют *суммой* и пишут $z = x + y$.

Кроме того, пусть задана операция умножения на число, т.е. каждому элементу x и числу $\alpha \in R$ ставится в соответствие элемент αx.

Допустим, что для введенных операций выполняются следующие аксиомы:

1. $x + y = y + x \quad \forall x, y \in V \cdot$
2. $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z, \forall x, y, z \in V.$
3. В множестве V существует элемент (который называется *нулевым* и обозначается $\bar{0}$) такой, что $x + \bar{0} = x, \forall x \in V.$
4. Для каждого элемента $x \in V$ существует элемент (который обозначим $-x$ и назовем *противоположным* x) такой, что $x + (-x) = \bar{0}$.
5. Для любого $x \in V \quad 1 \cdot x = x$.

Для любых чисел $\alpha, \beta \in R$ и любых $x, y \in V$:

6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta x) \cdot$
7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$
8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$

Определение 2. Множество V с операцией сложения и умножения на число, удовлетворяющее указанным аксиомам, называется *вещественным линейным пространством.* Такое множество V также называют *векторным* пространством. Элементы из V называются *векторами.*

Из определения 2 линейного пространства следуют следующие утверждения:

1. В линейном пространстве существует единственный нулевой вектор.
2. В линейном пространстве для каждого вектора x существует единственный противоположный – x.
3. Для элемента – x противоположным будет x.

4. Произведение числа 0 на любой элемент x есть нулевой элемент.

5. Произведение $(-1)\cdot x$ равно элементу $-x$.

6. Произведение любого числа α на нулевой элемент есть нулевой элемент.

7. Если $\alpha x = \bar{0}$ и $\alpha \neq 0$, то $x = \bar{0}$.

8. Если $\alpha x = \bar{0}$ и $x \neq \bar{0}$, то $\alpha = 0$.

Пример 1. Пусть M_3 – множество свободных векторов. *Свободный вектор* – это класс равных между собой векторов, называемых его *представителями.* Для операций сложения и умножения на число берутся представители классов. Эти операции удовлетворяют аксиомам 1–8, следовательно, M_3 является вещественным линейным пространством.

Пример 2. Пусть R^n – множество, элементами которого являются все возможные упорядоченные наборы n вещественных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$. Определим сложение и умножение на число:

$$(x_1; x_2; ...; x_n) + (y_1; y_2; ...; y_n) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; ...; x_n + y_n);$$

$$\lambda(x_1; x_2; ...; x_n) = (\lambda x_1; \lambda x_2; ...; \lambda x_n)\ (\lambda \in R).$$

Аксиомы 1–8 выполняются. Значит, множество R^n с введенными операциями является линейным пространством.

Пример 3. Рассмотрим множество всех вещественных матриц размеров $m \times n$, которое обозначим $R_{m\times n}$.

Операции сложения и умножения на число были введены в лекции 4. Эти операции удовлетворяют аксиомам 1–8, значит, множество $R_{m\times n}$ с этими операциями является вещественным линейным пространством.

Определение 3. Множество V_1 элементов линейного пространства V называется *подпространством* пространства V, если выполняются следующие условия:

1. В множестве V_1 операции сложения и умножения на число определяются так же, как в пространстве V.

2. Если $x, y \in V_1$, то $x + y \in V_1$.

3. Если $x \in V_1$, то $\alpha x \in V_1, \alpha \in R$.

Легко убедиться в том, что всякое подпространство V_l в свою очередь является линейным пространством, т. е. для V_l выполняются аксиомы 1–8.

Пример 4. Если в M_3 из примера 1 рассмотреть множество M_2 векторов, параллельных некоторой плоскости, то M_2 будет подпространством M_3.

12.2 Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Рассмотрим векторы $x_1, x_2, ..., x_n \in V$.

Определение 4. Вектор $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$ также принадлежит V и называется *линейной комбинацией* векторов $x_1, x_2, ..., x_n$. Числа $\alpha_1, ..., \alpha_n$ называются *коэффициентами* этой комбинации.

Определение 5. Комбинация называется *тривиальной,* если все $\alpha_i = 0$; если есть ненулевые коэффициенты, то она называется *нетривиальной.*

Определение 6. Система векторов называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору. Если только тривиальная комбинация равна нулевому вектору, то система называется *линейно независимой.*

Система, состоящая из одного ненулевого вектора x, линейно независима т. к. $\alpha x = \bar{0}$ возможно лишь при $\alpha = 0$. Система, состоящая из нулевого вектора $\bar{0}$, линейно зависима, т. к. $\alpha \bar{0} = \bar{0}$ даже при $\alpha \neq 0$.

Пример 5. В линейном пространстве M_3 любые два коллинеарных вектора линейно зависимы. Пусть векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ коллинеарны. Из этого следует, что существует такое число λ, что $\bar{y} = \lambda \bar{x}$. Тогда $\overline{y} - \lambda \overline{x}$ – нетривиальная комбинация, равная нулевому вектору.

Для векторов линейного пространства справедливы следующие утверждения:

1. Если к системе n линейно зависимых векторов присоединить любые m векторов, то получим систему $n + m$ линейно зависимых векторов.

2. Если в системе, содержащей n линейно независимых векторов, убрать любые m векторов ($m < n$), то оставшиеся векторы образуют линейно независимую систему.

3. Если среди векторов $x_1, ..., x_n$ имеются x_k и $x_l \left(k \neq l\right)$ такие, что $x_k = \lambda x_l$, где λ – число, то векторы $x_1, ..., x_n$ линейно зависимы.

4. Если среди векторов $x_1, ..., x_n$ имеется нулевой, то эти векторы линейно зависимы.

Теорема 12.1. (Критерий линейной зависимости векторов). *Для того, чтобы векторы $x_1, ..., x_n \left(n > 1\right)$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих векторов являлся линейной комбинацией остальных.*

12.3 Размерность и базис линейного пространства. Изоморфизм

Определение 7. Пусть в линейном пространстве V выполняются следующие условия:

1) существует n линейно независимых векторов;

2) любая система $n + 1$ векторов линейно зависима.

Тогда число n называется *размерностью пространства V*. Если пространство состоит из одного элемента, то ее размерность положим равной 0.

Обозначается размерность $\dim V$ (от англ. dimension – размерность).

Определение 8. Пространство V размерности n будем называть *n-мерным* пространством.

Определение 9. *Базисом* n-мерного пространства называется любой упорядоченный набор из n линейно независимых векторов.

Теорема 12.2. [6]. *Если $e_1, e_2, ..., e_n$ – базис n-мерного пространства V, то любой вектор $\bar{x}$ этого пространства линейно выражается через векторы $e_1, e_2, ..., e_n$, т. е.*

$$\overline{x} = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n.$$

$\triangleright$ Пусть $\overline{x} \in V$. Тогда система $e_1, e_2, ..., e_n, \overline{x}$ из *n + 1* вектора линейно зависима, т. е. $\beta_1 \overline{e}_1 + \beta_2 \overline{e}_2 + ... + \beta_n \overline{e}_n + \beta_{n+1} \overline{x} = 0$.

Число $\beta_{n+1} \neq 0$, т. к. иначе получилась бы нетривиальная комбинация векторов $\overline{e}_1, ..., \overline{e}_n$, равная нулю. Выражаем вектор $\overline{x}$ из этого уравнения:

$\overline{x} = -\frac{\beta_1}{\beta_{n+1}} \overline{e}_1 - \frac{\beta_2}{\beta_{n+1}} \overline{e}_2 - ... - \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} \overline{e}_n$, что и требовалось доказать. $\triangleleft$

Теорема 12.3. [6]. *Если* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ *– система линейно независимых векторов пространства V и любой вектор* $\overline{x}$ *этого пространства линейно выражается через* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$, *то пространство V является n-мерным.*

Пример 6. В пространстве M_3 из примера 1 базис образуют три вектора $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Они линейно независимы, и каждый вектор линейно выражается через них. Следовательно, размерность пространства M_3 равна трем.

Пусть заданы два линейных пространства *V* и $V`$. Если между элементами этих пространств установлено взаимнооднозначное соответствие, причем $x \in V$ соответствует $x` \in V`$, то пишут $x \leftrightarrow x`$.

Определение 10. Два линейных вещественных пространства *V* и $V`$ называются *изоморфными,* если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие так, что если $x_1 \leftrightarrow x_1`$, $x_2 \leftrightarrow x_2`$, то $x_1 + x_2 \leftrightarrow x_1` + x_2`, \alpha x_1 \leftrightarrow \alpha x_1`$, где α – вещественное число.

Теорема 12.4. [6]. *Два линейных вещественных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.*

12.4 Координаты вектора

Теорема 12.5. *Если* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ *– базис линейного пространства, то для любого вектора* $\bar{x}$ *этого пространства существует единственная система чисел* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *такая, что*

$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \ldots + \alpha_n \bar{e}_n . \qquad (12.1)$$

▷ Из теоремы 12.2 следует существование такой системы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что выполняется (12.1). Докажем единственность. Допустим, что существует другая система $\beta_1, \ldots, \beta_n$, такая, что $\bar{x} = \beta_1 \bar{e}_1 + \beta_2 \bar{e}_2 + \ldots + \beta_n \bar{e}_n$. Тогда $\alpha_1 \bar{e}_1 + \ldots + \alpha_n \bar{e}_n = \beta_1 \bar{e}_1 + \ldots + \beta_n \bar{e}_n$.

Группируя слагаемые, получим

$$(\alpha_1 - \beta_1)\bar{e}_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\bar{e}_n = \bar{0} \cdot$$

Отсюда следует, что $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$, поскольку векторы $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ линейно независимы. Теорема доказана. ◁

Выражение (12.1) называется *разложением вектора* $\bar{x}$ *по базису* $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$. Это выражение можно записать в матричной форме

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются координатами вектора $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$.

Если вектор $\bar{x}$ имеет в некотором базисе координаты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, то пишут $\bar{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Пример 7. Пусть V – пятимерное линейное пространство с базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5$. Найти координаты векторов $\bar{e}_3$ и $\bar{x} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_3 + 3\bar{e}_4$.

$\bar{x} = 2\bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + (-1) \cdot \bar{e}_3 + 3 \cdot \bar{e}_4 + 0 \cdot \bar{e}_5$, т.е. $\bar{x}$ имеет координаты (2,0,-1,3,0).

Аналогично $\bar{e}_3$ = (0,0,1,0,0).

Справедливы следующие утверждения:

1. Вектор является нулевым вектором пространства тогда и только тогда, когда все его координаты в любом базисе равны нулю.
2. Координаты суммы двух векторов в некотором базисе равны сумме соответствующих координат этих векторов в том же базисе.
3. Координаты произведения вектора на число в некотором базисе равны произведению соответствующих координат данного вектора в том же базисе на это число.
4. Два вектора равны между собой тогда и только тогда, когда равны между собой их соответствующие координаты в одном и том же базисе.

12.5 Преобразование координат

Пусть в линейном пространстве V заданы два произвольных базиса $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ и $\bar{m}_1, ..., \bar{m}_n$. Выразим векторы $\overline{m}_1, ..., \overline{m}_n \in V$ через $\bar{e}_i$. Пусть

$$\overline{m}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \bar{e}_k \left(i = 1, 2, ..., n\right), \qquad (12.2)$$

где $a_{ki}\left(k = 1, 2, ..., n\right)$ – координаты вектора $\overline{m}_i$ в базисе $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$.

Чтобы выразить векторы базиса $\bar{e}_i$ через $\bar{m}_i$, нужно решить систему уравнений (12.2) относительно векторов $\bar{e}_k$. Эта система имеет единственное решение, поскольку ее определитель отличен от нуля.

Пусть

$$\bar{e}_k = \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \bar{m}_i \, (k = 1, 2, ..., n) \qquad (12.3)$$

решение системы (12.2). Из коэффициентов α_{ki} и b_{ik} составим матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}, \quad (12.4)$$

которые называются *матрицами перехода* от одного базиса к другому.

Из соотношений (12.2) и (12.3) следует, что $B = A^{-1}$.

Пусть $\bar{x}$ – произвольный вектор пространства V, который в базисе $\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n$ имеет координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$, а в базисе $(\bar{m}_i)$ – $x_1`, x_2`, \dots, x_n`$, т. е.

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{e}_k ; \quad (12.5)$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i ' \bar{m}_i . \quad (12.6)$$

Выясним, как преобразуются координаты вектора при переходе от одного базиса к другому. Подставим в (12.6) выражение (12.2)

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i ` \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \bar{e}_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} x_i ` \bar{e}_k . \quad (12.7)$$

Сравним полученное выражение с выражением (12.5). Коэффициенты при $\bar{e}_k$ должны быть равны

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i ` \quad (12.8)$$

Аналогично

$$x_i ` = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} x_k \quad (12.9)$$

В матричной форме формулы (12.8) и (12.9) запишутся в виде

$$x = Ax`, x` = A^{-1}x , \quad (12.10)$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \qquad x` = \begin{bmatrix} x_1 ` \\ x_2 ` \\ \vdots \\ x_n ` \end{bmatrix}.$$

Лекция № 13.
Линейные операторы

13.1 Определение линейного оператора

Пусть даны два линейных вещественных пространства V и W, размерности которых равны соответственно m и n.

Определение 1. Будем говорить, что задан *оператор* из V в W, если каждому $x \in V$ поставлен в соответствие единственный $y \in W$, и писать $f: V \to W$.

Определение 2. Вектор y назовем *образом* вектора x, а x – прообразом y. Это записывают так: $y = f(x)$.

Определение 3. Два оператора $f: V \to W$ и $g: V \to W$ называются равными, если $f(x) = g(x), \forall x \in V$.

Определение 4. Оператор называется *биективным,* если каждый вектор имеет прообраз, и притом единственный.

Определение 5. Оператор называется линейным, если $\forall x_1, x_2 \in V$ и $\lambda \in R$ выполняются условия:

1. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Из определения следует, что

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \quad (13.1)$$

Линейный оператор переводит нулевой вектор в нулевой вектор, т. к. $f(\bar{0}) = f(x - x) = f(x) - f(x) = \bar{0}$.

Определение 6. Если задан оператор $f: V \to W$ и $W=V$, то f называется *оператором* пространства V. Также оператор f можно назвать *преобразованием* пространства V.

Определение 7. Если $\forall x \in V$, $f(x) = x$, то оператор f называется *тождественным.*

Пример 1. В линейном пространстве M_2 определим оператор следующим образом: каждому вектору x поставим в соответствие вектор $f(x)$, полученный из вектора x поворотом на один и тот же угол φ.

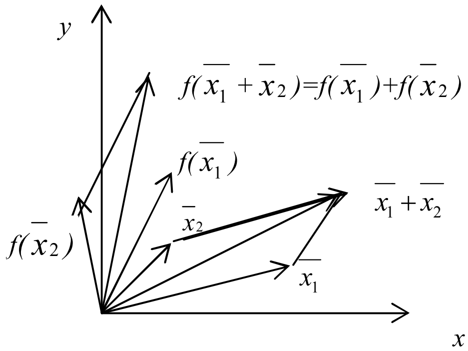


Рис. 13.1. Оператор f поворота на плоскости переводит вектор $\overline{x_1}+\overline{x_2}$ в вектор $f(\overline{x_1})+f(\overline{x_2})$

Этот оператор является линейным, т. к. легко проверяется выполнение свойств 1 и 2.

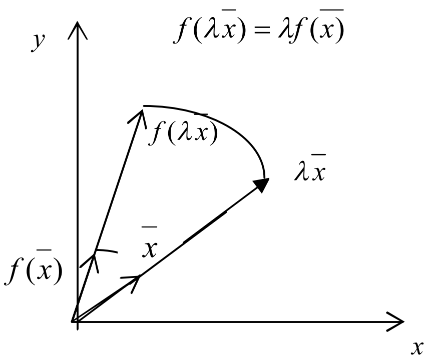


Рис 13.2. Оператор f переводит вектор $\lambda\overline{x}$ в вектор $\lambda f(\overline{x})$

Пусть линейный оператор f переводит базисные векторы $\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_n$ в векторы $e_1`,\ldots,e_n`$, т. е. $f(e_1)=e_1`,\ldots,f(e_n)=e_n`$. Тогда образ любого вектора $\overline{x}$ можно выразить через образы $f(\overline{e_1}),\ldots,f(\overline{e_n})$ базисных векторов. Действительно

$$f\left(\alpha_1\overline{e}_1+\ldots+\alpha_n\overline{e}_n\right) = \alpha_1 f\left(\overline{e}_1\right)+\ldots+\alpha_n f\left(\overline{e}_n\right) = \alpha_1\overline{e}_1`+\ldots+\alpha_n\overline{e}_n`\cdot$$

13.2 Матрица линейного оператора

Пусть f – линейный оператор некоторого пространства, переводящий базисные векторы $\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_n$ в $\overline{e}_1`,\ldots,\overline{e}_n`$;

Тогда

$$f\left(\overline{e}_1\right)=\overline{e}_1`= a_{11}\overline{e}_1+a_{21}\overline{e}_2+\ldots+a_{n1}\overline{e}_n, \qquad (12.2)$$

$$f\left(\overline{e}_n\right)=\overline{e}_n`= a_{1n}\overline{e}_1+a_{2n}\overline{e}_2+\ldots+a_{nn}\overline{e}_n\ \cdot$$

Определение 8. Матрица $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

называется матрицей линейного оператора в базисе $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n$.

Заметим, что в i-м столбце матрицы A стоят координаты $f(e_i)$ в базисе $e_1`,\ldots,e_n`$.

Таким образом, каждому линейному оператору соответствует матрица оператора в данном базисе. Справедливо и обратное: всякой матрице порядка n соответствует линейный оператор n-мерного пространства.

Соотношение (13.2) можно записать в матричном виде

$$\left[f\left(\overline{e}_1\right)\quad f\left(\overline{e}_2\right)\quad \ldots\quad f\left(\overline{e}_n\right)\right]=\left[\overline{e}_1\quad \overline{e}_2\quad \ldots\quad \overline{e}_n\right]A\cdot$$

Пример 2. Найдем матрицу оператора из предыдущего примера:

$$f(\overline{i}) = \overline{OM} + \overline{MN} = \overline{i}\cos\varphi + \overline{j}\sin\varphi$$

$$f(\overline{j}) = \overline{OP} + \overline{PS} = -\overline{i}\sin\varphi + \overline{j}\cos\varphi$$

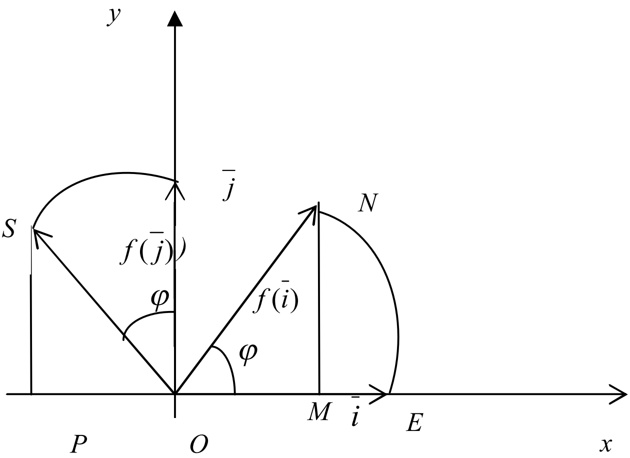


Рис. 13.3. Оператор поворота на угол φ

Значит, искомая матрица имеет вид
$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

13.3 Характеристическое уравнение линейного оператора

Теорема 13.1. *Если линейный оператор f в некотором базисе* $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$ *имеет матрицу A и в базисе* $e_1', e_2', \dots, e_n'$ *матрицу B, то* $\det(A-\lambda E) = \det(B-\lambda E)$, *где* λ *– произвольное число; E – единичная матрица порядка n.*

Заметим, что $\det(A-\lambda E)$ является многочленом степени *n* относительно λ.

Определение 9. Многочлен $\det(A-\lambda E)$ называется *характеристическим многочленом* матрицы *A* или оператора *f*.

Определение 10. *Характеристическим уравнением* линейного оператора *f* называется уравнение
$$\det(A-\lambda E) = 0, \qquad (13.3)$$

где A – матрица этого оператора в некотором базисе.

Уравнение (13.3) называется также *характеристическим уравнением матрицы* A, а его корни – *характеристическими числами* линейного оператора, а также матрицы A.

Теорема 13.1 утверждает, что характеристический многочлен оператора не зависит от выбора базиса.

Определение 11. Система всех характеристических чисел линейного оператора называется его *спектром.*

Пусть линейный оператор f имеет в некотором базисе матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Характеристическим уравнением его будет следующее уравнение:

$$\det\left[\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right] = 0$$

или, выполняя вычитание матриц,

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Определение 12. Решения $\lambda_i (1 \le i \le n)$ этого уравнения называются *собственными числами* матрицы A.

Каждому собственному числу λ_i соответствует набор векторов $\bar{u}$, называемых собственными векторами, они удовлетворяют уравнению $A\bar{u} = \lambda_i \bar{u}$. Заметим, что если $\bar{u}$ – собственный вектор, соответствующий собственному числу λ_i, то этому же числу соответствует и вектор вида $\alpha\bar{u}$, где α – произвольное число.

13.4 Евклидово пространство

Для того, чтобы в линейном пространстве можно было измерять длины и углы, вводят новую операцию – скалярное произведение.

Пусть V_n – n-мерное линейное пространство. Каждой паре векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ставится в соответствие действительное число λ – их скалярное произведение, обозначаемое $\overline{a}\cdot\overline{b}=\lambda$, удовлетворяющее следующим аксиомам.

Аксиома 13.1. Скалярное произведение векторов коммутативно: $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$.

Аксиома 13.2. Скалярное произведение векторов дистрибутивно относительно сложения векторов: $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$.

Аксиома 13.3. Числовой множитель можно вынести за знак скалярного произведения: $(\lambda\overline{a})\cdot\overline{b}=\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})$.

Аксиома 13.4 Скалярный квадрат вектора неотрицателен: $\overline{a}\cdot\overline{a}=\overline{a}^2\geq 0$, причем $\overline{a}^2=0$ тогда и только тогда, когда $\overline{a}=\overline{0}$.

Линейное пространство размерности n со скалярным произведением, удовлетворяющим аксиомам (13.1)–(13.4), называется n-мерным евклидовым пространством и обозначается E_n.

Пример 3**.**

1. Евклидовым пространством является множество всех векторов V_3 обычного трехмерного пространства. Скалярное произведение вводится так же, как в лекции 2, т. е. как произведение длин этих векторов на косинус угла между ними.

2. Евклидовым пространством является множество T функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$. Скалярное произведение функций f и φ определим так: $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$. Выполнение аксиом (13.1)–(13.4) непосредственно проверяется.

3. Если в арифметическом линейном пространстве R^n скалярное произведение векторов $\overline{x}=(x_1,x_2,\ldots x_n)$ и $\overline{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ задать равенством $\overline{x}\cdot\overline{y}=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$, то аксиомы (13.1)–(13.4) выполняются.

Определение 13. *Величиной угла* между двумя векторами $\overline{x}$ и $\overline{y}$ называется угол $\varphi(0\leq\varphi\leq\pi)$ такой, что $\cos\varphi=\dfrac{\overline{x}\cdot\overline{y}}{\|\overline{x}\|\cdot\|\overline{y}\|}$, где $\|\overline{x}\|=\sqrt{\overline{x}\cdot\overline{x}}$ – *норма вектора* $\overline{x}$.