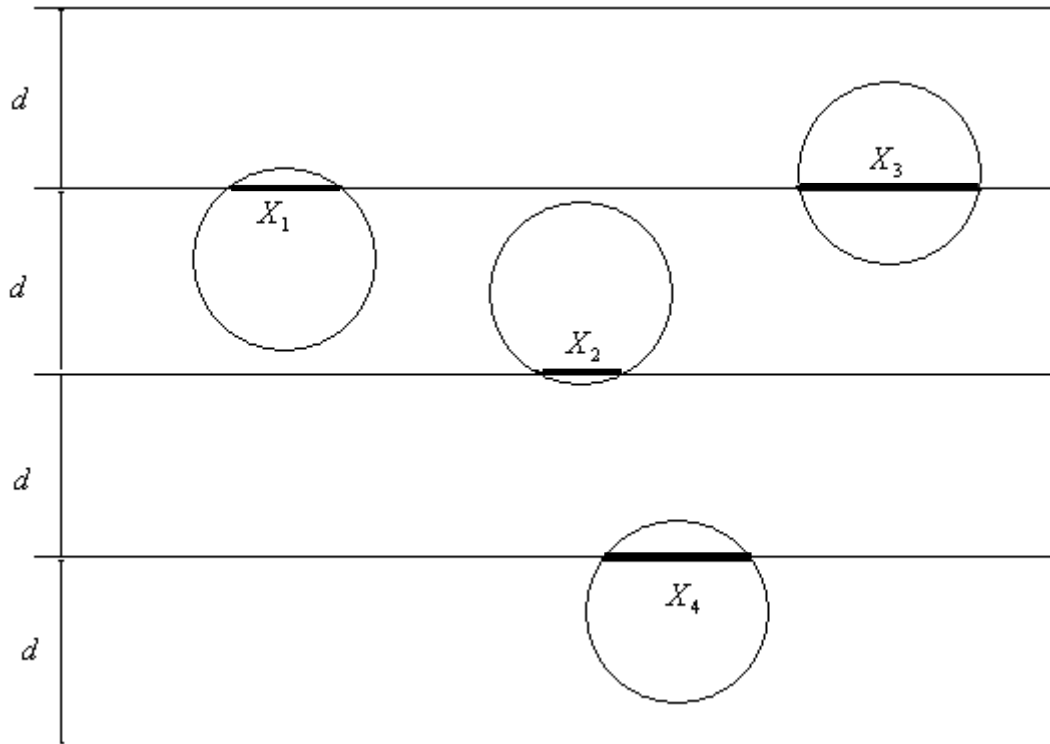


## Домашнее задание Математическая статистика

**Задача 1.** а) Смоделировать выборку следующим образом: на листе бумаги нарисовать параллельные линии на расстоянии в диаметр пятирублевой монеты. Подбрасывая  $n = 25$  раз монету, измерить с точностью до миллиметра длину накрываемого монетой отрезка.(см. рис.)



Для полученной в результате эксперимента выборки, построить вариационный ряд, найти теоретическую функцию распределения  $F(x)$  длины накрываемого отрезка и эмпирическую функцию распределения  $F_n(x)$  и построить их графики в одной и той же системе координат, найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

б) Смоделировать выборку объема  $n = 250$  используя таблицы Excel. Воспользоваться методом обратной функции (функция распределения  $X_i$  имеет

вид  $F(t) = P(X_i < t) = 1 - \sqrt{1 - \frac{t^2}{d^2}}$ ). В одной и той же системе координат

построить графики эмпирической функции распределения  $F_n(t)$  и теоретической функции распределения  $F(t)$ .

Сравнить графики а) и б) и сделать вывод.

**Указания.** Для построения графика на листе Excel сформировать три столбца:

в первом столбце расположить члены вариационного ряда  $X_{(i)}$ , во втором значения

функции  $F(X_{(i)})$ , в третьем числа  $\frac{i}{n}$ . По этим трем столбцам построить графики, выбрав

в **Вставке** точечную диаграмму с непрерывными графиками.

**Задача 2.** По выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$  найти методом моментов выражения для точечных оценок параметров, если плотность распределения имеет вид:

1.  $f(x) = \frac{\theta^3 x^2}{2} e^{-\theta x}, \quad x > 0.$
2.  $f(x) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi x}} e^{-\theta x}, \quad x > 0.$
3.  $f(x) = \frac{\theta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\theta x}, \quad x > 0.$
4.  $f(x) = \frac{\theta^{3/2} x^{1/2}}{\Gamma(3/2)} e^{-\theta x}, \quad x > 0.$
5.  $f(x) = \frac{x^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} e^{-x}, \quad x > 0.$
6.  $f(x) = \theta x^{-(\theta+1)}, \quad x > 1.$
7.  $f(x) = \theta^4 x e^{-\theta^2 x}, \quad x > 0.$
8.  $f(x) = (\theta - 1) x^{-\theta}, \quad x > 1.$
9.  $f(x) = \frac{x^{\theta/2-1}}{2^{\theta/2} \Gamma(\theta/2)} e^{-x/2}, \quad x > 0.$
10.  $f(x) = 2\theta^2 x e^{-\theta^2 x^2}, \quad x > 0.$
11.  $f(x) = \frac{2\theta^2}{x^3}, \quad x > \theta.$
12.  $f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-2}{\theta}}, \quad x > 2.$
13.  $f(x) = \frac{\lambda^{\alpha+1} x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$
14.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\theta\pi}\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0.$
15.  $f(x) = \frac{\theta^4 x^3}{3!} e^{-\theta x}, \quad x > 0.$
16.  $f(x) = \frac{\theta^5 x^4}{4!} e^{-\theta x}, \quad x > 0.$
17.  $f(x) = \frac{x^{\theta-1}}{2^\theta \Gamma(\theta)} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0.$
18.  $f(x) = \frac{3\theta^3}{x^4}, \quad x > \theta.$
19.  $f(x) = \frac{x^\theta}{\Gamma(\theta+1)} e^{-x}, \quad x > 0.$
20.  $f(x) = \frac{x^3}{\theta^4 3!} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0.$
21.  $f(x) = \frac{x^4}{\theta^5 4!} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0.$
22.  $f(x) = \frac{x^{\theta-1}}{4^\theta \Gamma(\theta)} e^{-\frac{x}{4}}, \quad x > 0.$
23.  $f(x) = \theta^2 x e^{-\theta x}, \quad x > 0.$
24.  $f(x) = \frac{\theta^2}{2} |x| e^{-\theta|x|}.$
25.  $f(x) = \frac{\theta}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^{\theta+1}, \quad x > 2.$
26.  $f(x) = \frac{\theta}{3} \left(\frac{3}{x}\right)^{\theta+1}, \quad x > 3.$
27.  $f(x) = \frac{\theta^5 x^4}{4} e^{-(\theta x)^2}, \quad x > 0.$
28.  $f(x) = \frac{4\theta^4}{x^5}, \quad x > \theta.$
29.  $f(x) = \frac{\theta}{4} \left(\frac{4}{x}\right)^{\theta+1}, \quad x > 4.$
30.  $f(x) = \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x|}.$

**Задача 3.** По выборке  $x_1, x_2, \dots, x_n$  найти общий вид оценки максимального правдоподобия и подсчитать ее конкретное значение для приведенных данных.

1. Распределение Пуассона:

$$f(x) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 7, \quad x_5 = 5.$$

2. Экспоненциальное распределение:

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

$$x_1 = 8, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 5, \quad x_5 = 14.$$

3. Распределение Релея:

$$f(x) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2\theta^2}}, \quad x > 0.$$

$$x_1 = 4.2, \quad x_2 = 7.8, \quad x_3 = 16.3, \quad x_4 = 11.6, \quad x_5 = 5.1.$$

4. Распределение Вейбулла:

$$f(x) = \alpha \theta x^{\alpha-1} e^{-\theta x^\alpha}, \quad x > 0, \quad \alpha = 2.$$

$$x_1 = 8, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 6, \quad x_5 = 14.$$

5. Гамма-распределение:

$$f(x) = \frac{\theta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\theta x}, \quad x > 0, \quad \alpha = 3.$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 5, \quad x_5 = 7.$$

6. Логарифмически нормальное распределение:

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0, \quad \sigma = 1.$$

$$x_1 = e, \quad x_2 = e^2, \quad x_3 = e^3, \quad x_4 = e^5, \quad x_5 = e^4.$$

7. Распределение Лапласа:

$$f(x) = \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x-a|}, \quad a = 2.$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = -5, \quad x_5 = 7.$$

8. Биномиальное распределение:

$$f(x) = C_n^x \theta^x (1-\theta)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n, \quad n = 8.$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 16, \quad x_4 = 8, \quad x_5 = 7.$$

$$9. f(x) = \frac{x^\alpha}{\theta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0, \quad \alpha = 4.$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 4.$$

$$10. f(x) = 3\theta x^2 e^{-\theta x^3}, \quad x > 0.$$

$$x_1 = 4.2, \quad x_2 = 5.7, \quad x_3 = 16.6, \quad x_4 = 8.1, \quad x_5 = 5.4.$$

$$11. f(x) = \frac{\theta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\theta x}, \quad x > 0, \quad \alpha = 5.$$

$$x_1 = 4.2, \quad x_2 = 1.6, \quad x_3 = 2.7, \quad x_4 = 4.7, \quad x_5 = 6.8.$$

$$12. f(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2}, \quad x > 0.$$

$$x_1 = 4.1, \quad x_2 = 5.8, \quad x_3 = 15.6, \quad x_4 = 9.1, \quad x_5 = 5.4.$$

$$13. f(x) = \frac{\theta \sqrt{\theta} \sqrt{x}}{\Gamma(3/2)} e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

$$x_1 = 2.2, \quad x_2 = 3.6, \quad x_3 = 2.5, \quad x_4 = 4.9, \quad x_5 = 6.8.$$

$$14. f(x) = \frac{\theta^3 x^2}{2!} e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

$$x_1 = 0.4, \quad x_2 = 1.5, \quad x_3 = 0.8, \quad x_4 = 0.7, \quad x_5 = 1.6.$$

$$15. f(x) = \frac{\theta}{4} \left(\frac{4}{x}\right)^{\theta+1}, \quad x > 4.$$

$$x_1 = e^2, \quad x_2 = e^6, \quad x_3 = e^3, \quad x_4 = e^5, \quad x_5 = e^4.$$

$$16. f(x) = \frac{\theta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\theta x}, \quad x > 0, \quad \alpha = 3.5.$$

$$x_1 = 0.4, \quad x_2 = 1.5, \quad x_3 = 0.8, \quad x_4 = 2.7, \quad x_5 = 1.6.$$

$$17. f(x) = 3\theta x^2 e^{-\theta x^3}, \quad x > 0.$$

$$x_1 = 1.2, \quad x_2 = 3.6, \quad x_3 = 2.5, \quad x_4 = 5.9, \quad x_5 = 6.8.$$

$$18. f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0, \quad \mu = 1.$$

$$x_1 = e, \quad x_2 = e^2, \quad x_3 = e^3, \quad x_4 = e^5, \quad x_5 = e^4.$$

$$19. f(x) = \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x-3|}.$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -5, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 8, \quad x_5 = -10.$$

$$20. f(x) = \frac{\theta^4 x^3}{3!} e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

$$x_1 = 0.4, \quad x_2 = 2.5, \quad x_3 = 0.8, \quad x_4 = 1.7, \quad x_5 = 1.6.$$

$$21. f(x) = \frac{x^3}{\theta^4 3!} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0.$$

$$x_1 = 1.2, \quad x_2 = 2.6, \quad x_3 = 4.5, \quad x_4 = 4.9, \quad x_5 = 6.8.$$

$$22. f(x) = \frac{x^2}{2\theta^3} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0.$$

$$x_1 = 3.1, \quad x_2 = 4.8, \quad x_3 = 14.6, \quad x_4 = 8.1, \quad x_5 = 4.4.$$

$$23. f(x) = \frac{\theta}{3} \left(\frac{3}{x}\right)^{\theta+1}, \quad x > 3.$$

$$x_1 = e^2, \quad x_2 = e^6, \quad x_3 = e^3, \quad x_4 = e^5, \quad x_5 = e^4.$$

$$24. f(x) = \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0.$$

$$x_1 = 1.1, \quad x_2 = 2.7, \quad x_3 = 4.6, \quad x_4 = 4.9, \quad x_5 = 6.7.$$

$$25. f(x) = \frac{\theta}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^{\theta+1}, \quad x > 2.$$

$$x_1 = e, \quad x_2 = e^2, \quad x_3 = e^3, \quad x_4 = e^5, \quad x_5 = e^4.$$

$$26. f(x) = \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x+1|}.$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -5, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 8, \quad x_5 = 0.$$

$$27. f(x) = 3\theta x^2 e^{-\theta x^3}, \quad x > 0.$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 4.$$

$$28. f(x) = \frac{x^3}{\theta^4 3!} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0.$$

$$x_1 = 2.2, \quad x_2 = 4.6, \quad x_3 = 1.5, \quad x_4 = 2.9, \quad x_5 = 6.8.$$

$$29. f(x) = \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x|}.$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = -2, \quad x_5 = 1.$$

$$30. f(x) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2\theta^2}}, \quad x > 0.$$

$$x_1 = 3.2, \quad x_2 = 6.8, \quad x_3 = 15.3, \quad x_4 = 10.6, \quad x_5 = 4.1.$$

**Задача 4.** Выборка  $X_1, \dots, X_{25}$  получена из нормального распределения. Найти симметричные доверительные интервалы с уровнем доверия  $\gamma = 0.95$  для среднего значения и дисперсии (используя информацию об известном втором параметре и не используя эту информацию).

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Среднее	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1
Ср.кв.откл.	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
X1	4,2	1,3	1,3	5,4	1,7	0,5	0,8	3,3	0,1	0,6	1,6	1,8	2,3	1,2	-0,5
X2	3,0	1,3	1,7	1,1	1,4	3,3	3,1	2,9	0,5	3,1	1,4	-1,9	2,7	2,2	1,6
x3	2,9	3,0	-0,5	3,3	2,6	2,7	-0,4	-1,6	2,3	3,2	1,0	0,7	2,6	4,5	1,0
x4	3,5	0,1	2,0	1,8	2,6	-0,8	0,4	1,4	-0,6	3,8	2,4	1,4	3,2	0,3	0,5
x5	3,1	-1,1	0,3	1,5	0,9	0,5	5,1	1,5	0,2	0,9	1,9	1,0	3,6	7,3	3,2
x6	3,7	0,2	0,8	5,7	2,1	1,2	3,5	3,2	1,8	2,9	1,9	0,1	4,4	2,4	2,4
x7	5,2	0,1	1,4	6,1	2,4	4,7	2,4	0,0	-0,9	6,4	1,3	1,6	3,7	3,6	0,2
x8	2,9	3,1	2,1	4,0	2,0	-0,8	2,9	0,8	1,6	0,1	0,6	-1,0	3,7	-1,9	3,8
x9	1,8	-0,1	2,7	3,2	1,9	1,4	3,9	1,7	1,4	6,6	1,3	-1,8	2,1	0,2	1,5
x10	1,0	2,2	1,1	5,4	0,7	1,6	2,9	0,3	0,0	5,9	1,3	0,6	3,5	-0,8	0,6
x11	2,9	0,9	0,6	2,3	-0,3	2,6	3,1	0,8	1,7	2,8	2,1	2,4	2,0	3,9	1,4
x12	1,7	5,3	0,0	4,4	1,1	-0,9	2,2	-0,7	3,2	5,5	1,3	-1,8	4,3	-2,1	-0,8
x13	2,1	0,0	0,1	5,1	2,6	-1,9	1,9	1,8	0,4	3,1	2,5	0,8	2,9	2,0	1,1
x14	2,8	3,4	0,6	2,8	1,3	-0,6	3,3	2,8	0,0	4,7	1,0	3,4	3,2	3,6	2,2
x15	3,8	4,2	0,7	5,2	2,0	5,7	4,4	-0,1	0,0	2,1	2,0	2,5	2,5	2,0	2,7
x16	3,6	1,1	0,8	0,7	1,8	-1,5	3,3	-0,1	2,5	0,8	1,3	1,2	3,7	4,1	-1,0
x17	2,9	2,3	2,0	5,8	2,3	3,3	2,6	3,4	2,2	2,3	2,4	-1,8	4,1	-1,9	1,3
x18	3,3	5,0	0,2	1,6	2,4	-0,1	3,7	-0,1	1,1	7,9	1,5	-0,9	3,7	4,2	1,7
x19	3,4	1,8	1,8	3,7	1,6	0,2	2,0	6,0	1,1	3,1	0,9	3,3	3,9	3,4	2,7
x20	2,4	0,8	1,1	2,8	2,2	1,0	2,7	4,2	-1,0	1,7	1,0	-0,2	3,8	0,2	0,6
x21	4,2	4,4	1,6	3,2	1,7	0,7	2,0	0,5	2,9	5,2	2,4	-0,4	2,8	4,5	0,9
x22	1,8	6,1	1,6	-0,9	2,3	1,5	4,8	0,4	1,6	6,6	0,7	-2,3	2,2	4,1	2,0
x23	5,2	2,1	0,6	2,4	1,4	0,8	4,6	7,0	0,7	6,5	1,4	0,6	3,5	1,0	0,2
x24	4,5	2,3	0,9	0,9	4,0	0,2	2,7	3,4	1,0	0,7	2,6	-1,9	3,2	3,9	0,3
X25	2,9	3,0	1,2	0,6	2,0	3,2	2,9	1,2	-0,7	5,5	2,6	0,8	3,4	-1,5	1,1

Вариант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Среднее	3	2	1	3	2	1	3	2	1	2	3	2	1	3	2
Ср.кв.откл.	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1
x1	5,1	3,0	1,2	3,5	-0,8	1,3	3,1	1,7	0,0	1,9	4,2	1,3	1,3	5,4	1,7
x2	7,7	3,8	-2,2	3,2	0,5	-1,1	5,1	0,7	4,3	1,6	3,0	1,3	1,7	1,1	1,4
x3	1,1	2,0	2,1	1,0	1,7	1,6	-1,7	2,3	-0,7	1,9	2,9	3,0	-0,5	3,3	2,6
x4	7,0	1,9	1,9	2,8	2,3	1,1	2,6	0,7	0,0	0,9	3,5	0,1	2,0	1,8	2,6
x5	2,4	1,4	-1,9	3,2	6,7	0,8	1,9	1,1	0,4	3,1	3,1	-1,1	0,3	1,5	0,9
x6	2,0	1,4	2,4	0,6	5,6	0,2	5,4	3,1	1,4	1,9	3,7	0,2	0,8	5,7	2,1
x7	5,3	1,3	0,7	2,3	3,7	2,0	-0,6	2,6	2,1	3,7	5,2	0,1	1,4	6,1	2,4
x8	0,0	2,9	3,2	3,0	2,6	-0,7	-1,2	2,7	3,1	1,9	2,9	3,1	2,1	4,0	2,0
x9	3,6	3,8	-0,7	2,6	0,7	1,0	6,1	3,8	3,7	1,9	1,8	-0,1	2,7	3,2	1,9
x10	3,8	2,4	-4,1	4,2	1,0	1,9	0,9	1,3	3,2	3,2	1,0	2,2	1,1	5,4	0,7
x11	2,9	0,9	1,9	2,2	5,9	-0,2	0,6	3,3	0,3	1,4	2,9	0,9	0,6	2,3	-0,3
x12	1,6	3,7	2,3	3,8	4,3	1,3	1,8	2,5	2,2	1,8	1,7	5,3	0,0	4,4	1,1
x13	4,4	2,3	0,8	2,6	6,4	1,3	3,7	2,9	4,5	0,5	2,1	0,0	0,1	5,1	2,6
x14	1,3	1,4	3,0	3,2	2,3	3,4	4,5	1,0	-0,1	3,2	2,8	3,4	0,6	2,8	1,3
x15	0,3	1,2	5,9	3,2	2,5	1,6	1,8	0,5	-0,4	4,3	3,8	4,2	0,7	5,2	2,0
x16	3,4	1,1	-0,5	2,8	1,7	1,1	1,1	1,9	1,6	2,7	3,6	1,1	0,8	0,7	1,8
x17	1,5	2,6	3,5	2,7	0,3	1,1	1,2	1,0	3,4	1,4	2,9	2,3	2,0	5,8	2,3

x18	3,9	1,6	2,3	2,1	2,0	3,5	-0,2	0,9	0,9	2,0	3,3	5,0	0,2	1,6	2,4
x19	-0,1	1,1	4,7	3,1	-1,0	1,5	1,9	3,6	-0,1	2,6	3,4	1,8	1,8	3,7	1,6
x20	2,6	3,6	0,1	2,2	0,9	1,1	4,7	1,2	-0,6	0,5	2,4	0,8	1,1	2,8	2,2
x21	4,4	3,5	1,3	3,9	3,7	1,3	5,0	2,3	2,6	2,4	4,2	4,4	1,6	3,2	1,7
x22	1,2	2,6	-0,7	3,1	4,3	3,2	3,1	0,2	0,7	2,2	1,8	6,1	1,6	-0,9	2,3
x23	3,0	2,5	1,4	3,0	6,0	0,4	1,5	3,3	-1,3	3,9	5,2	2,1	0,6	2,4	1,4
x24	4,0	2,9	-1,4	2,4	4,7	1,1	4,4	1,4	5,5	2,1	4,5	2,3	0,9	0,9	4,0
x25	3,0	3,3	-2,5	1,8	1,5	0,4	4,6	1,9	0,5	2,3	2,9	3,0	1,2	0,6	2,0

**Задача 5.** В условиях задачи 1 найти теоретическое среднее значение наблюдаемой случайной величины. По экспериментальным данным для первой и второй выборок построить приближенный доверительный интервал для математического ожидания с уровнем доверия  $\gamma = 0.9$ .

**Задача 6.** Построить приближенный доверительный интервал с уровнем доверия  $\gamma = 0.99$  для параметра  $p$  - вероятность «успеха» в схеме Бернулли при условии, что в серии из  $n$  испытаний наблюдалось  $m$  «успехов».

<i>№ вар.</i>	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>№ вар.</i>	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>№ вар.</i>	<i>n</i>	<i>m</i>
1	100	35	11	160	20	21	120	45
2	90	40	12	120	10	22	140	20
3	90	15	13	100	45	23	150	50
4	150	33	14	50	10	24	160	40
5	160	120	15	60	42	25	160	100
6	120	55	16	80	50	26	80	50
7	40	16	17	15	7	27	45	15
8	60	15	17	20	9	28	50	20
9	80	60	19	60	20	29	90	30
10	90	18	20	80	20	30	120	40