Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

**И.Г. Зорина, Т.И. Лапшенкова,
А.Л. Сунчалина**

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

*Методические указания
к выполнению типового расчета*

М о с к в а
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2 0 1 3

УДК 517.9
ББК 22.161
Ф94

Рецензент *И.Л. Покровский*

Ф94 **Функции нескольких переменных**: метод. указания к выполнению типового расчета / И. Г. Зорина, Т. И. Лапшенкова, А. Л. Сунчалина ; под ред. И. О. Янова. М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. — 61, [3] с.: ил.

ISBN 978-5-7038-3677-4

Приведены краткие теоретические сведения по теме «Функции нескольких переменных», разобрано большое число детально решенных типовых примеров, которые предполагают глубокое понимание теоретического материала. Приведены задачи типового расчета.

Для самостоятельной работы студентов, изучающих функции нескольких переменных.

Рекомендовано Учебно-методической комиссией Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

УДК 517.9
ББК 22.161

ISBN 978-5-7038-3677-4

ВВЕДЕНИЕ

Раздел математического анализа «Функции нескольких переменных», который более точно можно назвать «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных», является продолжением раздела «Дифференциальное исчисление (функции одной переменной)» и служит фундаментом при изучении последующих частей математического анализа, таких как «Кратные интегралы», «Численные методы», «Уравнения математической физики» и др. Кроме того, некоторые задачи раздела «Функции нескольких переменных» могут найти непосредственное применение на практике, например, поиск экстремума функции нескольких переменных, интерполирование функций по методу наименьших квадратов и интерполирование сплайнами, вариационное исчисление и т. д.

1. ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. *Скалярной функцией векторного аргумента* называют закон *f*, по которому каждой точке $\vec{X}=\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ некоторого множества *D* из *n*-мерного вещественного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ поставлено в соответствие единственное вещественное число $y=f\left(\vec{X}\right)$. Функцию $y=f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, где $f:D\to\mathbb{R}$, также называют функцией *n* переменных, или *функцией нескольких переменных* (ФНП).

Множество *D* называют *областью определения* ФНП, а множество $E=\left\{y\middle|\,y=f\left(x_1,\ldots,x_n\right),\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in D\right\}$ — *областью значе-*

ний ФНП. Если ФНП задана формулой, то можно найти ее естественную область определения, состоящую из всех $\vec{X}=(x_1,...,x_n)$, для которых определена $f(\vec{X})$, т. е. справедлива формула, задающая эту функцию, так как в нее входят только известные элементарные функции, введенные для одной переменной. Используя известные области допустимых значений этих элементарных функций, получаем область определения ФНП в пространстве $\mathbb{R}^n$, записанную в виде системы неравенств. Изобразить эту область можно на плоскости для $n=2$ или в обычном трехмерном пространстве для $n=3$.

Пример 1. Найти область определения функции $z=$ $=\dfrac{\sqrt{1-x}\sqrt{1-y}}{\ln(x+y)}$.

Решение. Запишем систему ограничений

$$\begin{cases} x\le 1, \\ y\le 1, \\ x+y>0, \\ x+y\ne 1. \end{cases}$$

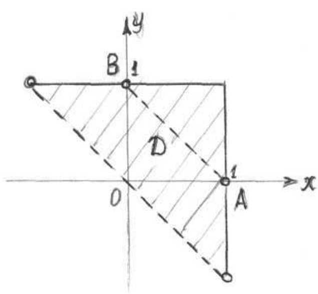

Рис. 1

Изобразим эту систему на плоскости. Для этого заменим все неравенства на равенства, по полученным уравнениям построим соответствующие линии, затем с помощью пробных точек установим, где лежит искомая область D (рис. 1).

Линии, входящие в область D, изобразим сплошными линиями, а не входящие — пунктирными. Точки $A(1;\ 0)$ и $B(0;\ 1)$ — точки разрыва, отрезок AB целиком состоит из точек разрыва и называется *линией разрыва*.

Определение. Графиком функции $f: D\to\mathbb{R}$ называется множество $\Gamma=\left\{(x_1,...,x_n,y)\in\mathbb{R}^{n+1}\,\middle|\,\forall(x_1,...,x_n)\in D,\ \ y=f(x_1,...,x_n)\right\}$.

График Γ описывает множество точек в $(n+1)$-мерном пространстве, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Графиком функции двух переменных, т. е. $z = f(x, y)$, является поверхность. Например, для функции $z = x^2 + y^2$ — это параболоид вращения с осью вращения OZ.

Существует и другой способ графической интерпретации ФНП.

Определение. Пусть дана функция n-переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Множество $\left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n \middle| f(x_1, x_2, ..., x_n) = \text{const}\right\}$ называется поверхностью уровня.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ получаем линии уровня $\Gamma_C = \left\{(x, y) \middle| f(x, y) = C, C \in E \subset \mathbb{R}\right\}$.

Каждая из этих линий представляет собой кривую на плоскости XOY, лежащую в области D, во всех точках которой функция $z = f(x, y)$ имеет постоянное значение C. Линии уровня Γ_C можно получить из графика функции Γ путем сечения его плоскостями $z = C$, проецируя полученные линии пересечения на плоскость XOY. По линиям уровня на плоскости, наоборот, можно представить себе график функции в пространстве, если каждую линию уровня Γ_C на плоскости $z = 0$ поднять на C единиц, т. е. расположить ее на плоскости $z = C$. Таким образом, можно изобразить любую поверхность в пространстве в виде семейства линий уровня на плоскости. Это используется, например, в географических картах для изображения рельефа местности.

Рассмотрим функцию $z = x^2 + y^2$. Линии уровня для этой функции — окружности $x^2 + y^2 = C\ (C \geq 0)$ с центром в начале координат и радиусами $\sqrt{C}$. Если каждую окружность радиусом $\sqrt{C}$ поднять на C (по оси OZ), то можно представить себе параболоид вращения, т. е. график исходной функции.

Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ получаем поверхности уровня $\Gamma_C = \left\{(x, y, z) \middle| f(x, y, z) = C,\ C \in E \subset \mathbb{R}\right\}$. Например, функция $u = x + y + z$ имеет поверхности уровня $x + y + z = C$,

$C \in \mathbb{R}$. Они представляют собой параллельные плоскости, отсекающие от осей координат одинаковые отрезки, равные C. Если изобразить эти плоскости и указать на каждой значение C, т. е. u ($u = C$), то можно получить какое-то представление о распределении физического параметра u (например, температуры) по всему пространству как о функции трех переменных.

Пример 2. Используя линии уровня, найти минимальное и максимальное значения функции $z = x^2 + y^2$ в области определения функции $g(x, y) = \arcsin(x-2) + \arccos\left|\frac{y}{2}\right|$.

Решение. Линии уровня функции $z = x^2 + y^2$ есть окружности $x^2 + y^2 = C\ (C \geq 0)$. Запишем область допустимых значений другой функции: $\begin{cases} |x-2| \leq 1, \\ \left|\frac{y}{2}\right| \leq 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 1 \leq x \leq 3, \\ -2 \leq y \leq 2. \end{cases}$

Получим прямоугольник со сторонами $x = 1$, $x = 3$, $y = -2$, $y = 2$, причем границы входят в область D. Изобразим эту область и линии уровня для $C = 0$ и $C = 1$ на плоскости (рис. 2).

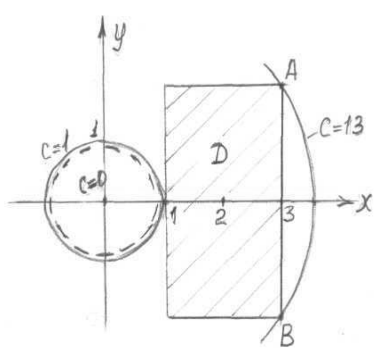

Рис. 2

Линии уровня $C = 1$ касаются границы области D и соответствуют минимальному значению функции $z_{\min} = 1$, так как меньшие значения не входят в область D. На рис. 2 пунктиром показана линия уровня, соответствующая $C < 1$ ($z < 1$). Она не пересекается с областью, поэтому не существует значения $z < 1$, т. е. минимум функции в области D $z_{\min} = 1$. Для определения $z_{\max}$ надо найти линию уровня с максимальным C, которая пересекает область D хотя бы в одной точке, а любая линия уровня, соответствующая большему значению C, не пересекает область D. Такой линией уровня является $x^2 + y^2 = 13$, т. е. окружность радиусом $\sqrt{13}$. Радиус равен длине OA или OB. Координаты точки $A(3;\ 2)$, отсюда $OA = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $z_{\max} = 13$. Этот максимум достигается в точке $A(3;\ 2)$ или $B(3;\ –2)$. Минимум $z_{\min} = 1$ достигается в точке $(1;\ 0)$.

2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Пусть внутренняя точка $M = \left(x_1, ..., x_n\right)$ принадлежит области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ задания функции $y = f\left(x_1, ..., x_n\right)$.

Если всем аргументам придать произвольные приращения $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ так, чтобы точка $\left(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n\right)$ оставалась в области задания функции, то величина $\Delta y = f\left(x_1 + \Delta x_1, .., x_i + \Delta x_i, ..., x_n + \Delta x_n\right) - f\left(x_1, .., x_i, ..., x_n\right)$ получит название полного приращения или просто приращения функции $y = f\left(x_1, .., x_n\right)$ в точке $M = \left(x_1, ..., x_n\right)$.

Зафиксируем все аргументы, кроме одного, например, $x_i \left(i = 1 \ldots n\right)$, и аргументу x_i придадим произвольное приращение Δx_i так, чтобы точка $X = \left(x_1, .., x_i + \Delta x_i, ..., x_n\right)$ находилась в области задания этой функции.

Определение. Величина $\Delta y_{x_i} = f\left(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n\right) - f\left(x_1, ..., x_i, ..., x_n\right)$ называется частным приращением функции нескольких переменных по x_i.

Если же всем аргументам придать произвольные приращения $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ так, чтобы точка $\left(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n\right)$ оставалась в области задания функции, то полным приращением или просто приращением функции $y=f\left(x_1,...,x_n\right)$ в точке $M=\left(x_1,...,x_n\right)$ называется величина $\Delta y=f\left(x_1+\Delta x_1,...,x_i+\Delta x_i,...,x_n+\Delta x_n\right)-$ $-f\left(x_1,...,x_i,...,x_n\right)$.

Определение. Частной производной функции $y=f\left(x_1,...,x_n\right)$ в точке $M\left(x_1,...,x_n\right)$ по аргументу x_i называется предел (если он существует и конечен) отношения частного приращения Δy_{x_i} функции в точке M к соответствующему приращению Δx_i аргумента в этой точке при $\Delta x_i\to 0$: $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\dfrac{\Delta y_{x_i}}{\Delta x_i}$.

Помимо $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ применяют также обозначения $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, y'_{x_i}, f'_{x_i}.

Видим, что частная производная по аргументу x_i представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x_i при фиксированных значениях остальных переменных. Поэтому вычисление частных производных проводится по обычным правилам дифференцирования функции одной переменной.

Рассмотрим примеры для функций двух переменных $z=$ $=f\left(x,y\right)$ и трех переменных $u=g\left(x,y,z\right)$.

Пример 1. Найти частные производные от функции $z=$ $=\left(\sin x\right)^{\cos y}$.

Решение. Вычисляя частную производную по переменной x, рассматриваем $z=\left(\sin x\right)^{\cos y}$ как сложную степенную функцию вида u^{α}, где $u=\sin x$ и $\alpha=\cos y$. Так как производная $\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}u'$, а $y=\mathrm{const}$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos y(\sin x)^{\cos y-1}\cos x.$$

При нахождении частной производной по переменной y заданную функцию рассматриваем как показательную вида a^{u}, где

$a = \sin x$ и $u = \cos y$. В этом случае $\left(a^u\right)' = a^u \ln a u'$, а x = const, тогда

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\sin x\right)^{\cos y} \ln\left(\sin x\right)\left(-\sin y\right).$$

Пример 2. Найти значение частной производной функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в точке $M_0\left(1; 2\right)$.

Решение. Найдем сначала все частные производные заданной функции в произвольной точке $M\left(x; y\right)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

и подставим в них координаты точки $M_0\left(1; 2\right)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = -\frac{2}{5}, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = \frac{1}{5}.$$

Пример 3. Найти частные производные от функции

$u = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{z^2}$.

Решение. Имеем функцию трех независимых переменных $u = u\left(x; y; z\right)$. Найдем ее три частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \frac{y}{\sqrt{x}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2\sqrt{x} + 6y\sqrt[3]{z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 + 3y^2\frac{2}{3}z^{-1/3} = \frac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}.$$

Пример 4. Доказать, что функция $z = y^2\sin\left(x^2 - y^2\right)$ удовлетворяет уравнению $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xz$.

Решение. Задана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Найдем ее частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cos\left(x^2 - y^2\right) 2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \sin\left(x^2 - y^2\right) + y^2 \cos\left(x^2 - y^2\right)(-2y).$$

Подставим их в левую часть данного соотношения и упростим его:

$$y^2 y^2 \cos\left(x^2 - y^2\right) 2x + xy\left(2y \sin\left(x^2 - y^2\right) + y^2 \cos\left(x^2 - y^2\right)(-2y)\right) =$$

$$= y^4 2x \cos\left(x^2 - y^2\right) + 2xy^2 \sin\left(x^2 - y^2\right) - 2xy^4 \cos\left(x^2 - y^2\right) =$$

$$= 2xy^2 \sin\left(x^2 - y^2\right) = 2xz.$$

Что и требовалось доказать.

3. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

Понятие производной по направлению $\overline{l}$ является обобщением понятия частной производной для случая $n = 3$.

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ и задан вектор $\vec{l}$. Тогда единичный вектор $\vec{l}_0 = \dfrac{\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β и γ — направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Всем аргументам придадим приращения так, чтобы вектор приращения $\Delta\vec{l} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ был параллелен заданному вектору направления $\vec{l}$. При этом $\Delta x = \Delta l \cos\alpha$, $\Delta y = \Delta l \cos\beta$, $\Delta z = \Delta l \cos\gamma$, где $\left|\Delta\vec{l}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ — произвольное скалярное приращение. Точка $\left(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z\right)$ должна находиться в окрестности точки M.

Определение. Приращением функции $u\left(x, y, z\right)$ в направлении $\vec{l}$ в точке M называется величина $\Delta u_l = f\left(x + \Delta l \cos\alpha,\ y + \Delta l \cos\beta,\ z + \Delta l \cos\gamma\right) - f\left(x, y, z\right)$; так как x, y, z зафиксированы, то приращение Δu_l является функцией одной переменной Δl.

Определение. Производной функции $u = f\left(x, y, z\right)$ в направлении $\vec{l}$ в точке M называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения этой функции Δu_l в направлении $\vec{l}$ в точке M к приращению Δl при $\Delta l \to 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u_l}{\Delta l}.$$

Эта производная зависит от направления $\vec{l}$, т. е. от углов α, β, γ, и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{1}$$

Производная по направлению вектора $\vec{l}$ представляет собой скорость изменения значения функции f в точке M в направлении вектора $\vec{l}$.

Определение. Градиентом функции нескольких переменных называется вектор, координатами которого являются соответствующие частные производные данной функции:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial u}{\partial x};\ \frac{\partial u}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Из формулы (1) видно, что $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ есть скалярное произведение $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u$ и единичного вектора $\vec{l}_0 = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ в направлении $\vec{l}$, т. е. $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u, \vec{l_0}\right)$.

Отсюда производная функции по направлению $\vec{l}$ равна проекции вектора градиента этой функции на это направление $\vec{l}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{Пр}_l\left(\overline{\mathrm{grad}}\, u\right).$$

Следовательно, производная функции по направлению вектора $\vec{l}$ принимает свое наибольшее значение в данной точке, если вектор $\vec{l}$ совпадает по направлению с вектором градиента функции в этой точке: $\vec{l} \ \uparrow\uparrow \overline{\mathrm{grad}}\, u$. При этом максимальное значение производной по направлению $\vec{l}$ равно модулю градиента функции:

$$\max \frac{\partial u}{\partial l}(M) = \left|\overline{\mathrm{grad}}\, u(M)\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \qquad (2)$$

Известно, что градиент функции трех переменных перпендикулярен поверхности уровня этой функции, проходящей через соответствующую точку.

Пример 1. Вычислить производную функции трех переменных $u = \ln\left(x^2 + yz\right) - \mathrm{arctg}\left(1 + \dfrac{x}{z}\right) e^{xy}$ в точке $A(-1; 0; 1)$ в направлении вектора $\overrightarrow{AB}$, если точка B имеет координаты $(1; 2; -1)$, а также наибольшую скорость возрастания данной функции в точке $A(-1; 0; 1)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его направляющие косинусы, а также частные производные функции в точке A:

$$\overrightarrow{AB} = (2; 2; -2), \qquad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\cos\gamma = \frac{-2}{\sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-2)^2}} = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + yz} - \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{z}\right)^2} \frac{1}{z} e^{xy} + \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{x}{z}\right) e^{xy} y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = \frac{2(-1)}{(-1)^2 + 0} - \frac{1}{1 + (1-1)^2} 1e^0 + \operatorname{arctg}(1-1) e^0 0 = -2 - 1 = -3;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{x^2 + yz} - \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{x}{z}\right) e^{xy} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = \frac{1}{(-1)^2 + 0} - \operatorname{arctg}(1-1) e^0 (-1) = 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{y}{x^2 + yz} - \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{x}{z}\right)^2} \left(-\frac{x}{z^2}\right) e^{xy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A = \frac{0}{(-1)^2 + 0} + \frac{1}{1 + (1-1)^2} \frac{(-1)}{1} e^0 = -1.$$

Подставляя в формулу производной по направлению (1) найденные значения, получим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A = (-3)\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\frac{1}{\sqrt{3}} + (-1)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\overline{\operatorname{grad}}\, u(A) = -3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}.$$

Наибольшая скорость изменения функции в данной точке определяется формулой (2):

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = \left| \overline{\text{grad}}\, u(A) \right| = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}.$$

4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ, ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Функция $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется непрерывной в точке $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = f\left(x^0\right)$.

Для непрерывных функций нескольких переменных верны теоремы об их свойствах, аналогичные соответствующим теоремам одномерного анализа.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x^0, если ее полное приращение может быть представлено в виде

$$\Delta y = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_n \Delta x_n + \alpha_1 (\Delta x_1, ..., \Delta x_n) \Delta x_1 +$$

$$+ \alpha_2 (\Delta x_1, ..., \Delta x_n) \Delta x_2 + \alpha_n (\Delta x_1, ..., \Delta x_n) \Delta x_n,$$

где $A_1, A_2, ..., A_n$ — константы, не зависящие от Δx, $\alpha_1(\Delta x_1, ..., \Delta x_n)$, ..., $\alpha_n(\Delta x_1, ..., \Delta x_n)\Delta x_n$ — бесконечно малые при $\Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n) \to 0$.

Определение. Главная часть приращения, линейная относительно приращения независимых переменных функции в данной точке, называется полным дифференциалом

$$dy = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_n \Delta x_n.$$

К необходимым условиям дифференцируемости относят две теоремы.

Теорема. Если функция $y = f(x_1, ..., x_n)$ дифференцируема в точке x^0, то она непрерывна в этой точке.

Теорема. Если функция $y = f(x_1, ..., x_n)$ дифференцируема в точке x^0, то она имеет все частные производные в этой точке, причем $\dfrac{\partial y(x^0)}{\partial x_i} = A_i$.

Отсюда

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}dx_i. \tag{3}$$

Пример 1. Найти полный дифференциал функции трех переменных

$$u = \frac{y^2}{x} + \sqrt{xz} + \ln(x + y + z).$$

Решение. Найдем частные производные заданной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{x}} + \frac{1}{(x + y + z)}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x} + \frac{1}{(x + y + z)};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{z}} + \frac{1}{(x + y + z)}.$$

Из формулы (3) получаем полный дифференциал функции трех переменных

$$du = \left(-\frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{x}} + \frac{1}{(x + y + z)}\right)dx + \left(\frac{2y}{x} + \frac{1}{(x + y + z)}\right)dy +$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{z}} + \frac{1}{(x + y + z)}\right)dz.$$

Пример 2. Найти значение полного дифференциала функции трех переменных $u = x^2 y \sin(xyz)$ в точке $M_0(1;\ 2;\ \pi)$.

Решение. Найдем частные производные функции $u = u(x;\ y;\ z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy\sin(xyz) + x^2y^2z\cos(xyz),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2\sin(xyz) + x^3yz\cos(xyz),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^3y^2\cos(xyz).$$

Значения частных производных в точке $M_0(1;\ 2;\ \pi)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 4\pi,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 2\pi,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 4.$$

Полный дифференциал функции в точке M_0 имеет вид

$$du = 4\pi dx + 2\pi dy + 4dz.$$

5. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Частные производные функции нескольких переменных также являются функциями нескольких переменных.

Определение. Частной производной второго порядка функции нескольких переменных $y = f(x_1, ..., x_n)$ по переменной x_i называется частная производная по этой переменной от частной производной $\frac{\partial f}{\partial x_i}$:

$$f''_{x_i x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Определение. Смешанной производной второго порядка функции нескольких переменных $y = f(x_1, ..., x_n)$ по переменным x_i, x_j называется частная производная по j-й переменной от частной производной функции по i-й переменной:

$$f''_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Например, если дана функция двух переменных $z = f(x, y)$, то она имеет следующие частные производные второго порядка: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Функция трех переменных $u = f(x, y, z)$ имеет девять частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}.$$

Определение. Частной производной m-го порядка функции нескольких переменных называется частная производная от ее частной производной $(m - 1)$-го порядка.

Теорема. Смешанные производные одного и того же порядка по одному и тому же набору аргументов равны в $M(x_1, ..., x_n)$, т. е. не зависят от порядка дифференцирования, если они непрерывны в этой точке.

Определение. Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от первого дифференциала $d(dy)$, взятый при фиксированных значениях dx_k $(k = 1...n)$ функции $y = f(x_1, ..., x_n)$:

$$d^2 y = d(dy) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j. \qquad (4)$$

Видим, что второй дифференциал представляет собой квадратичную форму дифференциалов $dx_1,\ dx_2, ..., dx_n$ независимых аргументов, а коэффициенты этой квадратичной формы образуют симметричную матрицу Гессе в случае непрерывности смешанных производных:

$$G = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right), \quad i = \overline{1,n}; \;\; j = \overline{1,n}.$$

Аналогично определяют и дифференциалы более высоких порядков. При этом $d^m y = d\left(d^{m-1} y\right)$.

Доказано, что $d^m y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m y$. Эта символическая запись обозначает возведение в степень m выражения в скобках, а затем под знак ∂^m подводится функция $y = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$.

Для функции двух переменных $z = f\left(x, y\right)$ имеем

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2; \tag{5}$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3; \tag{6}$$

Для функции трех переменных $u = f\left(x, y, z\right)$ имеем

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dxdz +$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} dzdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2. \tag{7}$$

Пример 1. Найти $d^2 u$, если $u = e^{xy} + \operatorname{arctg}\frac{y}{z}$.

Решение. Найдем частные производные второго порядка и воспользуемся формулой (7):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=ye^{xy};\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=xe^{xy}+\frac{1}{1+\left(\frac{y}{z}\right)^2}\frac{1}{z}=xe^{xy}+\frac{z}{z^2+y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{z}\right)^2}\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{y}{z^2+y^2};\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2e^{xy};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2e^{xy}-\frac{2yz}{\left(z^2+y^2\right)^2};\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2zy}{\left(z^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}=e^{xy}\left(1+xy\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{z^2+y^2-2z\cdot z}{\left(z^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-z^2}{\left(z^2+y^2\right)^2};\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=0.$$

Значит,

$$d^2u=y^2e^{xy}dx^2+\left(x^2e^{xy}-\frac{2yz}{\left(z^2+y^2\right)^2}\right)dy^2+\frac{2zy}{\left(z^2+y^2\right)^2}dz^2+$$

$$+2\left(e^{xy}\left(1+xy\right)dxdy+\frac{y^2-z^2}{\left(z^2+y^2\right)^2}dydz\right).$$

Пример 2. Найти d^3z в точке $M_0\left(\pi;1\right)$, если $z=e^y\sin x+\frac{x^2}{y}$.

Решение. Найдем частные производные третьего порядка и воспользуемся формулой (6):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^y\cos x+\frac{2x}{y};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=e^y\sin x-\frac{x^2}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -e^y \sin x + \frac{2}{y}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^y \sin x + \frac{2x^2}{y^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^y \cos x - \frac{2x}{y^2}; \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -e^y \cos x;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = e^y \sin x - \frac{6x^2}{y^4}; \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -e^y \sin x - \frac{2}{y^2};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = e^y \cos x + \frac{2x}{y^3}.$$

Значения частных производных третьего порядка в точке $M_0\left(\pi; 1\right)$

$$\left.\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right|_{M_0} = e; \qquad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right|_{M_0} = -\frac{6\pi^2}{4}; \qquad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right|_{M_0} = -2;$$

$$\left.\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\right|_{M_0} = -e + 2\pi.$$

Следовательно,

$$d^3 z = -e^y \cos x dx^3 - 3\left(e^y \sin x + \frac{2}{y^2}\right) dx^2 dy +$$

$$+ 3\left(e^y \cos x + \frac{4x}{y^3}\right) dx dy^2 + \left(e^y \sin x - \frac{6x^2}{y^4}\right) dy^3.$$

Значение дифференциала третьего порядка в точке $M_0\left(\pi; 1\right)$

$$\left. d^3 z\right|_{M_0} = e\, dx^3 - 2\, dx^2 dy + \left(-e + 2\pi\right) dx dy^2 - \frac{3\pi^2}{2} dy^3.$$

6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим для наглядности функцию трех переменных $u = f(x, y, z)$, заданную на открытом множестве $G \subseteq \mathbb{R}^3$ (n-мерный случай рассматривается аналогично).

Теорема. Пусть функции x, y, z дифференцируемы в точке t_0, а функция u — в соответствующей точке $u_0 = \left(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\right) = \left(x_0, y_0, z_0\right)$. Тогда сложная функция $u = u(t)$ дифференцируема в точке t_0, а ее производная в этой точке существует и вычисляется по формуле

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{8}$$

Если t совпадает с одним из аргументов, например с x, т. е. $u = f\left(x, y(x), z(x)\right)$, то полная производная функции f по x

$$\frac{df}{dx} = \frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}. \tag{9}$$

Если функции x, y, z зависят не от одного, а от нескольких переменных, например, от двух: $x = x(t, v)$, $y = y(t, v)$, $z = z(t, v)$, то, фиксируя сначала v, а потом t, на основании формулы (4) получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial v}. \end{cases} \tag{10}$$

Для сложной функции двух переменных $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, система упрощается:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}. \end{cases} \tag{11}$$

Пример 1. Найти производную $\dfrac{dz}{dt}$ сложной функции $z = xy^3$, где $x = \sqrt{t}$, $y = \cos t^2$.

Решение. $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} = y^3 \dfrac{1}{2\sqrt{t}} + 3xy^2\left(-2t\sin t^2\right).$

Выразим x и y через t, получим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\cos^3 t^2}{2\sqrt{t}} - 3\sqrt{t^3}\, 2\cos^2 t^2 \sin t^2 = \frac{\cos^3 t^2}{2\sqrt{t}} - 3\sqrt{t^3}\cos t^2 \sin 2t^2.$$

Пример 2. Найти производную $\dfrac{dz}{dx}$ сложной функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, где $y = e^{(1+x)^2}$.

Решение. Полная производная $\dfrac{dz}{dx}$ вычисляется по формуле (9):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dz}{dy} = \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\frac{1}{y} + \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)e^{(1+x)2}\, 2(1+x) =$$

$$= \frac{y}{y^2+x^2} - \frac{2x(1+x)e^{(1+x)^2}}{y^2+x^2}.$$

Пример 3. Найти производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции, заданной в виде $z = \left(x + x^2\right)\sin y$, где $x = u^2 + v^3$; $y = uv$.

Решение. В данном случае промежуточные переменные x и y являются дифференцируемыми функциями независимых переменных u и v, поэтому воспользуемся формулами (11)

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Находим частные производные от функции z по промежуточным переменным x и y, частные производные от функции x и y по независимым переменным u и v:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (1+2x)\sin y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(x + x^2\right)\cos y,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2u, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = 3v^2, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = v, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = u.$$

Тогда частные производные сложной функции

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (1+2x)\sin y 2u + \left(x + x^2\right)\cos y v =$$

$$= 2u\left(1 + 2u^2 + 2v^3\right)\sin(uv) + v\left[u^2 + v^3 + \left(u^2 + v^3\right)^2\right]\cos(uv);$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (1+2x)\sin y 3v^2 + \left(x + x^2\right)\cos y u =$$

$$= 3v^2\left(1 + 2u^2 + 2v^3\right)\sin(uv) + u\left[u^2 + v^3 + \left(u^2 + v^3\right)^2\right]\cos(uv).$$

Пример 4. Найти производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ от функции, заданной в виде $z = e^{u-2v}$, где $u = \cos x$; $v = 3x + y^2$.

Решение. Здесь, наоборот, промежуточные переменные u и v являются дифференцируемыми функциями независимых переменных x и y, поэтому формулы (11) следует записать в виде

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

По аналогии с решением примера 3 найдем частные производные от функции z по промежуточным переменным u и v, частные производные от функций u и v по независимым переменным x и y:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^{u-2v}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = -2e^{u-2v},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 3, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y.$$

Окончательно получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -e^{u-2v}\sin x - 2e^{u-2v}3 = -e^{u-2v}\left(\sin x + 6\right) =$$

$$= e^{\cos x - 6x - 2y^2}\left(\sin x + 6\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -e^{u-2v}0 - 2e^{u-2v}2y = -4ye^{u-2v} = -4ye^{\cos x - 6x - 2y^2}.$$

7. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема. Пусть уравнение $F\left(x_1, \ldots, x_n, y\right) = 0$ определяет неявно заданную функцию $y = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ и выполнены следующие условия:

1) сама функция F и ее частные производные непрерывны в окрестности точки $M\left(x_1, \ldots, x_n, y\right)$;

2) $F\left(M\right) = 0, \quad F'_y\left(M\right) \neq 0.$

Тогда функция $y = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ имеет в точке M все частные производные, которые находят по следующим формулам:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_y}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{F'_{x_2}}{F'_y}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_3} = -\frac{F'_{x_3}}{F'_y}.$$

Рассмотрим случай двух переменных. Дана $F\ (x, y, z) = 0$ и $z = f\,(x, y)$. Тогда при выполнении всех условий, изложенных выше,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{12}$$

Пример 1. Найти частные производные функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением $x^2 + y^2 - z^2 - xy + xz + 1 = 0$ в точке $M(1, 0, 2)$.

Решение. Обозначив левую часть этого уравнения через $F(x, y, z)$:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - xy + xz + 1,$$

найдем частные производные функции $F(x, y, z)$:

$$F'_x(x, y, z) = 2x - y + z, \quad F'_y(x, y, z) = 2y - x, \quad F'_z(x, y, z) = -2z + x.$$

Теперь по формулам (12) найдем частные производные неявной функции $z(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = -\frac{F'_x(M)}{F'_z(M)} = -\left.\frac{2x - y + z}{-2z + x}\right|_M = -\frac{2\cdot 1 - 0 + 2}{-2\cdot 2 + 1} = \frac{4}{3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M) = -\frac{F'_y(M)}{F'_z(M)} = -\left.\frac{2y - x}{-2z + x}\right|_M = \frac{2\cdot 0 - 1}{-2\cdot 2 + 1} = -\frac{1}{3}.$$

Пример 2. Функция z задана неявно уравнением $F\left(\frac{x}{z}; \frac{y}{z}\right) = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. Введем новые переменные u и v. Положим

$$u = \frac{x}{z}; \quad v = \frac{y}{z} \ \Rightarrow\ F(u; v) = 0.$$

Найдем частные производные, а затем используем формулы (12):

$$F'_x = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = F'_u\frac{1}{z}; \quad F'_y = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = F'_v\frac{1}{z};$$

$$F'_z = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = F'_u\left(-\frac{x}{z^2}\right) + F'_v\left(-\frac{y}{z^2}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F'_u\dfrac{1}{z}}{F'_u\dfrac{x}{z^2}+F'_v\dfrac{y}{z^2}}=\frac{zF'_u}{xF'_u+y\dot{F}_v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F'_v\dfrac{1}{z}}{F'_u\dfrac{x}{z^2}+F'_v\dfrac{y}{z^2}}=\frac{zF'_v}{xF'_u+y\dot{F}_v}.$$

Пример 3. Функция z задана неявно уравнением $F\left(\operatorname{arctg} xz;\ \sqrt[3]{x+y}\right)=0$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. Введем новые переменные u и v. Положим

$$u=\operatorname{arctg} xz;\quad v=\sqrt[3]{x+y}\ \Rightarrow F\left(u;v\right)=0;$$

$$F'_x=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=F'_u\frac{z}{1+\left(xz\right)^2}+F'_v\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x+y\right)^2}};$$

$$F'_y=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=F'_v\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x+y\right)^2}};$$

$$F'_z=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}=F'_u\frac{x}{1+\left(xz\right)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_u\dfrac{z}{1+\left(xz\right)^2}+F'_v\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(x+y\right)^2}}}{F'_u\dfrac{x}{1+\left(xz\right)^2}}=-\frac{z}{x}-\frac{F'_v\left(1+\left(xz\right)^2\right)}{F'_u\,x3\sqrt[3]{\left(x+y\right)^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_v\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(x+y\right)^2}}}{F'_u\dfrac{x}{1+\left(xz\right)^2}}=-\frac{F'_v\left(1+\left(xz\right)^2\right)}{F'_u\,x3\sqrt[3]{\left(x+y\right)^2}}.$$

Пример 4. Найти полный дифференциал функции $z(x, y)$, неявно заданной уравнением

$$xy^2 + y^{xz} + \cos\left(\frac{z}{y}\right) = 0.$$

Решение. Обозначив левую часть этого уравнения через $F(x; y; z)$, найдем частные производные функции $F(x; y; z)$:

$$F(x; y; z) = xy^2 + y^{xz} + \cos\left(\frac{z}{y}\right);$$

$$F'_x = y^2 + zy^{xz}\ln y;$$

$$F'_y = 2xy + xzy^{xz-1} - \sin\left(\frac{z}{y}\right)\left(-\frac{z}{y^2}\right);$$

$$F'_z = xy^{xz}\ln y - \sin\left(\frac{z}{y}\right)\frac{1}{y}.$$

Теперь по формулам (12) найдем частные производные неявной функции $z(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)} = -\frac{y^2 + zy^{xz}\ln y}{y^{xz}x\ln y - \frac{1}{y}\sin\left(\frac{z}{y}\right)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)} = -\frac{2xy + xzy^{xz-1} + \sin\left(\frac{z}{y}\right)\frac{z}{y^2}}{y^{xz}x\ln y - \frac{1}{y}\sin\left(\frac{z}{y}\right)}.$$

Полный дифференциал находим по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{y^2 + zy^{xz}\ln y}{y^{xz}x\ln y - \frac{1}{y}\sin\left(\frac{z}{y}\right)}dx -$$

$$-\frac{2xy + xzy^{xz-1} + \sin\left(\frac{z}{y}\right)\frac{z}{y^2}}{y^{xz}x\ln y - \frac{1}{y}\sin\left(\frac{z}{y}\right)}dy.$$

8. НАХОЖДЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ПОЛНОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛУ

Выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ называют *дифференциальной формой*.

Определение. Дифференциальная форма называется полным дифференциалом, если существует такая функция двух переменных $U(x, y)$, что

$$dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \tag{13}$$

Для того чтобы дифференциальная форма $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ была полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial Q}{\partial y} \equiv \frac{\partial P}{\partial x}. \tag{14}$$

Пусть дифференциальная форма является полным дифференциалом, тогда

$$dU = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \tag{15}$$

Функция $U(x, y)$ может быть найдена следующим образом.

1. Из (15) следует, что $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y)$. Интегрируем это выражение по x при фиксированном y ($y = \text{const}$):

$$U(x,y) \underset{y=\text{const}}{=} \int P(x,y)\,dx + \varphi(y). \qquad (16)$$

Поскольку мы интегрировали по переменной x при фиксированном y, произвольная постоянная $\varphi(y)$ будет функцией от y.

2. Неизвестная функция $\varphi(y)$ определяется из условия

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\,dx\right) + \varphi'_y(y) = Q(x,y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'_y(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\,dx\right).$$

Интегрируя это уравнение, получаем $\varphi(y) = \int \varphi'(y)\,dy + C$. Подставив $\varphi(y)$ в уравнение (16), получим функцию $U(x,y)$. Очевидно, что искомая функция определена с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Нам достаточно выбрать одну из функций полученного семейства, например, при $C = 0$.

Пример 1. Проверить, является ли данная дифференциальная форма $2x\cos^2 y\,dx + \left(2y - x^2\sin 2y\right)dy$ полным дифференциалом некоторой функции, если да, найти ее.

Решение. Убедимся в том, что заданная форма является полным дифференциалом:

$$P(x;y) = 2x\cos^2 y; \quad Q(x;y) = 2y - x^2\sin 2y;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x\cos^2 y\right) = 2x2\cos y(-\sin y) = -2x\sin 2y;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y - x^2\sin 2y\right) = -2x\sin 2y.$$

Условие (14) выполняется.

Найдем функцию $U(x;y)$, полный дифференциал которой $dU = U'_x\,dx + U'_y\,dy$ был бы равен левой части заданного уравнения. В нашем случае

$$U'_x = P(x;y) = 2x\cos^2 y, \quad U'_y = Q(x;y) = 2y - x^2\sin 2y.$$

Проинтегрируем первое соотношение по переменной x, считая y фиксированной. При этом постоянная интегрирования может зависеть от y, т. е. появляется неизвестная функция y:

$$U = \int\left(2x\cos^2 y\right)dx = x^2\cos^2 y + \varphi(y).$$

Дифференцируя это равенство по переменной y и подставляя во второе соотношение $U'_y = 2y - x^2\sin 2y$, найдем сначала $\varphi'(y)$, а затем и $\varphi(y)$:

$$\left(x^2\cos^2 y + \varphi(y)\right)'_y = 2y - x^2\sin 2y \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 2\cos y(-\sin y) + \varphi'(y) = 2y - x^2\sin 2y \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2\sin 2y + \varphi'(y) = 2y - x^2\sin 2y \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = 2y \;\Rightarrow\; \varphi(y) = y^2 + C_0,$$

где положим $C_0 = 0$.

Следовательно, искомая функция $U(x;y) = x^2\cos^2 y + y^2$.

9. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Касательной плоскостью к поверхности в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ называют плоскость, содержащую все касательные к кривым, проведенным на поверхности через точку M_0.

Нормалью к поверхности в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ называют прямую, проходящую через точку касания $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярную касательной плоскости.

Определение. Касательная плоскость к поверхности S в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — это плоскость, проходящая через точку M_0 и характеризующаяся тем свойством, что расстояние от этой плоскости до переменной точки M поверхности S при $M \to M_0$ является бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с расстоянием $|M_0M|$.

Если поверхность задана уравнением $F(x; y; z) = 0,$ т. е. является поверхностью уровня $(C = 0)$ функции трех переменных $F(x; y; z),$ проходящей через данную точку M_0, то из свойств градиента известно, что эта поверхность в точке перпендикулярна градиенту $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F(M_0),$ который будет нормальным вектором искомой касательной плоскости. Используя координаты нормального вектора и координаты точки, запишем уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ к поверхности:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}(y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}(z - z_0) = 0, \qquad (17)$$

где $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}, \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}$ — значения частных производных в точке M_0, т. е. числа; x, y, z — текущие координаты точки касательной плоскости.

Нормаль определяется уравнениями прямой, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F(M_0),$

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}}, \qquad (18)$$

где x, y, z — текущие координаты точки нормали.

Если уравнение поверхности задано в явном виде $z = f(x; y)$, то $F = f\left(x, y\right) - z = 0$, $\overline{\text{grad}F} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, -1\right)$ и уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (17) принимает вид

$$\left(z - z_0\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} \left(x - x_0\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} \left(y - y_0\right), \tag{19}$$

а уравнение нормали (18) —

$$\frac{x - x_0}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{20}$$

Замечание. В некоторых точках поверхности (они называются *особыми*) может не существовать касательной плоскости. В таких точках касательные могут не лежать в одной плоскости или их не существует. Например, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ — коническая поверхность. Вершина ее является особой точкой. Касательной плоскости к поверхности в этой точке не существует.

Пример 1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ в точке $M_0\left(1; 0; 0\right)$.

Решение. Уравнение поверхности задано в явном виде, поэтому следует воспользоваться формулами (19) и (20).

Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

и их значения в точке $M_0\left(1; 0; 0\right)$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} = 2 \cdot 1 = 2, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} = 0.$$

Подставляя в формулы (19) и (20) координаты точки M_0 и найденные значения частных производных в этой точке, получим уравнение касательной плоскости

$$2(x-1)+0(y-0)-1(z-0)=0 \;\Rightarrow\; 2x-z-2=0$$

и уравнение нормали к заданной поверхности

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-1}.$$

Пример 2. Найти уравнение такой нормали к поверхности

$$x^2-z^2-2x+4y+1=0,$$

которая параллельна прямой $\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ -3x-5y+5z+7=0. \end{cases}$

Решение. Прямая задана как линия пересечения двух плоскостей. Найдем ее направляющий вектор, как векторное произведение нормальных векторов этих плоскостей:

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 5 \end{vmatrix}=5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}.$$

В силу того, что прямая параллельна нормали, ее направляющий вектор $\vec{s}$ служит и направляющим вектором $\vec{n}$ нормали.

Пусть искомая нормаль проходит через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, принадлежащую поверхности $F(x;y;z)=x^2-z^2-2x+4y+1=0$. Вычислив значения частных производных в точке M_0

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}=(2x-2)\Big|_{M_0}=2x_0-2,\;\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}=4,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}=-2z\Big|_{M_0}=-2z_0,$$

найдем координаты направляющего вектора нормали $\vec{n}=$ $=\{2x_0-2;4;-2z_0\}$.

Так как вектор $\vec{n}$ коллинеарен вектору $\vec{s}$, то их соответствующие координаты пропорциональны, т. е.

$$\frac{2x_0 - 2}{5} = \frac{4}{-2} = \frac{-2z_0}{1},$$

отсюда находим $x_0 = -4,\ z_0 = 1$. Осталось определить ординату точки M_0. Так как точка M_0 принадлежит поверхности, ее координаты удовлетворяют уравнению поверхности $F(x; y; z) = 0$. Подставляя $x_0 = -4,\ z_0 = 1$ в уравнение поверхности, найдем $16 - 1 + 8 + 4y_0 + 1 = 0 \Rightarrow 4y_0 = -24 \Rightarrow y_0 = -6$.

Таким образом, $M_0(-4; -6; 1)$.

Используя координаты направляющего вектора нормали $\vec{s}$ и точки M_0, запишем канонические уравнения искомой нормали:

$$\frac{x+4}{5} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

Пример 3. Составить уравнение такой касательной плоскости к эллипсоиду $x^2 + 2y^2 + z^2 = 10$, которая параллельна плоскости $x - y + z = 1$.

Решение. Запишем уравнение заданной поверхности в виде

$$F(x; y; z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 10 = 0.$$

Частные производные от функции $F(x; y; z)$ по переменным x, y, z

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z.$$

Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка касания, в которой касательная плоскость параллельна плоскости $x - y + z = 1$. Найдем значения производных в этой точке: $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0} = 2x_0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0} = 4y_0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0} = 2z_0$.

Получим нормальный вектор касательной плоскости, который будет коллинеарен нормальному вектору данной плоскости (1, –1, 1), отсюда

$$\frac{2x_0}{1} = \frac{4y_0}{-1} = \frac{2z_0}{1} \Rightarrow x_0 = -2y_0, \quad z_0 = -2y_0.$$

Так как точка M_0 лежит на эллипсоиде $x^2 + 2y^2 + z^2 = 10,$ то ее координаты удовлетворяют уравнению этой поверхности. Подставляя сюда $x_0 = -2y_0$ и $z_0 = -2y_0$, найдем y_0:

$$\left(-2y_0\right)^2 + 2y_0^2 + \left(-2y_0\right)^2 = 10 \Rightarrow 10y_0^2 = 10 \Rightarrow y_0 = \pm 1,$$

отсюда $x_0 = \mp 2, \ \ z_0 = \mp 2.$

Таким образом, существуют две точки $M_{01}\left(2; -1; 2\right)$ и $M_{02}(-2;\ 1;\ -2)$, через которые могут быть проведены касательные плоскости, параллельные плоскости $x - y + z = 1$. Используя координаты нормального вектора данной плоскости (1, –1, 1) и координаты точек M_{01} и M_{02}, запишем уравнения обеих касательных плоскостей:

$$1\left(x-2\right) + \left(-1\right)\left(y+1\right) + 1\left(z-2\right) = 0 \Rightarrow x - y + z - 5 = 0,$$

$$1\left(x+2\right) + \left(-1\right)\left(y-1\right) + 1\left(z+2\right) = 0 \Rightarrow x - y + z + 5 = 0.$$

10. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $f = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ — функция n переменных, определенная на множестве $D \subseteq R^n$, а M_0 — внутренняя точка множества D.

Определение. Точка M_0 называется точкой *локального максимума* (*минимума*) функции f, если существует такая проколотая окрестность этой точки, что для любой точки $M\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(M_0) \geq f(M)$ $\left(f(M_0) \leq f(M)\right)$. Причем равенство возможно только в случае $M = M_0$. Точки локального максимума и минимума функции называют точками локального экстремума функции.

Теорема (необходимые условия экстремума ФНП). Пусть функция $y = f\left(x\right)$ имеет локальный экстремум в точке x^0. Тогда если существуют частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(i = \overline{1, n}\right)$ в точке x^0, то они все обращаются в нуль в этой точке: $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right) = 0 \quad \left(i = \overline{1, n}\right)$.

Напомним, что второй дифференциал функции $y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ представляет собой квадратичную форму от дифференциалов независимых переменных с матрицей Гессе

$$d^2 y = d^2 f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i\, dx_j.$$

Точки, в которых все частные производные первого порядка равны нулю, называют *стационарными.*

Теорема (достаточное условие локального экстремума ФНП). Пусть функция $y = f\left(x\right)$ имеет в n-мерной области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ все непрерывные частные производные до второго порядка включительно. И пусть $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ — стационарная точка этой функции. Тогда если квадратичная форма, определяемая матрицей Гессе данной функции, в стационарной точке x^0 является знакоопределенной, то функция в ней имеет экстремум: максимум, если $d^2 y\left(x^0\right) < 0$, и минимум, если $d^2 y\left(x^0\right) > 0$.

В случае функции $u = f(x; y; z)$ *трех независимых переменных* введем следующие обозначения частных производных в стационарной точке M_0 :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{M_0} = a_{11}; \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{M_0} = a_{22}; \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{M_0} = a_{33};$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{M_0} = a_{12} = a_{21};$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)_{M_0} = a_{13} = a_{31}; \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)_{M_0} = a_{23} = a_{32};$$

$$\Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Достаточные условия наличия экстремума в стационарной точке для функции $u = f(x;\ y;\ z)$ трех независимых переменных можно сформулировать следующим образом.

Пусть M_0 — стационарная точка функции $u = f(x;\ y;\ z)$. Тогда

$$G = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{M_0} & \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} & \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right|_{M_0} \\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} & \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_0} & \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right|_{M_0} \\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right|_{M_0} & \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right|_{M_0} & \left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{M_0} \end{pmatrix}$$

— матрица, составленная из вторых частных производных функции в точке M_0.

Если все угловые (главные) миноры[1] матрицы G положительны:

$$\Delta_1 > 0; \quad \Delta_2 > 0; \quad \Delta_3 > 0, \tag{21}$$

то в точке M_0 — минимум (локальный).

---

[1] Угловым минором порядка k квадратной матрицы называют минор, образованный ее первыми k строками и первыми k столбцами. Эти миноры часто называют главными.

Если знаки угловых миноров матрицы чередуются, причем первый минор отрицательный:

$$\Delta_1 < 0; \quad \Delta_2 > 0; \quad \Delta_3 < 0, \tag{22}$$

то в точке M_0 — максимум (локальный).

Достаточные условия отсутствия экстремума в стационарной точке функции *n* переменных. Функция n переменных не имеет экстремума в стационарной точке, когда для матрицы Гесса, составленной из вторых частных производных функции в этой точке выполнено хотя бы одно из условий:

а) один из главных миноров четного порядка — отрицательный;

б) два угловых минора нечетного порядка имеют разные знаки.

В случае функции двух переменных достаточные условия экстремума формулируются следующим образом. Пусть $M_0(x_0; y_0)$ — стационарная точка функции $z = f(x; y)$, причем эта функция дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0 и все ее вторые частные производные непрерывны в точке M_0. Исследуем ее по знаку определителя, составленного из вторых частных производных функции $z = f(x; y)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} & \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} \\ \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} & \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2,$$

где $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = A$; $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = B$; $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = C$.

Если $\Delta > 0$, то функция $f(x; y)$ имеет в точке M_0 экстремум: *минимум* при $A > 0$ ($C > 0$) и *максимум* при $A < 0$ ($C < 0$).

Если $\Delta < 0$, то в точке M_0 *экстремума нет.*

Если $\Delta = 0$, то для решения вопроса о наличии или отсутствии экстремума в точке M_0 требуется дальнейшее исследование, например, по знаку приращения функции Δf вблизи этой точки.

Пример 1. Найти экстремум функции двух переменных

$$z = 2x^3 + y^3 - 6x - 12y + 3.$$

Решение. Находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 6, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 12.$$

Приравняем их нулю и получим систему для определения стационарных точек:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6 = 0, \\ 3y^2 - 12 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = \pm 2. \end{cases}$$

Таким образом, заданная функция имеет четыре стационарные точки:

$$M_1(1; 2), \ M_2(-1; -2), \ M_3(-1; 2), \ M_4(1; -2).$$

Далее исследуем стационарные точки M_1, M_2, M_3 и M_4 по знаку определителя Δ, составленного из частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A = 12x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B = 0.$$

Для точки M_1 получим

$$A = 12x\Big|_{x=1} = 6; \quad C = 6y\Big|_{y=2} = 12; \quad B = 0;$$

$$\Delta = AC - B^2 = 72 > 0.$$

Так как $\Delta > 0$, то в точке M_1 находится экстремум, а поскольку $A = 6 > 0$, то M_1 — точка минимума.

Для точки M_2 имеем

$$A = 12x\Big|_{x=-1} = -6; \quad C = 6y\Big|_{y=-2} = -12; \quad B = 0;$$

$$\Delta = AC - B^2 = (-6)(-12) - 0 = 72 > 0.$$

В точке M_2 также $\Delta > 0$, т. е. расположен экстремум. Здесь $A = -6 < 0$, поэтому M_2 — точка максимума.

Для точки M_3 имеем

$$A = 12x\Big|_{x=-1} = -6;\ \ C = 6y\Big|_{y=2} = 12;\ \ \ B = 0;$$

$$\Delta = AC - B^2 = (-6)\cdot 12 - 0 = -72 < 0.$$

Так как $\Delta < 0$, то экстремума нет.

Для точки M_4 имеем

$$A = 12x\Big|_{x=1} = 6;\ \ \ C = 6y\Big|_{y=-2} = -12;\ \ \ B = 0;$$

$$\Delta = AC - B^2 = 6\cdot(-12) - 0 = -72 < 0.$$

Так как $\Delta < 0$, то экстремума нет.

Теперь вычислим значения функции $z = 2x^3 + y^3 - 6x - 12y + 3$ в точках экстремума $M_1(1;2)$ и $M_2(-1;-2)$. В результате получим

$$z_{\max} = z(M_2) = z(-1;-2) = 2(-1)^3 + (-2)^3 - 6(-1) - 12(-2) + 3 = 23;$$

$$z_{\min} = z(M_1) = z(1;2) = 2\cdot(1)^3 + (2)^3 - 6\cdot 1 - 12\cdot 2 + 3 = -17.$$

Пример 2. Найти экстремум функции трех переменных

$$u = z^3 + 3x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 27z + 12.$$

Решение. Находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x - 2y - 8;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 2x;\quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - 27.$$

Приравняем их нулю и получим систему для определения стационарных точек

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 2y - 8 = 0 \\ 2y - 2x = 0 \\ 3z^2 - 27 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 2, \\ z = \pm 3. \end{cases}$$

Таким образом, заданная функция имеет две стационарные точки:

$$M_1(2; 2; 3) \qquad M_2(2; 2; -3).$$

Исследуем на экстремум первую стационарную точку $M_1(2; 2; 3)$, воспользовавшись достаточными условиями экстремума. Для этого вычислим частные производные второго порядка в точке M_1:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{M_1} = 6; \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{M_1} = 2; \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_{M_1} = 6z\Big|_{M_1} = 18;$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{M_1} = -2, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)_{M_1} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)_{M_1} = 0.$$

Значения этих частных производных в точке M_1 являются коэффициентами $d^2u(M_1)$ квадратичной формы от переменных dx, dy, dz.

Матрица этой квадратичной формы имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Ее главные миноры

$$\Delta_1 = 6 > 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 144 > 0.$$

Согласно критерию Сильвестра, $d^2u\big|_{M_1}$ — положительно определенная квадратичная форма от переменных $dx, dy, dz.$ Следовательно, в точке M_1 функция имеет локальный минимум (см. достаточные условия (21)). Вычислим этот минимум:

$$u_{\min} = 27 + 12 + 4 - 8 - 16 - 81 + 12 = 55 - 105 = -50.$$

Исследуем на экстремум вторую стационарную точку $M_2(2; 2; -3)$.

Матрица квадратичной формы $d^2u(M_2)$ имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}.$$

Ее главные миноры

$$\Delta_1 = 6 > 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} = -144 < 0.$$

Знакочередование главных миноров отлично от (21) и (22), значит, в точке M_2 функция не имеет локального экстремума, т. е. $d^2u\big|_{M_2}$ не является знакоопределенной квадратичной формой от $dx, dy, dz.$ Нетрудно видеть, что эта квадратичная форма — знакопеременная. В самом деле, если положить $dx \neq 0,\ dy = dz = 0,$ то получим $d^2u\big|_{M_2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_2)\,dx^2 =$

$= 6dx^2 > 0$, а если положить $dx = dy = 0$, $dz \neq 0$, то получим $d^2u\Big|_{M_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(M_2)dz^2 = -18dz^2 < 0$. Следовательно, в точке M_2 функция не имеет локального экстремума.

11. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Задача 1. С помощью линий уровня найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)$ в области определения функции $g(x,y)$.

№ вар.	$f(x,y)$	$g(x,y)$
1	$\frac{x^2+y^2}{x}$	$\sqrt{1-(x-3)^2-y^2}$
2	x^2-y^2	$\sqrt{4-x^2-4y^2}$
3	$\lvert x\rvert - y$	$\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{1-x^2-2y-y^2}$
4	ye^{-x}	$\sqrt{1-x^2-y^2-\lvert 2xy\rvert}$
5	x^2-4y^2	$\sqrt{4-x^2-y^2}$
6	xy	$\arcsin(x-y)+\arccos(x-1)$
7	$(x-2)^2+(y+1)^2$	$\arcsin(x-y)+\arccos x$
8	$\frac{x}{x^2+y^2}$	$\sqrt{1-\lvert x^2+y^2-2\rvert}$
9	$x+y$	$\arcsin(x-y)+\arccos(x-1)$
10	$y-\ln x$	$\arcsin y+\arccos(x-2)$
11	$x+\lvert y\rvert$	$\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{1-x^2+2x-y^2}$
12	$y-e^x$	$\sqrt{2-x^2-y^2-\lvert x^2-y^2\rvert}$

№ вар.	$f(x,y)$	$g(x,y)$
13	$(x+2)^2+4y^2$	$\sqrt{2-x^2-y^2-\lvert x^2-y^2\rvert}$
14	$\dfrac{y-2}{x+3}$	$\sqrt{1-x^2+y^2}+\arcsin y$
15	$y+x^2$	$\sqrt{8-x^2-4y^2-\lvert x^2-4y^2\rvert}$
16	$\dfrac{x^2+y^2}{y}$	$\sqrt{1-x^2-(y-3)^2}$
17	y^2-x^2	$\sqrt{4-4x^2-y^2}$
18	$x-\lvert y\rvert$	$\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{1-x^2-2x-y^2}$
19	ye^x	$\sqrt{1-x^2-y^2-\lvert 2xy\rvert}$
20	$4x^2-y^2$	$\sqrt{4-x^2-y^2}$
21	$x^2-(y-1)^2$	$\arcsin(x-y)+\arccos x$
22	$(x-2)^2+y^2$	$\arcsin(x-y)+\arccos y$
23	$\dfrac{y}{x^2+y^2}$	$\sqrt{1-\lvert x^2+y^2-2\rvert}$
24	$y-x$	$\arcsin(x+y)+\arccos(x-1)$
25	$y+\ln x$	$\arccos y+\arcsin(x-2)$
26	$\lvert x\rvert+y$	$\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{1-x^2+2y-y^2}$
27	$y+e^x$	$\sqrt{2-x^2-y^2-\lvert x^2-y^2\rvert}$
28	$4x^2+(y+2)^2$	$\sqrt{2-x^2-y^2-\lvert x^2-y^2\rvert}$
29	$\dfrac{y+3}{x+2}$	$\sqrt{1+x^2-y^2}+\arcsin x$
30	$x+y^2$	$\sqrt{8-4x^2-y^2-\lvert 4x^2-y^2\rvert}$

Задача 2. Для заданной функции неявно найти dz в вар. № 1—15; $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ в вар. № 16—30.

№ вар.	Найти dz	№ вар.	Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$
1	$x+y+z=e^{zx}$	16	$F\left(\frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right)=0$
2	$x^2e^{2y}-z^2e^{2x}+y^2e^{2z}=0$	17	$F\left(xz, e^{yz}\right)=0$
3	$x+yz-2z^2+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=0$	18	$F\left(x+y+z, 2x^2-3y^2+4z^2\right)=0$
4	$z-2\ln(x+y+z)=0$	19	$F\left(4x^2-3y, z^2+x\right)=0$
5	$y^3=ze^{x+z}$	20	$F(xy, yz, zx)=0$
6	$\frac{xy}{z}+y\ln(x+z)=0$	21	$x^2+z^3+f(x-y)=0$
7	$5x^3-2z^2+xy-zy+10y-8=0$	22	$F(\sin xy, \cos zx)=0$
8	$\operatorname{tg}(xz)+\sin(yx)+\operatorname{ctg}(yz)=0$	23	$F(\ln x, \ln y, \ln z)=0$
9	$3\cos(5x+3y-8z)=5x+3y-8z$	24	$F\left(\ln xy, e^{zx}\right)=0$
10	$5x^3y+3z^2y+7xyz-2x^2z+4=0$	25	$F\left(e^{xy}, \sqrt{x^2-z^2}\right)=0$
11	$\operatorname{arctg}\frac{3x}{yz}=zxy$	26	$F\left(zx, \ln\left(x^2+y^2\right)\right)=0$
12	$x^2+3yz+\operatorname{arctg}(xy)+z^2x=0$	27	$F\left(x^2+y^3, \ln(2x-3y)\right)=0$
13	$e^{xy}+z^2-3xyz=0$	28	$F\left(\operatorname{arctg}(xz), \sqrt{x+y}\right)=0$
14	$xy+zy-\ln(xz+5y)=0$	29	$F\left(z^2+xy, \frac{x}{x+y}\right)=0$
15	$ze^x+ye^z=xe^y$	30	$F\left(z, \ln\frac{y}{x}\right)=0$

Задача 3. Найти дифференциал второго порядка для функции трех переменных $f\left(x, y, z\right)$ в точке M_1 и дифференциал третьего порядка для функции двух переменных $g\left(x, y\right)$ в точке M_2.

№ вар.	$f(x, y, z)$	M_1	$g(x, y)$	M_2
1	$x^2\left(\cos 2y + 3\ln z\right) + 1$	$\left(2; \frac{\pi}{2}; 1\right)$	$\sin(3x+2y) + x^{1/3} y^8$	$\left(\frac{\pi}{9}; 0\right)$
2	$x^3 \cos z + y^2 \ln x - 2$	$\left(1; \frac{1}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$	$y^2 \ln x - 2x^2 y^{1/2}$	$(1; 4)$
3	$\operatorname{arctg} x \ln y + \sqrt{3 - z^2}\, x + 4$	$(0; e; 1)$	$e^{2x-4y} + 3x^5 y^{-1/3}$	$\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{8}\right)$
4	$\sqrt[4]{xy} - x \sin y \cos z - 6$	$\left(1; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$	$\cos(5y - 2x) - 3\sqrt{y^3 x^5}$	$(1; 4)$
5	$\ln\left(z^2 + y\right) - \cos x \sin y + 5$	$\left(\frac{\pi}{2}; 0; \sqrt{2}\right)$	$y \sin^2 x - \sqrt[3]{xy^2}$	$\left(\frac{\pi}{3}; -1\right)$
6	$e^{2xyz} + \operatorname{tg} x \cos y + 5$	$\left(\pi; \frac{\pi}{2}; 1\right)$	$\sin 2y \cos x + xy^6$	$\left(-\frac{\pi}{3}; 1\right)$
7	$\sqrt{xz}\, y^2 + \ln\left(1 - z^3\right) - 4$	$\left(1; -1; \frac{1}{2}\right)$	$x^3 y^{1/3} - 3e^{y-3x}$	$\left(\frac{1}{3}; 1\right)$
8	$\sin(xy) + x^2 y^3 z^4 + 6$	$\left(\frac{\pi}{2}; 1; -1\right)$	$2y^{1/3} x^{1/4} - 3x^2 \ln y$	$(1; e)$
9	$z^3\left(\operatorname{tg} 3x - \ln y\right) - 7$	$(\pi; 2; -1)$	$y^{-1/2} x^{1/2} - x^4 \sin^2 y$	$\left(\frac{1}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$
10	$\cos\frac{y}{x} + \ln x e^z + 13$	$\left(-1; \frac{\pi}{3}; 0\right)$	$\sin y \cos 3x - 6x^{-2} y - y^{-3}$	$(\pi; -\pi)$
11	$zx^4 - e^{yz} x - 5$	$\left(-2; 2; \frac{1}{2}\right)$	$\ln(x + y) - x^3 y^{-2}$	$(2; -1)$
12	$y \sin x \operatorname{tg} z - \sqrt[3]{xz} - 4$	$\left(-\frac{\pi}{4}; 2; \frac{\pi}{4}\right)$	$2^{x-3y} + x^{-3} y^{-1/4}$	$\left(2; \frac{2}{3}\right)$
13	$\cos z \ln y - \ln\left(y - x^2\right) + 3$	$\left(1; 3; \frac{\pi}{3}\right)$	$x^{-3} y^2 - e^{x-5y}$	$\left(1; \frac{1}{5}\right)$

№ вар.	$f(x,y,z)$	M_1	$g(x,y)$	M_2
14	$\arcsin(x+1)y - xy^{1/3}z^4$	$\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{8}; 2\right)$	$\ln\frac{y}{x} - 2x^4y^{-1/4}$	$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$
15	$\sin\frac{1}{x} + e^{xyz} - 6$	$\left(\frac{1}{\pi}; -\frac{1}{2}; 1\right)$	$y^2\cos x - \ln\left(\frac{y^3}{x^3}\right)$	$(\pi; 1)$
16	$\ln\left(3 - x^3\right) - 6xy\cos z - 2$	$(1; -2; \pi)$	$\cos 4x \sin 2y - 4x^{1/2}y^{1/3}$	$\left(\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$
17	$\operatorname{arctg} z \ln x - y\sqrt{2 - x^2} + 1$	$\left(1; -2; \sqrt{3}\right)$	$y^4x^{-1/2} - \ln(y - x)^2$	$(1; 2)$
18	$y^2\log_2 x - x\operatorname{ctg} z - 3$	$\left(\frac{1}{2}; -2; \frac{\pi}{4}\right)$	$\ln(x - y)^2 - y^{1/3}\sin 3x$	$\left(1; \frac{1}{2}\right)$
19	$y\arccos x + x^2y\ln z + 4$	$\left(-\frac{1}{2}; 2; e\right)$	$2\ln\frac{y}{x} - 3x^{1/5}y^{-2}$	$\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$
20	$\sin\left(x^2 + z\right) + e^{yx} - 2$	$\left(\sqrt{\pi}; -\sqrt{\pi}; 0\right)$	$\cos(2y - 5x) + \frac{1}{3}y^{-3}x^{1/4}$	$(2; 1)$
21	$x^{1/3}yz^3 + \cos xe^{yz} + 2$	$\left(-\pi; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$	$y^2\sin^2 y - \frac{1}{2}x^{-1}y^{3/2}$	$(-1; \pi)$
22	$z\arcsin x - y^2\sin z - 5$	$\left(0; -\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$6x^2y^3 - \ln\left(\frac{y}{x}\right)^2$	$\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$
23	$3x^2y^4z - \ln\left(1 + z^2\right) - 2$	$\left(-\frac{1}{2}; 2; e\right)$	$3^{x-2y} - 2x^{-2}y^{1/3}$	$\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$
24	$e^{2z} - \sin x\cos y\sin z - 4$	$\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$	$\sin 2x\cos y / 2 - y^3\ln x$	$(1; -\pi)$
25	$e^{yz} - 2\cos\frac{1}{x} + 7$	$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}; \frac{1}{3}; 3\right)$	$y^{\frac{1}{3}}\cos^2 x - \frac{1}{2}x^{-1}y^{3/2}$	$(\pi; 2)$
26	$z\log_3 x + y^{1/2}zx + 6$	$\left(3; 4; \frac{1}{2}\right)$	$x^{-2}y^{1/3} - 2^{y-3x}$	$\left(\frac{1}{3}; 1\right)$
27	$z\sin\left(x^2 - 1\right) + zx^2e^y + 8$	$\left(1; 0; -\frac{1}{2}\right)$	$2y\sin x - \ln\left(\frac{y}{x}\right)^3$	$\left(\frac{\pi}{3}; 1\right)$

№ вар.	$f(x, y, z)$	M_1	$g(x, y)$	M_2
28	$\dfrac{xy}{z^2} + \ln\left(z^2 - 5\right) - 9$	$(-3; 1; 3)$	$e^{3y-x} - xy^{-3}$	$\left(2; \dfrac{2}{3}\right)$
29	$\dfrac{\sin z}{y} + zx\cos y - 6$	$\left(1; \dfrac{\pi}{4}; \pi\right)$	$x^{-2}\cos^2 y - 3x^{-4}y^{-3}$	$\left(-1; \dfrac{\pi}{3}\right)$
30	$\cos x \sin y\left(z^3 - 3\right) + 2$	$\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}; -1\right)$	$x^{1/3}\ln y^{3/2} - 2x^{-2}y^{3/2}$	$\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$

Задача 4. Показать, что функция $z = z(x, y)$ удовлетворяет данному дифференциальному уравнению; f — произвольная дифференцируемая функция.

№ вар.	Дифференциальное уравнение	Функция $z = z(x, y)$
1	$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f(y/x)$
2	$3\sqrt{y}\dfrac{\partial z}{\partial x} - 4x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(x^2 + y^{3/2}\right)$
3	$e^{-x}\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(e^x + \ln y\right)$
4	$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(\dfrac{e^y}{x}\right)$
5	$\dfrac{\partial z}{\partial x} - (y\ln y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(e^x \ln y\right)$
6	$\dfrac{\partial z}{\partial x} - 3yx^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(x^3 + \ln y\right)$
7	$e^y\dfrac{\partial z}{\partial x} - 3x^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(x^3 + e^y\right)$
8	$(x\operatorname{tg} y)\dfrac{\partial z}{\partial x} + 3\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(x^3 \cos y\right)$
9	$x\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2(y\ln y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(x^2 \ln y\right)$

№ вар.	Дифференциальное уравнение	Функция $z = z(x, y)$
10	$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f(xy)$
11	$2x\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(\sqrt{x}e^{y}\right)$
12	$\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(\frac{e^{x}}{y}\right)$
13	$2x\frac{\partial z}{\partial x} - (\sin 2y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f(x\,\mathrm{tg}y)$
14	$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(\frac{y}{x^2}\right)$
15	$2x\frac{\partial z}{\partial x} - (y\ln y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(\sqrt{x}\ln y\right)$
16	$3xy^2\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(\ln x + y^3\right)$
17	$\frac{\partial z}{\partial x} + 6x^2\sqrt{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(\sqrt{y} - x^3\right)$
18	$2e^{y}\frac{\partial z}{\partial x} - 3\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z=f\left(x^{3/2}+e^{y}\right)$
19	$(\cos y)\frac{\partial z}{\partial x} - (\cos x)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f(\sin x + \sin y)$
20	$\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(\sqrt{y} - \sqrt{x}\right)$
21	$2\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(\sqrt{x} + \ln y\right)$
22	$4\sqrt{x}y\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(y^2 - \sqrt{x}\right)$
23	$x\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(x^3e^{y}\right)$
24	$2(x\,\mathrm{tg}\,y)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(\sqrt{x}\cos y\right)$

№ вар.	Дифференциальное уравнение	Функция $z = z(x, y)$
25	$\frac{\partial z}{\partial x} - e^{x-y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(e^x + e^y\right)$
26	$2e^y\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(\sqrt{x} + e^y\right)$
27	$\frac{\partial z}{\partial x} - \left(\cos^2 y\right)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(x + \operatorname{tg} y\right)$
28	$2x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(xy^2\right)$
29	$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(\ln x + \ln y\right)$
30	$2y^2\frac{\partial z}{\partial x} - \sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$z = f\left(x^{\frac{3}{2}} + y^3\right)$

Задача 5. Проверить, является ли данная дифференциальная форма полным дифференциалом некоторой функции, если да, найти ее.

№ вар.	Дифференциальная форма
1	а) $\frac{xy}{\sqrt{x^2+1}}dx - \left(2ye^{-y^2} - \sqrt{x^2+1}\right)dy$ б) $\left(x^2 + x\right)\cos y dx + yxdx$
2	а) $2xydx - \left(ye^{-y} - x^2 - e^{-y}\right)dy$ б) $\left(x + \sqrt{x}\right)e^y dx - x\left(y^2 + \sqrt{x}\right)dy$
3	а) $\cos\left(y^2 + x\right)dx + \sin\left(x + y\right)dy$ б) $4x^3\left(1 + y^{\frac{1}{5}}\right)dx - \left(2y\cos y^2 - \frac{1}{5}y^{-\frac{4}{5}}x^4\right)dy$
4	а) $7x^6\left(1 + \cos^2 y\right)dx - \left(x^7\sin 2y - 2y\right)dy$ б) $\left(x^5 + y\right)\ln y dx + \left(x + y^2\right)ydy$

№ вар.	Дифференциальная форма
5	а) $e^{y^2}xdx+\left(x^2+\sqrt{y}\right)ydy$ б) $\sqrt{\cos y}dx-\left(\dfrac{x\sin y}{2\sqrt{\cos y}}-\dfrac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\right)dy$
6	а) $\sqrt{x}e^{y^2}dx+2xy^5e^ydy$ б) $\left(2x+\cos^2 y\right)dx-\left(x\sin 2y-\dfrac{1}{y}\right)dy$
7	а) $\left(2x\sqrt{y}+\cos(2x+1)\right)dx+x^2\left(\sqrt{y}+1\right)dy$ б) $\mathrm{ctg}ydx-\left(\dfrac{x}{\sin^2 y}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sin^2 y}-\dfrac{\mathrm{ctg}y}{2\sqrt{y}}\right)dy$
8	а) $\left(\cos^2 x-\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)\sin 2x\right)dx-\left(\dfrac{\cos^2 x}{2y\sqrt{y}}+\dfrac{1}{y^2}\right)dy$ б) $\ln\left\|x+\sqrt{y^2+1}\right\|dx+\cos\left(x^2+y\right)dy$
9	а) $\left(x^3+y\right)\cos xdx+x\sqrt{y^2+1}\,dy$ б) $\left(\dfrac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}}\sqrt{y}+\cos x\right)dx-\left(\dfrac{\cos y}{\sin^2 y}-\dfrac{x^{\frac{1}{7}}}{2\sqrt{y}}\right)dy$
10	а) $\left(6x^2\cos y+\sin y^2\right)dx-\left(2x^3\sin y-2yx\cos y^2-1\right)dy$ б) $y\sqrt{x^2+1}dx+e^{-y^2}xdy$
11	а) $\left(x^2+e^{-y^2}\right)ydx+\left(\dfrac{1}{3}x^3y+ye^{-y^2}x\right)dy$ б) $\dfrac{y^2}{x^2}\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{y}{x}\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{y^2}\right)dy$

№ вар.	Дифференциальная форма
12	а) $x^5\left(1+y^{\frac{1}{3}}\right)dx+\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\left(x^6+1\right)dy$ б) $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dx-\left(\frac{2y}{\left(1+y^2\right)^2}-\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy$
13	а) $\frac{e^x y}{\cos^2\left(y\,e^x\right)}dx-\left(\frac{2y}{\sin^2 y}-\frac{e^x}{\cos^2\left(y\,e^x\right)}\right)dy$ б) $x^7\left(1+\cos^2 y\right)dx+\cos xy^2dy$
14	а) $\left(2xye^{x^2}+y^2\right)dx-\left(y\left(1+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}-e^{x^2}-2xy\right)dy$ б) $x\sqrt{\cos y}dx+\frac{1}{2\sqrt{\cos y}}x^2dy$
15	а) $\left(\cos^2 y+x\right)xdx+\frac{1}{y}x^2dy$ б) $2x\sqrt{y^2+1}dx-\left(\frac{\sin\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}-\frac{x^2y}{\sqrt{y^2+1}}\right)dy$
16	а) $\frac{3x^2y^2}{2\sqrt{x^3+y}}\,dx-\left(\frac{1}{y^2}\cos\frac{1}{y}-\frac{y^2}{2\sqrt{x^3+y}}-2y\sqrt{x^3+y}\right)dy$ б) $\left(x+\sqrt{y}\right)\mathrm{tg}y\,dx+\left(2y+x^2\right)dy$
17	а) $\left(x+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\cos x^2dx+x\ln y\,dy$ б) $-3x^5\left(x^6+1\right)^{-\frac{3}{2}}\cos y\,dx-\left(\frac{\sin y}{\sqrt{x^6+1}}-\cos y\right)dy$

№ вар.	Дифференциальная форма
18	а) $\left(x^{\frac{1}{7}}\sqrt{y}+\cos(x)\right)dx+y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{7}}dy$ б) $\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}e^{y}dx-\left(-e^{y}\sqrt[3]{x+1}+\frac{1}{y\ln^{2}\lvert y\rvert}\right)dy$
19	а) $\left(2x^{3}y+y^{2}x\right)dx+\left(y^{3}+x\right)xdy$ б) $2(x+1)\sqrt[3]{y+1}dx-\left(\frac{1}{2\sqrt{1-y}}-\frac{(x+1)^{2}}{3(y+1)^{2/3}}\right)dy$
20	а) $\frac{2\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}{3\sqrt[3]{x^{2}}}ydx-\left(\frac{\cos y}{\sin^{2}y}-\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^{2}\right)dy$ б) $\sin(xy)\,ydx-\frac{x}{y}dy$
21	а) $\sqrt{x^{2}+y^{2}}dx+\frac{1}{2\sqrt{x^{2}+y^{2}}}ydy$ б) $(2x+1)\cos y\ dx-\left(\left(x^{2}+x\right)\sin y+\frac{1}{y\left(1+\ln\lvert y\rvert\right)^{2}}\right)dy$
22	а) $\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{-y^{2}}dx-\left(2y\left(x+\sqrt{x}\right)e^{-y^{2}}+\frac{1}{2\sqrt{y}\left(1+\sqrt{y}\right)^{2}}\right)dy$ б) $\operatorname{tg}\left(ye^{x}\right)dx+x^{2}ydy$
23	а) $\cos\left(y^{2}+x\right)dx-\left(e^{\frac{1}{y}}\frac{1}{y^{2}}-\cos\left(y^{2}+x\right)2y\right)dy$ б) $\left(ye^{x^{2}}+y^{2}x\right)dx+y\sqrt{x}\ dy$

№ вар.	Дифференциальная форма
24	а) $x^7 \operatorname{tg}\sqrt[3]{y}dx + \frac{1}{\cos^2 \sqrt[3]{y}} x^8 dy$ б) $5x^4 \ln y dx - \left(\frac{1}{2y(\ln y)^{\frac{3}{2}}} - \ln y - 1 \right) dy$
25	а) $\frac{x}{\sqrt{2x+3}} e^{y^2} dx - \left(\frac{1}{(2y+1)^{\frac{3}{2}}} - 2ye^{y^2}\sqrt{2x+3} \right) dy$ б) $x^2\sqrt{y^2+1}dx + \sin\left(x^2+\sqrt{y}\right)dy$
26	а) $y^2\sqrt{x^3+y}\ dx + \sin\left(5x+y^2\right)dy$ б) $2e^y y^5 dx - \left(\frac{3y^2}{\left(1+y^3\right)^2} - 2xy^5e^y - 10xy^4e^y \right) dy$
27	а) $\left(2\sqrt{2y+1} + 2\cos(2x+1)\right)dx - \left(\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}} - \frac{2x}{\sqrt{2y+1}} \right) dy$ б) $\frac{\cos y dy}{\sqrt{x^6+1}} + \sin y\sqrt{x^6+1}dy$
28	а) $\frac{1}{x+\sqrt{y^2+1}} dx - \left(\sin y - \frac{y}{\left(x+\sqrt{y^2+1}\right)\sqrt{y^2+1}} \right) dy$ б) $\sqrt[3]{x+1}e^y dy + 3y(x+1)^{\frac{4}{3}}\ dy$
29	а) $(x+1)^2\sqrt[3]{y+1}\,dx + (x+1)^3\sqrt[5]{y+1}\ dy$ б) $\left(3x^2\cos x - \left(x^3+y\right)\sin x\right)dx - \left(\frac{y}{\left(y^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} - \cos x \right) dy$

№ вар.	Дифференциальная форма
30	а) $\left(\sqrt[3]{x+1}+1\right)^2 ydx+y^2\left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+x\right)dy$ б) $\frac{xy}{\sqrt{x^2+1}}dx-\left(\frac{2ye^{y^2}}{\left(1+e^{y^2}\right)^2}-\sqrt{x^2+1}\right)dy$

Задача 6. В точке A найти производную функции $u=f(x,\ y,\ z)$ в направлении вектора AB, а также ее максимальное значение. Указать вектор направления максимальной производной.

№ вар.	$f(x,y,z)$	Точка A	Точка B
1	$e^{xyz}+\cos\left(\frac{x}{z}\right)\ln\left(x^2+y^2\right)$	$(0;\ 1;\ 1)$	$(3;\ 3;\ 7)$
2	$\sin(xyz)+2\sqrt{x^2+y^2}\arcsin\left(\frac{x}{z}+1\right)$	$(-1;\ 0;\ 1)$	$(1;\ -1;\ 3)$
3	$\cos(xyz)+\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}+1\right)\left(y^2+z^2\right)^{-1}$	$(1;\ -1;\ 0)$	$(2;\ 1;\ 2)$
4	$\mathrm{tg}(xyz)+2\ln(yz)e^{xz}$	$(0;\ -1;\ -1)$	$(1;\ 1;\ 1)$
5	$\arcsin(xyz)+\mathrm{tg}\left(\frac{x}{z}-1\right)\sqrt{1+yz}$	$(1;\ 0;\ 1)$	$(2;\ 2;\ 3)$
6	$\arccos(xyz)+2\sin\left(\frac{x}{y}+1\right)\left(x^2+z^2\right)^{-1}$	$(-1;\ 1;\ 0)$	$(1;\ 3;\ 1)$
7	$\mathrm{arctg}(xyz)+\sqrt{x^2+z^2}\ln(-yz)$	$(0;\ 1;\ -1)$	$(2;\ -1;\ -3)$
8	$\mathrm{arcctg}(xyz)+2\sin\left(\frac{z}{x}-1\right)e^{yz}$	$(-1;\ 0;\ -1)$	$(3;\ 2;\ 3)$
9	$\ln(1+xyz)+\mathrm{tg}\left(\frac{y}{x}-1\right)\cos\left(\frac{z}{y}\right)$	$(1;\ 1;\ 0)$	$(3;\ -1;\ 1)$

№ вар.	$f(x, y, z)$	Точка A	Точка B
10	$\sqrt{1+xyz}+\arcsin\left(\dfrac{z}{y}+1\right)\sqrt{1+xz}$	$(0; -1; 1)$	$(2; -3; 2)$
11	$e^{xyz}+2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{z}{x}+1\right)\left(y^2+z^2\right)^{-1}$	$(1; 0; 1)$	$(3; 1; -3)$
12	$\sin(xyz)+\ln\left(x^2+z^2\right)e^{yz}$	$(-1; -1; 0)$	$(-3; 5; 3)$
13	$\cos(xyz)+\sqrt{1+xy}\sin\left(\dfrac{y}{z}-1\right)$	$(0; 1; 1)$	$(2; 2; 3)$
14	$\operatorname{tg}(xyz)+2e^{xy}\arcsin\left(\dfrac{x}{z}+1\right)$	$(-1; 0; 1)$	$(3; 2; -3)$
15	$\arcsin(xyz)+\cos\left(\dfrac{z}{y}\right)\ln\left(y^2+z^2\right)$	$(1; -1; 0)$	$(7; -3; -3)$
16	$\arccos(xyz)+2\left(x^2+y^2\right)^{-1}\ln(yz)$	$(0; -1; -1)$	$(2; 0; 1)$
17	$\operatorname{arctg}(xyz)+\sqrt{y^2+z^2}\sin\left(\dfrac{z}{x}-1\right)$	$(1; 0; 1)$	$(3; 1; 3)$
18	$\operatorname{arcctg}(xyz)+\sqrt{1+yz}\operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{x}+1\right)$	$(-1; 1; 0)$	$(0; 3; 2)$
19	$\ln(1+xyz)+2e^{xz}\arcsin\left(\dfrac{z}{y}+1\right)$	$(0; 1; -1)$	$(2; 5; 3)$
20	$\sqrt{1+xyz}+2\cos\dfrac{y}{x}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{z}-1\right)$	$(-1; 0; -1)$	$(1; 1; 1)$
21	$e^{xyz}+\left(y^2+z^2\right)^{-1}\ln\left(x^2+z^2\right)$	$(1; 1; 0)$	$(3; 7; 3)$
22	$\sin(xyz)+2\sqrt{x^2+y^2}\ln(-yz)$	$(0; -1; 1)$	$(2; 0; 3)$
23	$\cos(xyz)+\sqrt{1+yz}\sin\left(\dfrac{z}{x}+1\right)$	$(1; 0; -1)$	$(5; -4; -3)$
24	$\operatorname{tg}(xyz)+2e^{yz}\arcsin\left(\dfrac{y}{x}-1\right)$	$(-1; -1; 0)$	$(0; -3; 2)$

№ вар.	$f(x, y, z)$	Точка A	Точка B
25	$\arcsin(xyz)+\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{z}-1\right)$	$(0;\ 1;\ 1)$	$(1;\ 3;\ 3)$
26	$\arccos(xyz)+2\left(x^2+y^2\right)^{-1}\sin\left(\dfrac{x}{z}+1\right)$	$(-1;\ 0;\ 1)$	$(0;\ 2;\ 3)$
27	$\operatorname{arctg}(xyz)+2\sqrt{y^2+z^2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{x}+1\right)$	$(1;\ -1;\ 0)$	$(3;\ 1;\ 1)$
28	$\operatorname{arcctg}(xyz)+\sqrt{1+xy}\ln\left(x^2+z^2\right)$	$(0;\ -1;\ -1)$	$(3;\ 5;\ -3)$
29	$\ln(1+xyz)+e^{xy}\sin\left(\dfrac{x}{z}-1\right)$	$(1;\ 0;\ 1)$	$(2;\ 1;\ 0)$
30	$\sqrt{1+xyz}+\cos\left(\dfrac{z}{y}\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{x}+1\right)$	$(-1;\ 1;\ 0)$	$(-3;\ -1;\ 1)$

Задача 7. Для заданной поверхности (вар. № 1—10) $F(x;\ y;\ z)=0$ $\left(z=f(x;y)\right)$ найти точку (точки), в которой касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в найденной точке (точках).

На поверхности (вар. № 11—15), заданной уравнением $F(x;y;z)=0$, найти точки, в которых нормаль к поверхности параллельна прямой $l:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{x-y_0}{n}=\dfrac{x-z_0}{p}$ или $L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$ Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в найденной точке (точках).

На поверхности (вар. № 16 — 20), заданной уравнением $F(x;y;z)=0$, найти точки, в которых касательная плоскость к поверхности перпендикулярна заданному вектору $\alpha=\left(\alpha_x;\alpha_y;\alpha_z\right)$. Для каждой из найденных точек написать уравнения касательной плоскости и нормали.

Для заданной поверхности (вар. № 21 — 30) $F(x;\ y;\ z)=0$ в $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ написать уравнения касательной плоскости и нормали.

№ вар.	Уравнение поверхности	Уравнения плоскости и прямой, вектор, точка M_0
1	$4+x+y^2=\ln z$	$x+2y-z=0$
2	$x-y^2-z^2=0$	$x-4y+2z-1=0$
3	$z=2x^2+y^2$	$4x-2y-z+9=0$
4	$x^2+y^2-z^2=-1$	$2x+2y-3z-5=0$
5	$12x-2y^2-3z^2=18$	$x+y+z=10$
6	$z=2x^2-4y^2$	$8x-8y-z=0$
7	$x^2+2y^2+3z^2=21$	$x+4y+6z=0$
8	$z=3x^2+y^2$	$6x-4y-z+3=0$
9	$5x^2-y+2z^2=9$	$10x-y+8z-13=0$
10	$4x^2+y^2+z^2=17$	$4x-3y+2z+1=0$
11	$x^2+y^2-4z=0$	$x=y=z$
12	$x^2-y^2-2z=0$	$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+51}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$
13	$z=xy$	$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$
14	$x^2-z^2-2x+6y+4=0$	$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x-3y+z+9=0 \end{cases}$
15	$x^2-2y-z^2=4$	$\begin{cases} -x-y+2z=0 \\ x-3z+8=0 \end{cases}$
16	$x^2-xy-8x-z+5=0$	$\alpha=(1;\,2;\,1)$
17	$z=1+x^2+y^2$	$\alpha=(2;2;-1)$
18	$x^2+y^2-xz-yz=7$	$\alpha=(-6;\ 0;\ 1)$
19	$x^2+y^2-4x+2y+2z+10=0$	$\alpha=(1;\ 2;\ -1)$

№ вар.	Уравнение поверхности	Уравнения плоскости и прямой, вектор, точка M_0
20	$x^2 - y^2 + xy - yz = 2$	$\alpha = (5;\ -3;\ -1)$
21	$x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$	$M_0(1;\ 2;\ -1)$
22	$4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z$	$M_0(2;\ 3;\ 6)$
23	$(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$	$M_0(1;\ 1;\ 2)$
24	$e^z - z + xy = 3$	$M_0(2;\ 1;\ 0)$
25	$z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$	$M_0(3;\ 4;\ -7)$
26	$z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$	$M_0\left(1;\ 1;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$
27	$2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$	$M_0(2;\ 2;\ 1)$
28	$z = x^3 - 3xy + y^3$	$M_0(2;\ 1;\ 3)$
29	$3x^4 - 4y^3z + 4z^2xy - 4z^3x + 1 = 0$	$M_0(1;\ 1;\ 1)$
30	$z = \sin x + e^{xy} + y$	$M_0(0;\ 2;\ 3)$

Задача 8. Найти экстремум функции: а) $f(x, y)$; б) $f(x, y, z)$.

№ вар.	Функция
1	а) $x^2y - 9y^3 - 2x^2 + 18y^2$ б) $x^3 + 15x^2 - 13y^2 - z^2 - 4yz + 72x - 86y - 16z + 7$
2	а) $xy^2 - x^2y - 2y^2 + xy + 2y$ б) $2y^3 - x^2 - 6y^2 - 37z^2 + 2xz - 2x - 90y - 70z + 5$
3	а) $y^3 - x^2y - 4y^2 + 4y$ б) $3z^3 + x^2 + 5y^2 + 27z^2 - 2xy + 32y + 70z + 5$
4	а) $4y^3 - x^2y + 2x^2 - 12y$ б) $4x^3 - 12x^2 - 13y^2 - 5z^2 + 14yz - 36x + 42y - 30z + 7$

№ вар.	Функция
5	а) $x^2y+xy^2+2x^2+3xy+y^2+2x+2y$ б) $2y^3+5x^2+9z^2-12xz-4x-6y+12z+11$
6	а) $4x^3-xy^2+12x^2+y^2$ б) $3z^3-17x^2+5y^2+12xy-22x+2y-9z+6$
7	а) $xy^2+x^2y+y^2-xy-2y$ б) $4x^3-12x^2-13y^2-25z^2+20yz-132y+240z-3$
8	а) $x^6+x^4y-2x^4-x^2y-y^2+2y$ б) $2y^3+x^2-6y^2+2z^2-2xz+6x-18y-12z-2$
9	а) $xy^2-x^2y-x^2-xy-2x$ б) $3z^3+4x^2+5y^2-27z^2-4xy-12x-2y+72z-3$
10	а) $xy^2+y^3+4y^2+3xy-x^2$ б) $4x^3-24x^2+13y^2+10z^2-18yz-60x+70y-56z-6$
11	а) $y^3-x^2y-12y^2+36y$ б) $2y^3-5x^2-24y^2-16z^2+16xz+72y+11$
12	а) $x^4-4x^3-2x^2-y^2+12x$ б) $3z^3-26x^2-5y^2-18z^2+14xy+94x-44y-189z+7$
13	а) $xy^2-x^2y-4y^2+5xy-4y$ б) $4x^3+12x^2+13y^2+z^2-4yz-36x+34y-8z+5$
14	а) $y^3-x^2y-6y^2-2xy+8y$ б) $2y^3-x^2-5z^2+2xz-4x-24y+28z+5$
15	а) $-xy^2+2y^2-4xy+x^2-4x+8y$ б) $3z^3+9x^2+5y^2-9z^2-6xy-84x+44y-27z+7$
16	а) $xy^2-9x^3-18x^2-y^2-9x$ б) $2y^3-5x^2-18y^2-25z^2+20xz-40x+30y+100z+6$
17	а) $y^3-x^2y+12y^2+36y$ б) $4x^3-24x^2-13y^2-17z^2+22yz-74y+78z+11$

№ вар.	Функция
18	а) $y^3+3y^2-x^2y+x^2$ б) $3z^3+2x^2+5y^2-18z^2-6xy-30x+48y-108z+3$
19	а) $xy^2-x^2y-2y^2-2x^2+5xy+6x-6y-4$ б) $4x^3-60x^2+13y^2+4z^2-8yz+252x+32y-32z+2$
20	а) $y^3-x^2y+4y^2+4y$ б) $2y^3+x^2-18y^2+10z^2-2xz-4x+30y-14z+3$
21	а) $y^2-x^2y+4x^2-4y$ б) $3z^3-16x^2-5y^2+9z^2+8xy+72x-26y-72z+6$
22	а) $xy^2-x^2-3y^2+2x$ б) $4z^3-13y^2-26z^2+26yz-108x+26y+52z+11$
23	а) $4xy^2-x^3+8y^2+3x$ б) $2y^3+5x^2-6y^2+z^2-4xz+46x-48y-20z+7$
24	а) $y^3-4x^2y-2y^2-8x^2-4y$ б) $3z^3-5x^2-5y^2-27z^2+8xy-6x+12y+45z+5$
25	а) $y^3-2x^2y-xy^2-6y^2+12xy$ б) $4z^3-36x^2+13y^2+9z^2-12yz+76y-60z+5$
26	а) $4y^3-x^2y-xy^2+12y^2-3x^2$ б) $2y^3-x^2-18y^2-17z^2+2xz-12x+42y+108z+7$
27	а) $xy^2-x^3+2xy-6x^2-8x$ б) $3z^3-25x^2-5y^2+18z^2+10xy+220x-60y-45z+11$
28	а) $-x^3+3xy^2+2x^2y+6x^2-6xy-9x$ б) $4x^3-36x^2+13y^2+2z^2-10yz+96x+10y-4z+6$
29	а) $2xy^2+y^3-3x^2y-12y^2+12xy$ б) $2y^3+5x^2+4z^2-8xz+56x-54y-48z+3$
30	а) $x^3+2x^2y-3xy^2+12x^2-12xy$ б) $3z^3+10x^2+5y^2-2z^2-10xy-30x-144z+2$

ЛИТЕРАТУРА

Бутузов В.Ф., *Крутицкая Н.Ч.* и др. Математический анализ в вопросах и задачах: Функции нескольких переменных. М.: Высш. шк., 1988.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1985.

Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1993.

Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1986.

Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. 1—3. М.: Наука, 1969—1970.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Зорина Ирина Григорьевна
Лапшенкова Татьяна Ивановна
Сунчалина Анна Леонидовна

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Редактор *В.М. Царев*
Корректор *О.Е. Никитина*
Компьютерная верстка *И.А. Марковой*

Подписано в печать 25.04.2013. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 3,72. Изд. № 2. Тираж 500 экз. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.