

МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА  
НУК «Фундаментальные Науки»

Кафедра «Физика» (ФН-4)

А.С.Романов, А.В.Семиколенов

УДК 535.231:233, 536.331:337, 537.312:872

**ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ ИЗЛУЧЕНИЕМ**

**Электронное учебное издание**

Методические указания к изучению курса лекций  
по дисциплине «Нелинейные процессы переноса»

*Рекомендуется Учебно-методической комиссией  
НУК «Фундаментальные Науки» МГТУ им.Н.Э. Баумана  
в качестве методических указаний.*

Москва

(С) 2011 МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

**Оглавление**

Введение.....	3
Глава 6. Перенос энергии излучением. ....	5
6.1. Основные положения и определения теории теплового излучения. ....	5
6.2. Уравнение переноса излучения, уравнение непрерывности излучения.....	10
6.3. Система уравнений движения вещества при лучистом теплопереносе.....	12
6.4. Интегральные выражения для интенсивности излучения. ....	14
6.5. Приближенные модели лучистого теплопереноса.....	15
6.6. Уравнение переноса излучения при плоской симметрии. ....	20
6.7. Одногрупповое приближение, простая волна. ....	22
6.8. Принцип максимума при лучистом теплопереносе.....	26
6.9. Развитие динамических возмущений при интенсивном нагреве газа от стенки. ....	29
Рекомендуемая литература.....	41

## Введение

Настоящее пособие является естественным продолжением предыдущих двух пособий по курсу «Нелинейные процессы переноса» и посвящено феноменологическому описанию процесса лучистого переноса энергии в неподвижной оптически плотной среде, когда оптические характеристики вещества существенно влияют на процесс переноса лучистой энергии. Данный процесс по своей природе принадлежит к нелинейным процессам переноса не только в силу законов излучения, но и по причине сложной зависимости оптических свойств вещества от температуры вещества и частоты излучения. По этой причине соответствующие характеристики процесса описываются сложными интегро-дифференциальными уравнениями и поддаются усреднению (по углу и, особенно, по частоте) только в грубом приближении. Несмотря на это, для выяснения качественных особенностей процесса лучистого переноса, например его пространственной локализации при мгновенном тепловыделении в холодном газе, могут быть использованы различные предположения. В зависимости от характеристик используемого приближения, уравнения лучистого переноса могут быть сведены к соотношениям разной степени сложности. В соответствующем разделе рассматриваются диффузионное приближение, приближение «вперед-назад» (или приближение Шварцшильда) для усреднения по углу при плоской симметрии, многогрупповое приближение для усреднения по частоте и приближение лучистой теплопроводности с росселандовым усреднением по частоте.

Даже при самых простых предположениях задача о расчете нестационарного процесса лучистого теплопереноса оказывается слишком сложной для аналитического решения из-за необходимости использовать большое количество экспериментальных данных относительно оптических свойств реальной среды, в которой осуществляется лучистый теплоперенос.

Поэтому в соответствующем разделе рассмотрено решение системы уравнений лучистого теплопереноса типа простой волны в приближении «серого» вещества в разделяющихся переменных (по-другому, в одногрупповом приближении). Очевидно, что такое приближение является очень грубым, с другой стороны задача в такой постановке может быть доведена до конца аналитически, что принципиально для методики изложения проблемы.

Система уравнений лучистого теплопереноса существенно отличается от уравнения теплопроводности. Несмотря на это, оба процесса являются специфическими выражениями закона сохранения энергии. Поэтому они должны подчиняться фундаментальным физическим принципам, что находит свое выражение в обобщенном принципе максимума, который

можно сформулировать для обоих типов процессов. В данном пособии приведена формулировка соответствующей теоремы сравнения для задачи Коши системы уравнений лучистого теплопереноса. При этом сформулированы условия, налагаемые на спектральный коэффициент поглощения, имеющие ясный физический смысл.

В заключительном разделе подробно проанализирован процесс возникновения сильного разрыва при нагреве идеального газа излучением от неподвижной стенки. Перенос излучения моделируется в приближении лучистой теплопроводности. При этом удается аналитически с использованием асимптотических методов довести анализ процесса вплоть до возникновения сильного разрыва.

## Глава 6. Перенос энергии излучением.

### 6.1. Основные положения и определения теории теплового излучения.

Излучение характеризуется частотой колебаний электромагнитного поля  $\nu$  или длиной волны  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ . В дальнейшем мы всегда будем иметь дело со средами, в которых показатель преломления близок к единице, поэтому скорость света близка к скорости света в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

С квантовой точки зрения, излучение представляет собой поток фотонов. Каждый фотон обладает энергией:  $E = h\nu = \hbar\omega$ , где  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка,  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ,  $\omega = 2\pi\nu$ . Кванты электромагнитного излучения – фотоны – обладают также импульсом, величина которого  $p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$ .

Если говорить об излучении как о совокупности частиц – световых квантов, то поле излучения можно охарактеризовать функцией распределения фотонов.

Пусть  $f = f(\nu, \vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  – функция распределения фотонов, тогда  $dN_\nu = f \cdot d\nu \cdot dV \cdot d\Omega$  – число фотонов в спектральном интервале от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ , находящихся в момент времени  $t$  в элементе объема  $dV$  около точки, задаваемой радиус-вектором  $\vec{r}$  и имеющих направление движения в пределах элемента телесного угла  $d\Omega$ , задаваемого единичным вектором  $\vec{\Omega}$  (см. рис. 6.1).

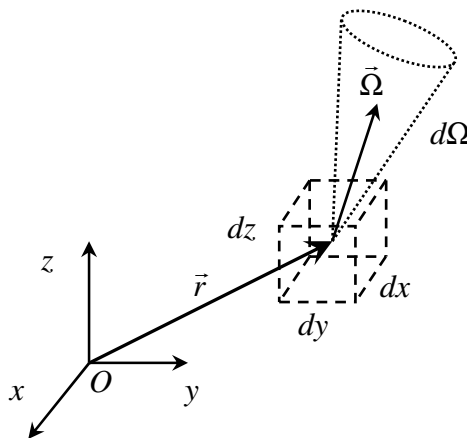


Рис. 6.1. К определению функции распределения фотонов.

Каждый квант обладает энергией  $h\nu$  и движется со скоростью  $c$ . Для квантов, движущихся в направлении единичного вектора  $\vec{\Omega}$  можно записать  $dV = dS_{\perp} \cdot c dt$ , где  $dS_{\perp}$  - площадь малой плоской ориентированной поверхности, перпендикулярной вектору  $\vec{\Omega}$ .

Тогда для количества фотонов и их энергии можно записать соотношения

$$dN_{\nu} = f \cdot d\nu \cdot dS_{\perp} \cdot c dt \cdot d\Omega, \quad dE_{\nu} = h\nu \cdot dN_{\nu} = h\nu \cdot f \cdot d\nu \cdot dS_{\perp} \cdot c dt \cdot d\Omega.$$

Поэтому величина

$$\frac{dE_{\nu}}{dS_{\perp} \cdot dt} = h\nu \cdot f \cdot c \cdot d\nu \cdot d\Omega = I_{\nu}(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \cdot d\nu \cdot d\Omega$$

равна энергии излучения (лучистая энергия) в спектральном интервале от  $\nu$  до  $\nu+d\nu$ , протекающей за единицу времени через единичную площадку, помещенную в точке  $\vec{r}$ , перпендикулярно к направлению распространения излучения, лежащему в элементе телесного угла  $d\Omega$  около вектора  $\vec{\Omega}$ .

Величину  $I_{\nu}$  называют спектральной интенсивностью излучения (или просто, интенсивностью, в случаях, когда это не вызывает недоразумений). Задание функции  $I_{\nu}(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  или  $f(\nu, \vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  полностью определяет поле излучения.

Суммарная энергия фотонов, движущихся по всем направлениям в элементе объема  $dV$  в точке  $\vec{r}$  в момент времени  $t$ , по определению, есть количество лучистой энергии частоты  $\nu$ , заключенной в интервале частот  $d\nu$

$$U_{\nu}(\vec{r}, t) d\nu dV = \left( h\nu \int_{4\pi} f \cdot d\Omega \right) d\nu dV \equiv \left( \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_{\nu} d\Omega \right) d\nu dV,$$

или

$$U_{\nu}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_{\nu} d\Omega. \quad (6.1)$$

Величина  $U_{\nu}$  называется спектральной плотностью лучистой энергии.

Рассмотрим ориентированную площадку  $dS$  с выбранным направлением нормали  $\vec{n}$  (см. рис.6.2). Количество лучистой энергии в интервале частот  $d\nu$ , протекающей за время  $dt$  через эту площадку «наружу» равно

$$dE_{\nu}^{+} = h\nu \cdot dN_{\nu}^{+} = h\nu \cdot c \left( \int_{(2\pi)} f(\nu, \vec{r}, \vec{\Omega}, t) \cdot \cos \theta d\Omega \right) \cdot dS \cdot d\nu dt$$

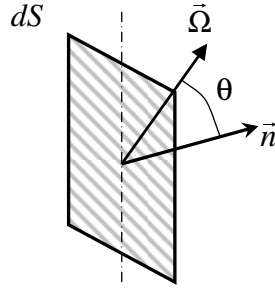


Рис. 6.2. Ориентированная площадка  $dS$ , перпендикулярная вектору  $\vec{n}$ .

где угол  $\theta$  - угол между нормалью  $\vec{n}$  и вектором  $\vec{\Omega}$ . Интеграл берется по правой полусфере. Интеграл по левой полусфере равен количеству энергии, протекающей «внутри». Разность этих потоков дает полный спектральный поток энергии через указанную площадку:

$$dE_v = hv \cdot c \left( \int_{(4\pi)} f(\nu, \vec{r}, \vec{\Omega}, t) \cdot \cos \theta d\Omega \right) \cdot dS \cdot d\nu dt.$$

Следовательно, спектральная плотность излучения в направлении вектора  $\vec{n}$  определится соотношением

$$S_v(\vec{r}, t, \vec{n}) = \frac{dE_v}{d\nu \cdot dt \cdot dS} = hv \cdot c \left( \int_{(4\pi)} f(\nu, \vec{r}, \vec{\Omega}, t) \cdot \cos \theta d\Omega \right) = \int_{(4\pi)} I_v \cos \theta d\Omega.$$

Последовательно выбирая в качестве вектора  $\vec{n}$ , например, орты декартовой системы координат, получим три величины  $S_{xv} = S_v(\vec{r}, t, \vec{e}_x)$ ,  $S_{yv} = S_v(\vec{r}, t, \vec{e}_y)$ ,  $S_{zv} = S_v(\vec{r}, t, \vec{e}_z)$ , которые можно считать координатами вектора плотности спектрального потока излучения

$\vec{S}_v = (S_{xv}, S_{yv}, S_{zv})$ . Учитывая, что в этом случае направляющие косинусы вектора  $\vec{\Omega}$  определяются выражениями  $\cos \theta_x = (\vec{e}_x, \vec{\Omega})$ ,  $\cos \theta_y = (\vec{e}_y, \vec{\Omega})$ ,  $\cos \theta_z = (\vec{e}_z, \vec{\Omega})$ , то определение вектора спектрального потока излучения примет вид

$$\vec{S}_v = \int_{(4\pi)} I_v \vec{\Omega} d\Omega. \quad (6.2)$$

Интегральные величины - интенсивность, плотность и поток излучения получают интегрированием соответствующих величин по всему спектру частот:

$$I = \int_0^{\infty} I_v d\nu, \quad U = \int_0^{\infty} U_v d\nu, \quad \vec{S} = \int_0^{\infty} \vec{S}_v d\nu. \quad (6.3)$$

Если перенос излучения происходит в веществе, то вещество (в рассматриваемом случае - газ) влияет на процесс переноса излучения и излучение также влияет на свойства вещества.

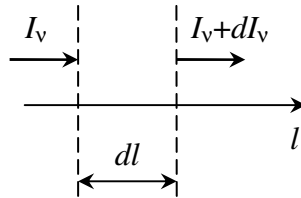


Рис. 6.3. К выводу зависимости изменения интенсивности потока излучения.

Если через вещество проходит поток излучения частотой  $\nu$ , то его интенсивность ослабевает за счет поглощения и рассеяния квантов (рис.6.3). Изменение интенсивности при прохождении слоя толщиной  $dx$  пропорционально самой интенсивности и толщине этого слоя

$$dI_\nu \sim I_\nu dl.$$

В отсутствие вынужденного излучения интенсивность всегда уменьшается:

$$dI_\nu = -\alpha_\nu \cdot I_\nu \cdot dl,$$

где  $\alpha_\nu = \left| \frac{d(\ln I_\nu)}{dl} \right| > 0$  - коэффициент спектрального ослабления для данной частоты  $\nu$ . Следовательно, интенсивность излучения в веществе при прохождении некоторого слоя вещества от  $l_1$  до  $l_2$  определяется по формуле (закон Бугера)

$$I_{\nu 2} = I_{\nu 1} \exp \left( - \int_{l_1}^{l_2} \alpha_\nu dl \right),$$

где  $I_{\nu 1}$  и  $I_{\nu 2}$  - интенсивности излучения в сечениях  $l_1$  и  $l_2$  соответственно.

Коэффициент спектрального ослабления  $\alpha_\nu$  складывается из коэффициента спектральной адсорбции (поглощения) излучения  $\alpha_{\nu a}$  и из коэффициента спектрального рассеяния  $\alpha_{\nu s}$ . Обратные им величины есть спектральные средние длины пробега излучения:

$$l_{\nu a} = \frac{1}{\alpha_{\nu a}}, \quad l_{\nu s} = \frac{1}{\alpha_{\nu s}}, \quad l_\nu = \frac{1}{\alpha_{\nu a} + \alpha_{\nu s}} = \frac{1}{\frac{1}{l_{\nu a}} + \frac{1}{l_{\nu s}}}.$$

Иногда определяют оптическую толщину слоя по отношению к излучению частоты  $\nu$ :

#### [Оглавление.](#)



$$\tau_v(l_1, l_2) = \int_{l_1}^{l_2} \alpha_v dl.$$

В обычных (земных) условиях можно пренебречь рассеянием по сравнению с поглощением. Только в полностью ионизованном и очень сильно разреженном газе вклад рассеяния становится определяющим.

Любое вещество является источником теплового излучения. Количество лучистой энергии частоты  $\nu$ , самопроизвольно испускаемой в единице объема вещества в единицу времени и в единичном интервале частот по всем направлениям, называют спектральной лучеиспускательной способностью или спектральным коэффициентом излучения  $J_\nu$ .

Обычно газы излучают изотропно, т.е. одинаково во все стороны, поэтому количество энергии, излучаемой в телесный угол  $d\Omega$  в каком-либо направлении, определяется как

$$j_\nu \cdot d\Omega = J_\nu \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \quad \text{или} \quad j_\nu = \frac{J_\nu}{4\pi}.$$

Величину  $j_\nu$  называют объемной плотностью спектральной светимости.

По закону Кирхгофа излучение и поглощение теплового излучения связаны между собой. Для объемного испускания и поглощения закон Кирхгофа имеет вид:

$$\frac{j_\nu}{\alpha_\nu} = I_{\nu p} \left( 1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right),$$

где  $I_{\nu p}$  - равновесная спектральная интенсивность излучения определяется формулой Планка:

$$I_{\nu p} = \frac{c}{4\pi} U_{\nu p},$$

$$U_{\nu p} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Если ввести модифицированный коэффициент поглощения  $\alpha'_\nu = \alpha_\nu \cdot \left( 1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)$ , то коэффициенты излучения и поглощения оказываются связанными между собой соотношением:

$$j_\nu = I_{\nu p} \alpha'_\nu.$$

Наличие поправки « $-e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ » связано с присутствием вынужденного излучения в тепловом излучении.

Введение модифицированного коэффициента поглощения позволяет учесть влияние вынужденного излучения просто как уменьшение коэффициента поглощения. Это возможно в случае, если имеется, по крайней мере, локально, равновесие между излучением и веществом. В противном случае, надо рассматривать «лазерный» эффект.

#### [Оглавление.](#)

## 6.2. Уравнение переноса излучения, уравнение непрерывности излучения.

Будем рассматривать излучение с частотой  $\nu$  в некотором интервале частот, распространяющееся внутри телесного угла в направлении заданном единичным вектором  $\vec{\Omega}$ .

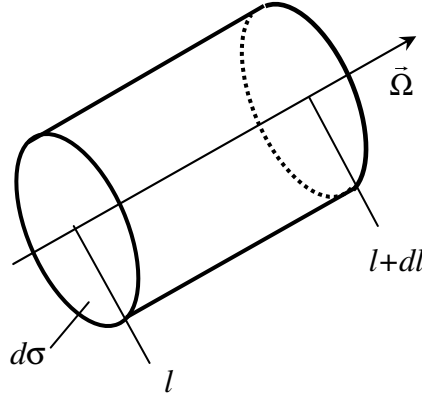


Рис. 6.4. Расчёт баланса излучения.

Рассмотрим баланс излучения в элементарном прямом цилиндре с площадью основания  $d\sigma$  и высотой  $dl$ , расположенном в точке пространства таким образом, что направление вектора  $\vec{\Omega}$  совпадает с осью цилиндра и перпендикулярно его основанию (см. рис. 6.4). За время  $dt$  в левое основание «втекает» энергия излучения, равная  $I_\nu(\vec{\Omega}, l, t) \cdot d\sigma dt$ , из правого основания «вытекает»  $(I_\nu + dI_\nu) \cdot d\sigma dt$ . Откуда

$$dI_\nu = \frac{\partial I_\nu}{\partial t} \frac{dl}{c} + \frac{\partial I_\nu}{\partial l} dl,$$

$dt = \frac{dl}{c}$  - время, необходимое излучению для прохождения расстояния  $dl$ .

Изменение интенсивности происходит вследствие испускания и поглощения излучения в указанном цилиндре. Величина интенсивности излучения, испущенного в цилиндре в данном направлении равна

$$j_\nu \cdot d\sigma \cdot dl dt.$$

Величина интенсивности, поглощенного в цилиндре (с учетом вынужденного излучения) равна

$$\alpha'_\nu \cdot I_\nu \cdot d\sigma \cdot dl dt.$$

Составим баланс энергий:

$$\left( \frac{\partial I_\nu}{\partial t} \frac{dl}{c} + \frac{\partial I_\nu}{\partial l} dl \right) d\sigma dt = j_\nu \cdot d\sigma dl dt - \alpha'_\nu I_\nu d\sigma dl dt,$$

или

[Оглавление.](#)

$$\frac{\partial I_v}{\partial t} \frac{1}{c} + \frac{\partial I_v}{\partial l} = j_v - \alpha'_v I_v.$$

Так как  $\frac{\partial I_v}{\partial l} = (\vec{\Omega}, \vec{\nabla}) I_v$ , и по закону Кирхгофа  $j_v = \alpha'_v I_{vp}$ , то

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + (\vec{\Omega}, \vec{\nabla}) I_v = \alpha'_v (I_{vp} - I_v). \quad (6.4)$$

Уравнение (6.4) называется уравнением переноса излучения.

Уравнение переноса излучения (6.4), определение вектора плотности спектрального потока излучения (6.2) и определения (6.3) содержат всю информацию об излучении, необходимую для описания процесса переноса излучения в веществе.

Часто, вместо определения (6.2), пользуются уравнением непрерывности излучения, которое следует из уравнения (6.4) и определения (6.2). Для вывода уравнения непрерывности излучения проинтегрируем уравнение (6.4) по всем направлениям. После интегрирования и применения определения (6.2), получим

$$\frac{\partial U_v}{\partial t} + \text{div}(\vec{S}_v) = c \cdot \alpha'_v \cdot (U_{vp} - U_v). \quad (6.5)$$

Это соотношение является искомым уравнением непрерывности излучения. Особо следует отметить, что уравнение непрерывности излучения (6.5) не является прямым следствием уравнения переноса излучения (6.4), так как при его выводе было использовано определение (6.2). «Похожесть» уравнений (6.4) и (6.5) вызвана тем фактом, что в данном случае одна и та же характеристика - энергия излучения - выступает как специфическая величина, определяющая «количество» излучения в уравнении переноса излучения (6.4) и в уравнении непрерывности излучения, выражающем закон сохранения энергии.

Оценим величину производной по времени в уравнениях (6.4) и (6.5). Для этого рассмотрим однородное по пространству состояние излучения:  $\text{div}(\vec{S}) = 0$ . Тогда уравнение (6.5) примет вид

$$\frac{1}{c \alpha'_v} \frac{\partial U_v}{\partial t} = U_{vp} - U_v.$$

Предположим, что  $U_v(0) = 0$ . В этом случае решением этого уравнения является

$$U_v(t) = U_{vp} \cdot (1 - e^{-c \alpha'_v t}).$$

Поэтому характерное время установления равновесия в данном случае равно

$$t_p = \frac{1}{c \alpha'_v} = \frac{l'_v}{c} = \frac{l_v}{\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) \cdot c}.$$

Например, при частоте  $\nu_m$ , соответствующей максимуму спектральной плотности планковского равновесного излучения (по закону смещения Вина  $h\nu_m = kT$ ), при  $l_\nu = 10^{-2}$  м получаем  $t_p = 3 \cdot 10^{-8}$  с.

Поэтому при описании нерелятивистских гидродинамических процессов, для которых характерные времена существенно превосходят  $t_p$ , всегда можно пренебречь в уравнении переноса излучения величиной производной по времени. В «нерелятивистском» приближении уравнение непрерывности излучения (6.5) принимает вид

$$\operatorname{div}(\vec{S}_\nu) = c \cdot \alpha'_\nu \cdot (U_{\nu p} - U_\nu), \quad (6.6)$$

а уравнение переноса излучения (6.5) в «нерелятивистском» приближении имеет вид

$$(\vec{\Omega}, \vec{V}) I_\nu = \alpha'_\nu \cdot (I_{\nu p} - I_\nu). \quad (6.7)$$

### 6.3. Система уравнений движения вещества при лучистом теплопереносе.

Рассмотрим систему уравнений, описывающих совместное состояние вещества (газа) при его движении и поля излучения для случая, когда перенос излучения и взаимодействие излучения с веществом оказывают существенное влияние на состояние и движение вещества. При этом движение вещества будем считать нерелятивистским (скорость движения частиц вещества много меньше скорости света).

Если температура газа не слишком высока, а плотность не слишком мала, то плотность энергии и давление излучения пренебрежимо малы по сравнению с энергией и давлением газа. Сравним, для оценки, плотность равновесного излучения в единице объема, которая по закону Стефана-Больцмана равна

$$U_p = \int_0^\infty U_{\nu p} d\nu = \frac{4}{c} \sigma T^4,$$

с внутренней энергией единицы объема идеального одноатомного газа

$$E = \frac{3}{2} nkT.$$

Учитывая, что концентрация молекул в воздухе при нормальных условиях  $n \approx 2,67 \cdot 10^{25}$  м<sup>-3</sup>, получаем приближенное равенство

$$\frac{U_p}{E} = 1,36 \cdot 10^{-18} \cdot T^3.$$

То есть плотность энергии излучения сравнивается с внутренней энергией газа «нормальной плотности» при температурах порядка  $10^6$  К.

#### Оглавление.

Величины давлений излучения и вещества находятся примерно в таком же соотношении, что и величины энергий. Давление изотропного излучения  $p_r = \frac{U_p}{3}$ , а давление идеального газа  $p = (\gamma - 1) \cdot E$ , где  $\gamma$  - показатель адиабаты. При высоких температурах  $1,15 \leq \gamma \leq 5/3$ .

Таким образом, при не слишком высоких температурах и не слишком малых плотностях вещества, плотность энергии и давление излучения практически не оказывают влияния на энергетический баланс и гидродинамическое движение вещества. Их влияние на движение будет проявляться в случае лучистого теплообмена в среде. Причина указанного явления состоит в резком различии скоростей движения вещества и излучения при  $v \ll c$ . Поэтому потоки энергии оказываются сравнимыми при несравнимых плотностях энергии.

Следовательно, в этих условиях уравнение непрерывности вещества и уравнение переноса импульса веществом не меняются. Необходимо учесть лишь поток лучистой энергии  $\vec{S}$  в уравнении переноса энергии (молекулярная, электронная и другие аналогичные составляющие теплопроводности здесь считаются пренебрежимо малыми, хотя это и требует отдельного обсуждения). С учетом этих замечаний система уравнений для описания движения идеальной жидкости записывается в следующем виде:

- уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0;$$

- уравнение переноса импульса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p;$$

- уравнение переноса энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \rho \epsilon \right) + \text{div} \left( \rho \vec{v} \left( \frac{v^2}{2} + w \right) \right) = -\text{div}(\vec{S});$$

- уравнение переноса излучения:  $(\vec{\Omega}, \vec{\nabla}) I_v = \kappa'_v \cdot (I_{vp} - I_v)$ ;

- уравнение непрерывности излучения:  $\text{div}(\vec{S}_v) = c \cdot \kappa'_v \cdot (U_{vp} - U_v)$ .

Здесь  $w = \epsilon + \frac{p}{\rho}$  - тепловая функция единицы объема вещества, остальные обозначения являются общепринятыми.

#### 6.4. Интегральные выражения для интенсивности излучения.

Будем считать, что состояние вещества во всех точках пространства известно, т.е. известны температура  $T$  и плотность  $\rho$ . Тогда следует считать известными функциями координат все величины, зависящие от состояния вещества:  $I_{vp} [T(\vec{r}, t)]$ ,  $\alpha'_v [T(\vec{r}, t), \rho(\vec{r}, t)]$ .

При этом условии можно формально записать решение уравнения переноса излучения (6.7).

Для определенности предположим, что излучающее вещество заполняет все пространство. Будем интересоваться излучением в точке  $\vec{r}$  с направлением распространения  $\vec{\Omega}$  (см. рис.6.5).

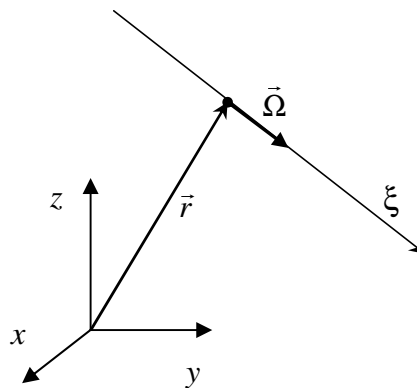


Рис. 6.5. К выводу решения уравнения переноса излучения

Проведем луч через данную точку в направлении вектора  $\vec{\Omega}$  и введем координату вдоль луча  $\xi$ . Заметим, что оператор  $(\vec{\Omega}, \vec{\nabla})$  есть производная вдоль выбранного луча. Тогда уравнение переноса излучения перепишем в виде:  $\frac{dI_v}{d\xi} + \alpha'_v I_v = \alpha'_v I_{vp}$ .

Это обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка с правой частью. Решение ищем в виде суммы общего решения однородного  $I_v^{(0)}$  и частного решения неоднородного уравнений  $I_v^{(p)}$ .

$$\text{Однородное уравнение: } d(\ln I_v^{(0)}) = -\alpha'_v d\xi \text{ имеет решение } I_v^{(0)} = c \cdot \exp\left(-\int_{-\infty}^{\xi} \alpha'_v d\xi'\right).$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем методом вариации постоянной:

$$I_v^{(p)} = c(\xi) \cdot \exp\left(-\int_{-\infty}^{\xi} \alpha'_v d\xi'\right), \quad c(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \alpha'_v \cdot I_{vp} \cdot \exp\left(\int_{-\infty}^{\xi'} \alpha'_v d\xi''\right) \cdot d\xi' + c_0.$$

Общее решение записывается в виде:

$$I_v = \left( \int_{-\infty}^{\xi} \alpha'_v \cdot I_{vp} \cdot \exp \left( \int_{-\infty}^{\xi'} \alpha'_v d\xi'' \right) d\xi' \right) \cdot \exp \left( - \int_{-\infty}^{\xi} \alpha'_v d\xi' \right) + c_0 \cdot \exp \left( - \int_{-\infty}^{\xi} \alpha'_v d\xi' \right).$$

Если считать, что  $\alpha'_v > 0$ , то  $\int_{-\infty}^{\xi} \alpha'_v d\xi' \rightarrow \infty$  и излучение из бесконечно удаленной точки не приходит внутрь области определения. Окончательно, получаем:

$$I_v = \int_{-\infty}^{\xi} \alpha'_v \cdot I_{vp} \cdot \exp \left( - \int_{\xi'}^{\xi} \alpha'_v d\xi'' \right) \cdot d\xi'. \quad (6.8)$$

То есть интенсивность излучения не является локальной величиной. Интенсивность в данной точке складывается из интенсивностей всех остальных точек вдоль луча с учетом поглощения. Соотношение (6.8) может быть использовано вместо уравнения переноса излучения (6.7).

### 6.5. Приближенные модели лучистого теплопереноса.

В уравнения движения вещества входят интегральные характеристики излучения

$$\vec{S} = \int_0^{\infty} \vec{S}_v dv, \quad \vec{S}_v = \int_{(4\pi)} I_v \vec{\Omega} d\Omega,$$

поэтому задача расчета поля излучения с учетом движения превращается в сложную интегро-дифференциальную математическую проблему. Естественно, хотелось бы найти некоторые приближенные подходы, упрощающие решение этой проблемы.

Спектральный состав излучения заранее упростить практически невозможно, так как коэффициент поглощения имеет сложную зависимость от частоты  $\nu$ , учитывающую, в частности, индивидуальное строение атомов и молекул вещества.

Для расчетов часто используют многогрупповое приближение. Всю область  $\nu \in [0, \infty)$  разбивают на отрезки (группы) переменной ширины  $\Delta\nu_i = \nu_i - \nu_{i-1}, i = 1, 2, \dots, N$ . В пределах каждой группы  $\nu \in [\nu_{i-1}, \nu_i]$  функция  $\alpha'_v(T)$  считается независимой от частоты  $\alpha'_v(T) = \alpha'_i(T)$ . При численной реализации количество групп при необходимости может равняться нескольким сотням.

Полностью исключить из рассмотрения спектральные характеристики можно только для одногруппового приближения ( $N=1$ ), такое вещество часто называют «серым» и в этом случае вне зависимости от частоты  $\alpha'_v(T) = \alpha'(T)$ .

Возможность адекватно использовать «серое» приближение для качественных оценок эффектов лучистого теплопереноса возникает при достаточно высокой температуре. Физически это связано с возникновением оптически плотной плазмы, при этом нивелируются индивидуальные свойства молекул газа, и возникает возможность усреднения коэффициента поглощения по частоте. В области многократной ионизации (при  $T > 5 \cdot 10^4$  К) для средних значений коэффициента поглощения предлагается степенная аппроксимация

$$\kappa'(T) = T^{-\gamma}, \quad 1,5 \leq \gamma \leq 3.$$

Важной особенностью такого среднего коэффициента поглощения является его неограниченный рост:

$$\kappa'(T) \rightarrow \infty \text{ при } T \rightarrow 0.$$

Это свойство является важным - именно оно может приводить к пространственной локализации при сильном нагреве.

Проще обстоит дело с усреднением по углу. Уравнение непрерывности излучения (6.6), связывающее спектральный поток  $\vec{S}_v$  и спектральную плотность излучения  $U_v$ , не содержит угол в качестве независимой переменной, поэтому наша цель – записать вместо уравнения переноса излучения (6.7) некоторое другое соотношение для величин, не зависящих от угла.

Второе соотношение, в дополнение к (6.7), связывающее  $\vec{S}_v$  и  $U_v$ , можно получить только в приближенном виде. Это возможно, если зависимость спектральной интенсивности излучения  $I_v(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  от угла  $\vec{\Omega}$  является слабой.

Для вывода соответствующего соотношения умножим уравнение переноса излучения (6.7) на вектор  $\vec{\Omega}$  и проинтегрируем по углам:

$$\int_{(4\pi)} \vec{\Omega}(\vec{\Omega}, \vec{\nabla}) I_v d\Omega = \int_{(4\pi)} \kappa'_v I_{vp} \vec{\Omega} d\Omega - \int_{(4\pi)} \kappa'_v I_v \vec{\Omega} d\Omega. \quad (6.9)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (6.9) равно нулю  $\int_{(4\pi)} \kappa'_v I_{vp} \vec{\Omega} d\Omega = 0$  в силу неза-

висимости  $I_{vp}$  и  $\kappa'_v$  от угла. Второе слагаемое в (6.9) равно  $\int_{(4\pi)} \kappa'_v I_v \vec{\Omega} d\Omega = \kappa'_v \vec{S}_v$  в силу опре-

деления (6.2). В результате из (6.9) получаем

$$\int_{(4\pi)} \vec{\Omega}(\vec{\Omega}, \vec{\nabla}) I_v d\Omega = -\kappa'_v \vec{S}_v. \quad (6.10)$$

В поле излучения, близком к изотропному, будем приближенно считать

$$I_v(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \approx I_v(\vec{r}, t).$$

#### [Оглавление.](#)



Тогда левая часть уравнения (6.10) преобразуется к виду

$$\int_{(4\pi)} \vec{\Omega}(\vec{\Omega}, \vec{\nabla}) I_v d\Omega = |\vec{\nabla} I_v| \int_{(4\pi)} \vec{\Omega} \cos \varphi d\Omega, \quad (6.11)$$

где  $\varphi$  - угол между векторами  $\vec{\Omega}$  и  $\vec{\nabla} I_v$ .

Представим вектор  $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_\perp + \vec{\Omega}_\parallel$ , где вектор  $\vec{\Omega}_\parallel$  параллелен вектору  $\vec{\nabla} I_v$ , а  $\vec{\Omega}_\perp$  ему перпендикулярен (см. рис. 6.6).

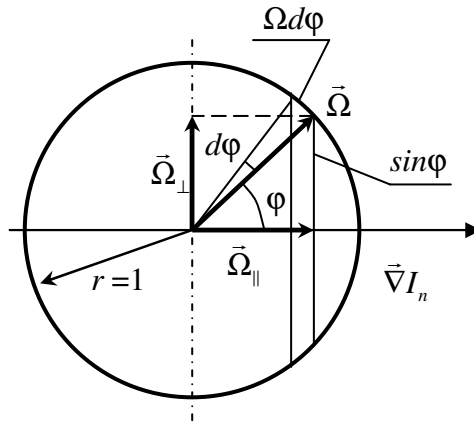


Рис. 6.6. Разложение  $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_\perp + \vec{\Omega}_\parallel$ .

Т.к.  $|\vec{\Omega}| = 1$  и  $d\Omega = 2\pi \sin \varphi \cdot d\varphi$ , то с учетом  $\Omega_\perp = \sin \varphi$ ,  $\Omega_\parallel = \cos \varphi$  правая часть соотношения (6.11) приводится к виду

$$|\vec{\nabla} I_v| \int_{(4\pi)} \vec{\Omega} \cos \varphi d\Omega = |\vec{\nabla} I_v| \int_0^\pi \vec{\Omega}_\parallel \cdot \cos \varphi \cdot 2\pi \sin \varphi \cdot d\varphi = \vec{\nabla} I_v \cdot 2\pi \int_0^\pi \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi.$$

Проводя интегрирование и учитывая, что в случае изотропного излучения  $U_v = \frac{4\pi}{c} I_v$ , получаем искомое приближение в виде

$$\int_{(4\pi)} \vec{\Omega}(\vec{\Omega} \vec{\nabla} I_v) d\Omega = \frac{c}{3} \vec{\nabla} U_v,$$

и из соотношения (6.10) окончательно получим

$$-\frac{c}{3\chi'_v} \vec{\nabla} U_v = \vec{S}_v. \quad (6.12)$$

Полное отсутствие анизотропии излучения означает, что одновременно  $\vec{\nabla} U_v = 0$  и  $\vec{S}_v = 0$ , то есть в этом случае равенство (6.12) выполняется точно.

Можно показать, что при малой анизотропии излучения это соотношение выполняется приближенно. В *диффузионном* приближении уравнение (6.12) постулируется для спектральной плотности лучистой энергии  $U_v$  и рассматривается совместно с уравнением непрерывности излучения (6.6).

#### [Оглавление.](#)

Спектральный поток излучения  $S_\nu$  можно исключить из соотношений (6.6), (6.12). Для этого возьмем операцию  $div$  от равенства (6.12) и, с учетом соотношения (6.6.), получим

$$-\left(\vec{\nabla}, \left(\frac{c}{3\alpha'_\nu} \vec{\nabla} U_\nu\right)\right) = c \cdot \alpha'_\nu (U_{\nu p} - U_\nu). \quad (6.13)$$

Таким образом, в диффузионном приближении дифференциальное уравнение (6.13) позволяет рассчитать поле излучения, если известны температура, плотность вещества и его спектральные характеристики.

Другим приближением, используемым в плоских задачах переноса излучения, является приближение Шварцшильда или «вперед-назад».

Пусть ось « $x$ » - направление переноса лучистой энергии. Если провести плоскость перпендикулярно оси  $x$ , она разделит все кванты излучения на две части – движущиеся в переднюю или заднюю полусферу. Объединим все кванты, движущиеся в переднюю полусферу в одну группу, а в заднюю – в другую. В пределах каждой полусферы излучение считается изотропным. В этом случае для объемной плотности энергии  $U_\nu = \frac{2\pi}{c}(I_{\nu 1} + I_{\nu 2})$ , а для плотности потока энергии  $S_\nu = \pi(I_{\nu 1} - I_{\nu 2})$ , где индексами 1 и 2 обозначены передняя и задняя полусферы соответственно.

Не останавливаясь на подробностях, укажем, что при разумных предположениях, в этом приближении получаются такие же соотношения, что и в диффузионном приближении, но с другой постоянной

$$\frac{dS_\nu}{dx} = \alpha'_\nu c (U_{\nu p} - U_\nu), \quad S_\nu = -\frac{1}{4\alpha'_\nu} \frac{dU_\nu}{dx}.$$

В диффузионном приближении в последнем уравнении в знаменателе было 3 вместо 4.

Отдельно остановимся на приближении лучистой теплопроводности. Если длины пробега квантов малы по сравнению с характерными длинами изменения физических параметров вещества, то можно говорить о ситуации близкой к термодинамически равновесной. Малые величины градиентов в протяженной оптически плотной среде являются одновременно и оправданием применения диффузионного приближения, в рамках которого

$$\vec{S}_\nu = -\left(\frac{cl'_\nu}{3}\right) \vec{\nabla} U_\nu.$$

Но, поскольку,  $U_\nu \approx U_{\nu p}$  (при термодинамическом равновесии), то можно приближенно записать

$$\vec{S}_\nu = -\left(\frac{cl'_\nu}{3}\right) \vec{\nabla} U_{\nu p}$$

(напомним,  $l'_\nu = \frac{1}{\alpha'_\nu}$  - средняя длина пробега излучения частоты  $\nu$  с учетом переизлучения).

Полный лучистый поток в данном приближении

$$\vec{S} = \int_0^\infty \vec{S}_\nu d\nu = -\frac{c}{3} \int_0^\infty l'_\nu (\vec{\nabla} U_{\nu p}) d\nu. \quad (6.14)$$

Вынесем в последнем соотношении из-под знака интеграла некоторое усредненное по частоте значение длины пробега и обозначим его  $l$ . Если учесть, что по закону Стефана - Больцмана

на  $\int_0^\infty U_{\nu p} d\nu = U_p = \frac{4}{c} \sigma T^4$ , то окончательно получим

$$\vec{S} = -\frac{cl}{3} \vec{\nabla} U_p = -\frac{16 \cdot \sigma \cdot l \cdot T^3}{3} \vec{\nabla} T. \quad (6.15)$$

Таким образом, в приближении лучистой теплопроводности перенос излучения носит характер теплопроводности

$$\vec{S} = -\lambda \cdot \vec{\nabla} T,$$

где  $\lambda = \lambda(T)$ .

Сравнение формул для  $\vec{S}$  (6.14) и (6.15) дает правило усреднения длины свободного пробега по частоте

$$l \cdot \vec{\nabla} U_p = \int_0^\infty l'_\nu (\vec{\nabla} U_{\nu p}) d\nu.$$

Заметим, что  $U_{\nu p}$  и  $U_p$  зависят от координат только через зависимость от температуры

$$\vec{\nabla} U_p = \frac{dU_p}{dT} \vec{\nabla} T, \quad \vec{\nabla} U_{\nu p} = \frac{dU_{\nu p}}{dT} \vec{\nabla} T.$$

Тогда

$$l = \frac{\int_0^\infty l'_\nu \frac{dU_{\nu p}}{dT} d\nu}{\frac{dU_p}{dT}} = \frac{\int_0^\infty l'_\nu \frac{dU_{\nu p}}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dU_{\nu p}}{dT} d\nu}.$$

Дифференцируя по  $T$ , затем интегрируя и вводя новую безразмерную переменную  $n = \frac{h\nu}{kT}$ ,

найдем искомый закон усреднения длины пробега излучения

$$l = \int_0^\infty l'_\nu G(n) dn,$$

где

$$G(n) = \frac{15}{4\pi^4} \frac{n^4 e^{-n}}{(1 - e^{-n})^2}.$$

Величина  $l$ , полученная путем усреднения  $l'_v$  с весовым множителем  $G(n)$ , называется росселандовым средним длины пробега излучения или, просто, росселандовым пробегом.

Учитывая, что  $l'_v = \frac{1}{\alpha'_v} = \frac{1}{\alpha_v (1 - e^{-n})}$ , формулу для  $l$  можно переписать в виде

$$l = \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha_v} G_1(n) dn, \quad G_1(n) = \frac{15}{4\pi^4} \frac{n^4 e^{-n}}{(1 - e^{-n})^3}.$$

Интересной особенностью росселандова весового множителя является максимум при  $n = 4$ , т.е. основной вклад в перенос излучения вносят кванты с энергией в несколько раз большей, чем  $kT$ .

### 6.6. Уравнение переноса излучения при плоской симметрии.

Очевидно, что сколько-нибудь сложная задача расчета переноса излучения требует применения ЭВМ и большого количества экспериментальных данных относительно спектральных оптических характеристик вещества.

Существенным упрощением уравнений переноса может быть переход от векторных соотношений к скалярным. Это становится возможным в случае, когда в задаче есть симметрия.

Рассмотрим задачу с «плоской» симметрией. В этом случае имеется единственное направление в пространстве такое, что в любой плоскости, перпендикулярной этому направлению температура излучающего вещества зависит только от времени, а все векторы  $\vec{S}$  и  $\vec{S}_v$  коллинеарны этому направлению. Назовем это направление - направлением переноса излучения. Пусть вдоль этого направления введена координатная ось « $x$ », тогда можно записать

$$T = T(x, t), \quad I_v = I_v(\mu, x, t), \quad U_v = U_v(x, t), \quad S_v = S_v(x, t),$$

где  $S_v$  - проекция вектора  $\vec{S}_v$  на ось  $x$ , равная длине этого вектора,  $\mu = \cos \theta$ , где  $\theta$  - угол между направлением произвольного единичного вектора  $\vec{\Omega}$  и осью  $x$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Рассмотрим еще одну ось, параллельную вектору  $\vec{\Omega}$ . Если  $\xi$  - координата вдоль этой оси, то справедливо равенство  $\frac{d}{d\xi} = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dx}$ . Поэтому интегральное представление для спек-

тральной плотности излучения  $I_v = I_v(\vec{\Omega}, x, t)$  (6.8) позволяет записать его в виде нелинейного интегрального оператора  $I_v(\mu, x, t) = \hat{I}_v(\mu, T)$ :

$$\hat{I}_v(\mu, T) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^x \alpha'_v[T(\xi, t)] \cdot I_{vp}[T(\xi, t)] \cdot \exp\left[-\frac{|\hat{P}_v[T]|}{\mu}\right] d\xi, & \mu > 0 \\ \frac{1}{\mu} \int_x^{\infty} \alpha'_v[T(\xi, t)] \cdot I_{vp}[T(\xi, t)] \cdot \exp\left[\frac{|\hat{P}_v[T]|}{\mu}\right] d\xi, & \mu < 0 \end{cases}$$

где

$$|\hat{P}_v(T)| \equiv |P_v(x, \xi, t)| = \left| \int_x^{\xi} \alpha'_v[T(\epsilon, t)] d\epsilon \right|$$

- интегральный (по пространству) показатель поглощения. Естественно, здесь предполагается, что несобственные интегралы существуют. Тогда, на основании определений, спектральная плотность излучения и спектральный поток излучения также представляются как интегральные операторы:

$$U_v(x, t) \equiv \hat{U}_v(T) = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 \hat{I}_v(\mu, T) d\mu, \quad S_v(x, t) \equiv \hat{S}_v(T) = 2\pi \int_{-1}^1 \hat{I}_v(\mu, T) \mu \cdot d\mu.$$

Плотность потока лучистой энергии тогда записывается  $S = \int_0^{\infty} \mathcal{S}_v(T) dv$ .

Если рассматривать перенос излучения в неподвижном веществе постоянной плотности, то с учетом «плоской» симметрии для энергии вещества получается уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad (6.16)$$

где  $E = \rho c_v$  - энергия единицы объема вещества. Или с использованием уравнения непрерывности излучения:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -c \int_0^{\infty} \alpha'_v(T) [\hat{U}_v(T) - U_{vp}(T)] dv.$$

Дальнейшее изложение теории удобно проводить в безразмерных переменных. В качестве характерных величин примем:  $T_0$  - характерная температура,  $l_0$  - характерная длина

пробега излучения,  $t_0 = \frac{\rho c_v l_0}{4\sigma T_0^4}$  - характерное время ( $\rho = const$  - плотность,  $c_v = const$  - теп-

лоемкость,  $\sigma$  - постоянная Стефана-Больцмана),  $I_0 = \frac{\sigma T_0^4}{\pi}$  - характерная интенсивность излу-

чения,  $U_0 = \frac{4\pi I_0}{c}$  - характерная объемная плотность лучистой энергии.

[Оглавление.](#)

Для обозначения безразмерных переменных используем те же обозначения, что и для размерных. Тогда для безразмерных величин спектральной плотности лучистой энергии  $U_v(x,t)$  и спектральной плотности потока излучения  $S_v(x,t)$  после интегрирования по углу можно записать:

$$U_v(x,t) \equiv \hat{U}_v(T) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} I_{vp}(T) \alpha'_v(T) W_1(|\hat{P}_v(T)|) d\xi, \quad (6.17)$$

$$S_v(x,t) \equiv \hat{S}_v(T) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} I_{vp}(T) \cdot \alpha'_v(T) \cdot W_2(|\hat{P}_v(T)|) \cdot \text{sgn}(x-\xi) d\xi. \quad (6.18)$$

Здесь  $W_i = \int_1^{\infty} e^{-z\tau} \tau^{-i} d\tau$ ,  $i = 1, 2$  - интегральная показательная функция. Отметим также, что в

безразмерных переменных  $\int_0^{\infty} I_{vp}(T) dv = T^4$ ,  $\int_0^{\infty} U_{vp} dv = T^4$ .

Пусть в начальный момент времени  $t=0$  температура вещества известна  $T(x,0) = T_0(x) \geq 0$ . Тогда из интегральных соотношений можно определить  $U_v(x,0)$  и  $S_v(x,0)$ . Задача состоит в определении температуры вещества, а также потоков лучистой энергии в любой другой момент времени:  $T(x,t)$ ,  $U_v(x,t)$ ,  $S_v(x,t)$ ,  $t > 0$ . Даже в таком «упрощенном» виде задача является слишком сложной для исследования.

### 6.7. Одногрупповое приближение, простая волна.

Еще упростим задачу, рассмотрим одногрупповое приближение. В этом, «сером», приближении коэффициент поглощения считается независимым от частоты  $\alpha'_v(T) = \alpha'(T)$  и для него вводится приближенная зависимость от температуры (в безразмерном виде)

$$\alpha'(T) = T^{-\gamma}, \quad 1,5 \leq \gamma \leq 3.$$

Особенностью поведения среднего коэффициента поглощения  $\alpha'(T)$  является его неограниченное возрастание:  $\alpha'(T) \rightarrow \infty$  при  $T \rightarrow 0$ . Это означает, что длина свободного пробега излучения становится очень малой в холодном веществе.

В «сером» приближении система уравнений, описывающая лучистый перенос энергии, выглядит наиболее просто. После интегрирования по частоте уравнение переноса излучения и выражение для лучистого потока энергии записываются в виде

$$\mu \frac{dI}{dx} = \alpha'(T^4 - I), \quad S = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \hat{I}(\mu, T) \cdot \mu d\mu. \quad (6.19)$$

#### [Оглавление.](#)

Эти соотношения должны рассматриваться совместно с уравнением переноса энергии в неподвижном веществе (6.16).

Для выяснения характерных особенностей лучистого теплопереноса при неограниченном возрастании коэффициента поглощения при  $T \rightarrow 0$  рассмотрим частное решение типа «простой волны». В этом случае предполагается, что  $T = T(\eta)$ ,  $I = I(\mu, \eta)$ , где  $\eta = x - v \cdot t$ , а  $v \neq 0$  - некоторая постоянная, имеющая смысл скорости тепловой волны (см. рис. 6.7). (На рисунке (6.7) заранее учтена возможность существования фронта, то есть границы отделяющей нагретое вещество от холодного.)

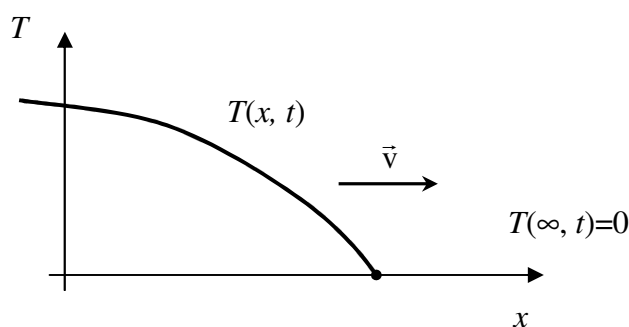


Рис. 6.7. Решение типа «простая волна».

Будем искать решения поставленной задачи в разделяющихся переменных

$$I(\mu, \eta) = \Phi(\eta) \cdot \varphi(\mu).$$

Уравнение переноса излучения (6.19) в этих переменных имеет вид:

$$\mu \cdot \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \varkappa' (T^4 - \Phi \cdot \varphi).$$

Переменные разделяются, если  $\Phi = T^4$ . Соответственно, получаем:

$$\frac{1}{\varkappa'} \frac{1}{T^4} \frac{\partial T^4}{\partial \eta} = \frac{1 - \varphi}{\mu \varphi} = \beta, \quad (6.20)$$

где  $\beta = const$  - постоянная разделения переменных.

Из (6.20) следует

$$\varphi = \frac{1}{1 + \mu \beta}.$$

Тогда из определения потока лучистой энергии (6.19) находим

$$S = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu, \eta) \cdot \mu d\mu = \frac{1}{2} T^4 \int_{-1}^1 \frac{\mu}{1 + \beta \mu} d\mu = T^4 \frac{1}{\beta} \left[ 1 - \frac{1}{2\beta} \ln \left| \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right| \right].$$

В свою очередь объемная плотность лучистой энергии

$$U = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\eta, \mu) d\mu = \frac{1}{2} T^4 \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + \beta\mu} d\mu = T^4 \frac{1}{2\beta} \ln \left| \frac{\beta+1}{\beta-1} \right|.$$

Уравнение переноса энергии (6.16) в случае простой волны имеет вид:

$$-v \frac{\partial E}{\partial \eta} = -\frac{\partial S}{\partial \eta},$$

следовательно,

$$v \frac{\partial E}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ T^4 \frac{1}{\beta} \left[ 1 - \frac{1}{2\beta} \ln \left| \frac{\beta+1}{\beta-1} \right| \right] \right\}.$$

Переменные в последнем уравнении разделяются, если  $E = T^4$  (еще одно условие разделения переменных), тогда скорость волны определяется выражением

$$v = \frac{1}{\beta} \left[ 1 - \frac{1}{2\beta} \ln \left| \frac{\beta+1}{\beta-1} \right| \right]. \quad (6.21)$$

Температура определяется из уравнения (см. (6.20))

$$\frac{1}{\varkappa' T^4} \frac{dT^4}{d\eta} = \beta,$$

или, после интегрирования с учетом существования фронта  $T = 0$  при  $\eta = \eta_f$ ,  $\eta_f = const$  получаем

$$\eta - \eta_f = \frac{4}{\beta} \int_0^T \frac{d\varepsilon}{\varepsilon \cdot \varkappa'(\varepsilon)}.$$

То есть граница фронта  $\eta = \eta_f$  строго разграничивает нагретое вещество ( $T > 0$ ) от холодного, где  $T = 0$ .

Условием существования фронта является существование интеграла

$$\int_0^T \frac{d\varepsilon}{\varepsilon \cdot \varkappa'(\varepsilon)} < \infty, \quad T > 0.$$

Если в качестве примера задать  $\varkappa'(T) = T^{-\gamma}$ , то для температуры тепловой волны по-

лучаем 
$$T = \left[ \frac{\beta\gamma}{4} \cdot (\eta - \eta_f) \right]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Проанализируем зависимость скорости тепловой волны от параметра разделения  $v(\beta)$ , задаваемой формулой (6.21). Возможная область значений постоянной разделения лежит в интервале  $\beta \in (-1, 0)$ . При малых значениях  $\beta \rightarrow -0$  справедливо  $\ln \left| \frac{\beta+1}{\beta-1} \right| = 2\beta + \underline{O}(\beta^3)$ ,



следовательно, на одном конце интервала  $v = -\frac{1}{3}\beta$ . На другом конце интервала при

$\beta \rightarrow -1+0$   $v \rightarrow \infty$ .

Результаты расчета функции  $v(\beta)$  приведены на рис. 6.8.

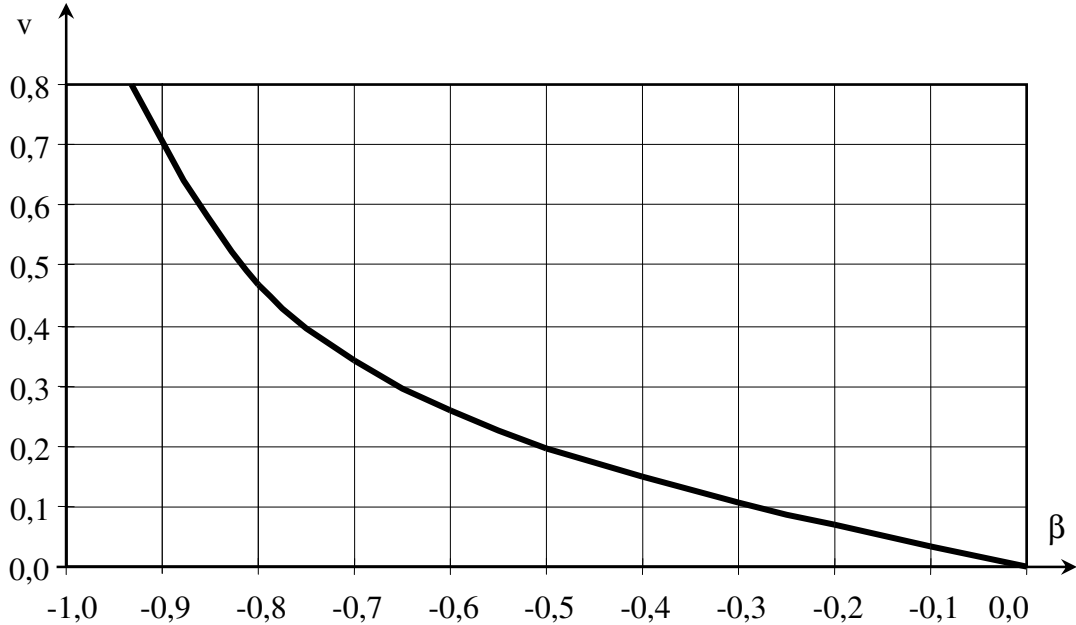


Рис. 6.8. Результаты расчета функции  $v(\beta)$ .

На рис. 6.9 в полярных координатах  $(i, \theta)$  приведена диаграмма излучения

$$i = \frac{I(\mu, \eta)}{T^4} = \frac{1}{1 + \beta\mu}, \quad \mu = \cos \theta$$

в некоторой точке на оси  $\eta$  для двух значений скорости волны  $v$ .

Таким, образом, в рамках рассматриваемой задачи установлено, что существует только волна нагрева (скорость волны  $v > 0$ ), что физически может быть связано с отсутствием в данном случае объемных источников (стоков) тепла. Пространственная локализация (наличие фронтальной поверхности) определяется условием существованием интеграла

$$\int_0^T \frac{d\varepsilon}{\varepsilon \cdot \varkappa'(\varepsilon)} < \infty, \quad (6.22)$$

которое требует неограниченного возрастания коэффициента поглощения при  $T \rightarrow 0$ . Это условие выполняется, например, для приведенных выше оценок среднего коэффициента поглощения  $\varkappa'(T) = T^{-\gamma}$ ,  $1,5 \leq \gamma \leq 3$ .

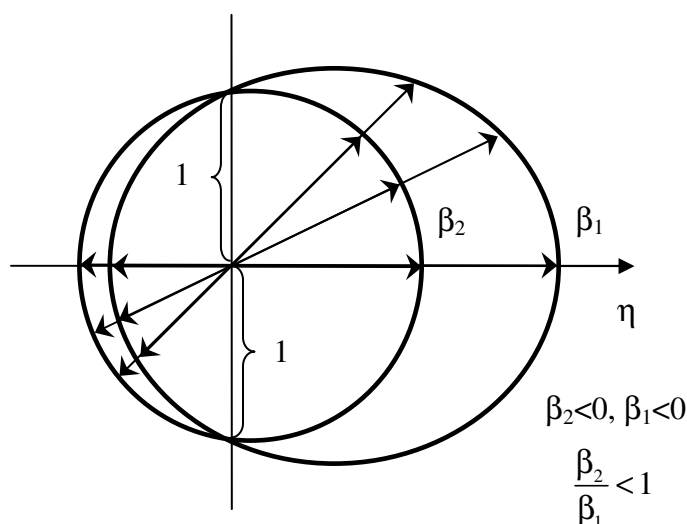


Рис. 6.9. Диаграмма излучения

Более детальный анализ проблемы, из которого следует, что вблизи фронтовой поверхности система уравнений переноса лучистой энергии асимптотически совпадает с исследуемой системой уравнений, позволяет сделать вывод, что полученные качественные результаты сохраняются и в общем случае. А именно, в отсутствие объемного поглощения тепла может существовать только волна нагрева (либо фронт волны остается неподвижным); необходимым условием существования фронта является существование интеграла (6.22), что требует неограниченного возрастания коэффициента поглощения  $\alpha'(T)$  при  $T \rightarrow 0$ .

### 6.8. Принцип максимума при лучистом теплопереносе.

Из вышеизложенного видно, что при попытках решения даже простейших задач лучистого теплопереноса возникают математические трудности, не позволяющие решить задачу аналитически до конца даже в квадратурах. Поэтому особую роль при анализе задач лучистого теплопереноса играют качественные методы, позволяющие если не решить задачу, то хотя бы получить качественные выводы о характере решения и его дифференциальных свойствах.

Предварительно необходимо сделать некоторые предположения о поведении оптических характеристик вещества при нагреве. Сформулируем их в виде неравенств, имеющих ясный физический смысл. Пусть  $T_1 > 0$  и  $T_2 > 0$  два разных значения температуры вещества, причем  $T_2 > T_1$ . Тогда обязательно должны выполняться условия

$$\alpha'_v(T_1) \geq \alpha'_v(T_2), \quad I_{vp}(T_1) \cdot \alpha'_v(T_1) < I_{vp}(T_2) \cdot \alpha'_v(T_2), \quad (6.23)$$

Первое из неравенств (6.23) означает, что при увеличении температуры вещества длина пробега не уменьшается для всех частот, второе соответствует физически очевидному факту, что при нагреве светимость увеличивается. Иными словами, предполагается, что оптические характеристики вещества должны вести себя монотонно и в соответствии с физическими представлениями о тепловом излучении. Если, например, в веществе отсутствует локальное термодинамическое равновесие излучения и вещества, то второе из неравенств (6.23) может нарушаться. В этом случае излучение нельзя считать тепловым.

В основе одного из качественных методов анализа лежит обобщенный принцип максимума. Приведем одну из формулировок обобщенного принципа максимума для случая плоской симметрии. Сначала сформулируем задачу об эволюции начального распределения температуры вещества (задачу Коши).

Предположим, что существует функция  $T(x, t) \in C^{0,1}(Z)$ ,  $Z = R \times R_+$  - температура вещества, являющаяся решением системы уравнений лучистого теплопереноса: уравнения энергии вещества (6.16); уравнения переноса излучения, которое в безразмерных переменных при плоской симметрии записывается в виде

$$\mu \frac{\partial I_v}{\partial x} = \alpha'_v (I_{vp} - I_v)$$

и определения плотности потока лучистой энергии в безразмерных переменных

$$S \equiv \hat{S}(T) = \int_0^\infty \hat{S}_v(T) dv, \quad \hat{S}_v = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \hat{I}_v(\mu, T) \cdot \mu d\mu.$$

Предполагается также, что искомая неотрицательная функция  $T(x, t)$  удовлетворяет следующим условиям:

ограничена сверху

$$0 \leq T(x, t) < M < \infty, \quad M = \text{const} > 0, \quad (x, t) \in Z;$$

удовлетворяет начальному условию

$$T(x, 0) = T_0(x) \geq 0, \quad T_0(x) \in C(R),$$

причем  $\int_{-\infty}^{\infty} T_0(x) dx < \infty$ ;

и граничным условиям

$$T|_{|x|=\infty} = S|_{|x|=\infty} = 0, \quad t \in R_+.$$

Отметим, что из последнего условия и уравнения энергии непосредственно следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} E[T(x, t)] dx = 0$$

[Оглавление.](#)

и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} E[T(x,t)]dx = \text{const} > 0, \quad t \in R_+$$

т.е. полная энергия начального нагрева вещества сохраняется (здесь предполагается, что все условия, налагаемые на функцию  $T(x,t)$ , справедливы и для функции  $E[T(x,t)]$ ).

Наряду с решением задачи Коши назовем некоторую функцию  $\theta(x,t)$  *суперрешением* уравнения энергии вещества, если она обращает это уравнение в неравенство:

$$E'_t(\theta) + \hat{S}'_x(\theta) \geq 0. \quad (6.24)$$

При этих условиях может быть сформулирована теорема сравнения по начальным данным, которая и является обобщенным принципом максимума.

**Теорема 6.1.** Если функция  $T(x,t) \in C^{0,1}(Z)$  является решением задачи Коши, а функция  $\theta(x,t) \in C^{0,1}(Z)$  является суперрешением и  $\theta(x,0) \geq T_0(x)$ , то  $\theta(x,t) \geq T(x,t)$ ,  $(x,t) \in R \times [0, t_0]$ , где  $t_0 > 0$  – любое, сколь угодно большое число.

Таким образом, любая функция, непрерывная по координате и дифференцируемая по времени, может выступать в качестве мажорирующей для решения. Например, однородная по пространству функция  $\theta(t)$ , обращающая в соответствующее неравенство уравнение энергии вещества и удовлетворяющая неравенству  $\theta(0) \geq T_0(x)$ ,  $\forall x \in R$  мажорирует решение задачи Коши  $\theta(t) \geq T(x,t)$ ,  $(x,t) \in Z$ . Найти функцию  $\theta(t)$  существенно проще, чем само решение.

Заметим, что решение задачи Коши одновременно является и его суперрешением. Поэтому на основании теоремы сравнения, оно может быть использовано в качестве мажоранты для любого другого решения задачи Коши, удовлетворяющего тому же начальному условию. Тем самым устанавливается единственность решения.

Аналогичная теорема сравнения может быть доказана для *субрешения* задачи Коши, для которого выполняется неравенство, противоположное (6.24). Это субрешение мажорируется решением задачи Коши.

Обобщенная теорема сравнения может быть доказана и при наличии в веществе выделения или поглощения тепла в виде распределенных источников (стоков) энергии, мощность которых зависит от температуры вещества.

### 6.9. Развитие динамических возмущений при интенсивном нагреве газа от стенки.

Одной из основных особенностей интенсивного теплового воздействия на вещество является сильная пространственная неоднородность его температуры. В результате в веществе нарушается механическое равновесие, что, как показывает эксперимент, может привести к макроскопическому движению и возникновению ударных волн. При этом локальное термодинамическое равновесие не нарушается.

Задача состоит в том, чтобы выяснить возможный механизм самозарождения ударной волны, связанный исключительно с теплопередачей при интенсивном нагреве вещества (газа). Рассмотрим классическую постановку задачи о нагреве неподвижного в начальный момент газа покоящейся плоской стенкой, тем самым, исключая непосредственное механическое воздействие на газ.

В качестве теплофизической модели рассматривается идеальный газ с термическим уравнением состояния

$$p = \frac{R\rho T}{\mu},$$

$p$  – давление,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $\rho$  – плотность,  $T$  – температура,  $\mu$  – молярная масса, и калорическим уравнением состояния

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho},$$

$\varepsilon$  – внутренняя энергия единицы массы газа,  $\gamma$  – показатель адиабаты.

Газ считается нелинейно-теплопроводным с коэффициентом теплопроводности

$$\lambda(T) = n \cdot \lambda_0 \cdot T^{n-1},$$

где  $n = const \geq 1$ ,  $\lambda_0 = const > 0$ , т.е. лучистая теплопередача рассматривается в приближении лучистой теплопроводности.

Пусть полупространство  $x > 0$  (см. рис. 6.10) заполнено неподвижным идеальным газом с постоянной плотностью  $\rho_0 > 0$ . Начиная с момента времени  $t = 0$  на непроницаемой для газа границе области  $x = 0$ , температура меняется по степенному закону

$$T = \tau_0 \cdot t^k,$$

где  $\tau_0 = const > 0$ ,  $k = const > 0$  и тепло проникает в область  $x > 0$ .

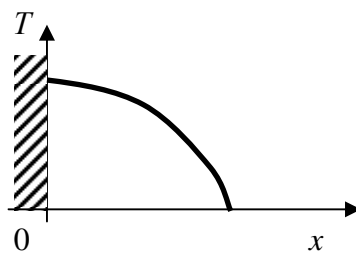


Рис. 6.10. Начальное условие

Система уравнений для описания движения газа имеет вид:

- уравнение непрерывности  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$ ;

- уравнение динамики (перенос импульса)  $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{R}{\mu} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{RT}{\mu \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ ;

- уравнение энергии вещества (перенос энергии)  $\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + (\gamma - 1) T \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\lambda_0}{\rho} \frac{\partial^2 T^n}{\partial x^2}$ .

Записанная система уравнений должна быть дополнена граничными условиями при  $x = 0$ ,  $t > 0$

$$T = \tau_0 t^k, u = 0;$$

при  $x = \infty$ ,  $t > 0$

$$T = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0, u = 0, \rho = \rho_0;$$

и начальными условиями при  $t = 0$ ,  $x > 0$

$$T = 0, u = 0, \rho = \rho_0.$$

Эти соотношения служат для определения скорости  $u(x, t)$ , плотности  $\rho(x, t)$  и температуры газа  $T(x, t)$  при  $(x, t) \in R_+ \times R_+$ .

Если пренебречь движением газа (т.е. принять, что  $u(x, t) \equiv 0$ ,  $\rho(x, t) \equiv \rho_0$ ), то краевая задача для температуры  $T(x, t)$  становится автомодельной.

При показателе  $n > 1$  в законе лучистой теплопроводности особенностью теплопереноса является его фронтовой характер. То есть, в пространстве независимых переменных существует некоторая поверхность, задаваемая уравнением  $x = x_f(t)$ ,  $x_f(0) = 0$ , которая отделяет нагретую область газа  $T(x, t) > 0$ ,  $x < x_f(t)$  от холодной  $T(x, t) = 0$ ,  $x \geq x_f(t)$ .

Несмотря на то, что при  $t > 0$  газ приходит в движение и скорость газа, вообще говоря,  $u(x, t) \neq 0$ , фронтовая поверхность  $x = x_f(t)$  все равно существует. То есть «естественным» линейным размером является величина зоны прогрева газа  $x_f(t)$ .

Для дальнейшего анализа удобно перейти к безразмерным переменным в их «естественном» виде, учитывающем предполагаемый характер движения газа. В качестве характерных величин примем:  $\rho_0$  – плотность неподвижного газа,  $T_0 = \left[ \frac{R\rho_0}{\mu\lambda_0\tau_0^{1/k}} \right]^{\frac{k}{k(n-2)-1}}$  – характерная температура,  $u_0 = \sqrt{RT_0/\mu}$  – изотермическая скорость звука при характерной температуре,

$x_0 = \frac{\lambda_0 T_0^{n-1}}{\rho_0 u_0}$  – характерная длина,  $t_0 = \frac{T_0}{\tau_0^{1/k}}$  – характерное время. Переход к «естественным»

безразмерным независимым переменным осуществляется по формулам:

$$(t, x) \mapsto \left( t^* = \frac{t}{\tau_0}, \eta = \frac{x}{x_f(t)} \right)$$

(в дальнейшем безразмерное время  $t^*$  будет обозначаться также как и размерное  $t$ ).

Для безразмерных зависимых переменных введем обозначения, заранее учитывая их предполагаемый характер изменения, основанный на известном автомодельном решении для температуры и начальных и граничных условиях

$$T(\eta, t) = T_0 \cdot t^k \cdot \theta(\eta, t),$$

$$\rho(\eta, t) = \rho_0 \cdot (1 + t^\beta \cdot r(\eta, t)),$$

$$u(\eta, t) = u_0 \cdot t^\alpha \cdot v(\eta, t),$$

$$x_f(t) = x_0 \cdot t^\sigma \cdot a(t).$$

Для автомодельного решения в неподвижном газе  $\theta(\eta, t) = \theta(\eta)$ ,  $a(t) = const$ .

Постоянные величины  $\alpha > 0, \beta > 0, \sigma > 0$  подлежат определению. В новых переменных система уравнений, описывающая движение газа преобразуются к виду:

- уравнение непрерывности

$$\beta \cdot t^{\beta-1} r + t^\beta \frac{\partial r}{\partial t} - \left( \dot{a} + \frac{\sigma a}{t} \right) \frac{\eta t^\beta}{a} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{t^{\alpha-\sigma}}{a} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ v \cdot (1 + t^\beta r) \right] = 0,$$

- уравнение динамики

$$\alpha t^{\alpha-1} v + t^\alpha \frac{\partial v}{\partial t} - \left( \dot{a} + \frac{\sigma a}{t} \right) \frac{\eta t^\alpha}{a} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{t^{\alpha-\sigma} v}{a} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{t^{k-\sigma}}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{t^{k+\beta-\sigma}}{a \cdot (1 + t^\beta r)} \frac{\partial r}{\partial \eta} = 0,$$

- уравнение энергии

$$kt^{k-1} \theta + t^k \frac{\partial \theta}{\partial t} - \left( \dot{a} + \frac{\sigma a}{t} \right) \frac{\eta t^k}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{t^{\alpha+k-\sigma} v}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + (\gamma - 1) \frac{t^{k+\alpha-\sigma} \theta}{a} \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{t^{kn-2\sigma}}{a^2 (1 + t^\beta r)} \frac{\partial^2 \theta^n}{\partial \eta^2},$$

где  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ .

[Оглавление.](#)

Запишем полученную систему в символической форме, выписывая в скобках лишь показатели степени  $t$  у соответствующих слагаемых:

$$\begin{aligned}(\beta-1)+\beta-\beta-(\beta-1)+(\alpha-\sigma)+(\alpha+\beta-\sigma) &= 0, \\(\alpha-1)+(\alpha)-(\alpha)-(\alpha-1)+(2\alpha-\sigma)+(k-\sigma)+(k+\beta-\sigma) &= 0, \\(k-1)+(k)-(k)-(k-1)+(\alpha+k-\sigma)+(k+\alpha-\sigma) &= (kn-2\sigma)\end{aligned}$$

Если теперь принять, в силу предполагаемого характера движения газа, что функции  $v(\eta, t)$ ,  $r(\eta, t)$ ,  $\theta(\eta, t)$ ,  $a(t)$  асимптотически эквивалентны  $O(1)$  при  $t \rightarrow 0$ , то из символической записи однозначно определяются постоянные

$$\alpha = \frac{1}{2}[k(3-n)+1], \quad \beta = k(2-n)+1, \quad \sigma = \frac{1}{2}[k(n-1)-1].$$

Система уравнений движения газа в новых переменных приобретает вид

$$\begin{aligned}\beta \cdot r - \sigma \cdot \eta \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{t^\beta}{a} \frac{\partial (v \cdot r)}{\partial \eta} + t \cdot \left[ \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\dot{a} \eta}{a} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right] &= 0, \\ \alpha v - \sigma \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{t^\beta}{a} \left[ \frac{\theta}{1+t^\beta r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + v \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + t \left[ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] &= 0, \\ k\theta - \sigma \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{1}{a^2 (1+t^\beta r)} \frac{\partial^2 \theta^n}{\partial \eta^2} + \frac{t^\beta}{a} \left[ v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + (\gamma-1)\theta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] + t \left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] &= 0.\end{aligned}\tag{6.25}$$

Если в уравнениях движения газа пренебречь малыми величинами более высокого порядка малости при  $t \rightarrow 0$ , то получается асимптотический вид уравнений при  $t \rightarrow 0$ .

Как и предполагалось, в этом приближении краевая задача для температуры не зависит от движения газа, а для функций  $\theta(\eta, t) = \theta(\eta)$  и  $a(t) = const$ , получим уравнение

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 (\theta^n)}{\partial \eta^2} + \sigma \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - k\theta = 0,$$

которое должно решаться с граничными условиями

$$\theta|_{\eta=0} = 1, \quad \theta|_{\eta=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta^n}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = 0.\tag{6.26}$$

Следует отметить, что количество граничных условий превосходит порядок уравнения. В данном случае «лишнее» условие служит для определения постоянной  $a$ .

Для динамических переменных аналогично получаем:

$$\beta r - \sigma \eta \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad \alpha v - \sigma \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0,\tag{6.27}$$

с граничными условиями при  $\eta = 0$

$$v = 0\tag{6.28}$$

[Оглавление.](#)



и при  $\eta = 1$

$$v = 0, \quad r = 0 \quad (6.29)$$

Как видно, здесь функции  $v(\eta, t)$ ,  $r(\eta, t)$  также явно не зависят от  $t$ . Интегрируя с учетом граничных условий (6.28), получим

$$v = \eta^{\alpha/\sigma} \frac{1}{a\sigma} \int_1^\eta \eta^{-(1+\frac{\alpha}{\sigma})} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\eta, \quad r = \eta^{\beta/\sigma} \frac{1}{a\sigma} \int_1^\eta \eta^{-(1+\frac{\beta}{\sigma})} \frac{\partial v}{\partial \eta} d\eta.$$

Вычислим значения функций  $v(\eta, t)$ ,  $r(\eta, t)$  на стенке, то есть при  $\eta = 0$ . Применяя правило Лопиталья, найдем

$$v|_{\eta=0} = \lim_{\eta \rightarrow 0} v(\eta) = -\frac{1}{a\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \neq 0, \quad v|_{\eta=0} = \lim_{\eta \rightarrow 0} v(\eta) = -\frac{1}{a\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \neq 0.$$

Как видно, условия непроницаемости стенки для газа оказываются невыполненными.

Невыполнение граничного условия в асимптотическом представлении функции  $v(\eta, t)$  означает, что вблизи границы  $\eta = 0$  есть тонкий пограничный слой, в котором функция  $v(\eta, t)$  меняется от значений  $O(1)$  на внешней границе слоя до нуля при  $\eta = 0$ . Оценить толщину этого динамического пограничного слоя можно, считая, что стенка ( $\eta = 0$ ) является источником динамических возмущений, скорость которых равна местной скорости звука  $u_c \sim T(0, t)^{1/2}$ . Тогда, сравнивая законы движения тепловой волны  $x_f \sim t^\sigma$ , с законом распространения звуковых возмущений  $x_c \sim t^{\frac{k+2}{2}}$ , найдем толщину динамического пограничного слоя:  $\eta \sim t^{\beta/2}$ .

Для выяснения асимптотического характера решения в области динамического пограничного слоя перейдем к новой независимой переменной  $\eta^* = \frac{\eta}{\varepsilon}$  и новым зависимым динамическим переменным

$$r^* = \varepsilon^{-\delta} r, \quad v^* = \varepsilon^{-\omega} \cdot v$$

полагая  $\varepsilon = O(t^{\beta/2})$  и считая, что  $r^*$  и  $v^*$  имеют порядок  $O(1)$  внутри динамического пограничного слоя. При этом предполагается, что в пределах динамического пограничного слоя

$$\theta(\eta, t) \approx \theta(0, t), \quad \theta'_\eta \approx \theta'_\eta|_{\eta=0}, \quad \theta''_{\eta\eta} \approx \theta''_{\eta\eta}|_{\eta=0}.$$

То есть, в соответствии с предполагаемым характером процесса, динамические возмущения слабо влияют на лучистый теплоперенос.

Тогда из уравнений (6.25) получим систему уравнений движения газа в новых переменных

#### Оглавление.

$$\begin{aligned} \beta \varepsilon^\delta r^* - \sigma \eta^* \varepsilon^\delta \frac{\partial r^*}{\partial \eta^*} + \frac{\varepsilon^{\omega-1}}{a} \frac{\partial v^*}{\partial \eta^*} + t^\beta \left[ \varepsilon^{\omega+\delta-1} \frac{\partial (r^* v^*)}{\partial \eta^*} \right] + t \left[ \varepsilon^\delta \frac{\partial r^*}{\partial t} - \frac{\dot{a} \varepsilon^\delta}{a} \eta^* \frac{\partial r^*}{\partial \eta^*} \right] &= 0, \\ \alpha \varepsilon^\omega v^* - \sigma \eta^* \varepsilon^\omega \frac{\partial v^*}{\partial \eta^*} + \frac{\theta'_\eta}{a} + t^\beta \left[ \frac{\varepsilon^{2\omega-1}}{a} v^* \frac{\partial v^*}{\partial \eta^*} + \frac{\varepsilon^{\delta-1}}{a(1+t^\beta \varepsilon^\delta r^*)} \theta \frac{\partial r^*}{\partial \eta^*} \right] + t \left[ \varepsilon^\omega \frac{\partial v^*}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \varepsilon^\omega \eta^* \frac{\partial v^*}{\partial \eta^*} \right] &= 0, \\ k\theta - \sigma \varepsilon \eta^* \theta'_\eta - \frac{1}{a^2 (1+t^\beta \varepsilon^\delta r^*)} (\theta^n)''_{\eta\eta} + t^\beta \left[ \frac{\varepsilon^\omega}{a} v^* \theta'_\eta + (\gamma-1) \frac{\varepsilon^{\omega-1}}{a} \theta \frac{\partial v^*}{\partial \eta^*} \right] + t \left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \theta'_\eta \right] &= 0. \end{aligned}$$

Запишем полученную систему в символической форме, выписывая в квадратных скобках только малые параметры, определяющие асимптотический характер соответствующих слагаемых:

$$\begin{aligned} [\varepsilon^\delta]_0 + [\varepsilon^\delta]_0 + [\varepsilon^{\omega-1}]_0 + [t^\beta \varepsilon^{\delta+\omega-1}] + [t \varepsilon^\delta] &= 0, \\ [\varepsilon^\omega]_0 - [\varepsilon^\omega]_0 + [\varepsilon^0]_0 + [t^\beta \varepsilon^{2\omega-1}] + [t^\beta \varepsilon^{\delta-1}] + [t \varepsilon^\omega] &= 0, \\ [\varepsilon^0]_0 - [\varepsilon]_0 - [\varepsilon^0]_0 + [t^\beta \varepsilon^\omega] + [t^\beta \varepsilon^{\omega-1}] + [t] &= 0. \end{aligned}$$

Здесь индексом «0» отмечены слагаемые, на основе которых найдено «нулевое» приближение (6.27). Будем считать, что  $\beta > 2$ , тогда из символических уравнений следует  $\omega = 0$ ,  $\delta = -1$ , и одновременно можно записать искомую систему уравнений, являющуюся следствием уравнений движения газа, асимптотически равномерно при  $0 < \eta < 1$  описывающих процесс с точностью до величин порядка  $O(t)$ :

$$\begin{aligned} \beta r - \sigma \eta \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{t^\beta}{a} \frac{\partial (vr)}{\partial \eta} &= O(t), \tag{6.30} \\ \alpha v - \sigma \eta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{t}{a} \left[ v \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\theta}{(1+t^\beta r)} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right] &= O(t), \\ k\theta - \sigma \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{1}{a^2} \frac{\theta}{(1+t^\beta r)} \frac{\partial^2 \theta^n}{\partial \eta^2} + \frac{t^\beta}{a} \left[ v \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + (\gamma-1) \theta \frac{\partial r}{\partial \eta} \right] &= O(t), \end{aligned}$$

и которая должна решаться с выписанными ранее граничными условиями (6.26), (6.28), (6.29).

Рассмотрим вначале эту систему при  $\eta \rightarrow 1$ , то есть вблизи фронта тепловой волны.

Выполнение граничных условий означает, что все функции  $\vartheta, r, v \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow 1$  и справедлива асимптотическая форма уравнений (6.30) вида:

$$-\sigma \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \quad -\sigma \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0, \quad -\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 (\theta^n)}{\partial \eta^2} = 0.$$

Откуда, интегрируя с учетом граничных условий, получим:

#### Оглавление.

$$\theta = \left[ \frac{n-1}{n} a^2 \sigma \cdot (1-\eta) \right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad v = \frac{\theta}{\sigma a}, \quad r = \frac{\theta}{a^2 \sigma^2}.$$

Как видно, производная  $\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=1}$  не существует при  $n > 2$ . Поэтому в этом случае для численного интегрирования необходимо пользоваться этими асимптотическими представлениями в окрестности границы  $\eta = 1$ .

Предположим теперь, что функция  $\theta(\eta, t)$  известна, тогда функции  $v(\eta, t)$  и  $r(\eta, t)$  определяются из уравнений (6.30), которые в каноническом виде записываются

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = \frac{R(\eta, v, r, t)}{Q(\eta, v, r, t)}, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{P(\eta, v, r, t)}{Q(\eta, v, r, t)}, \quad (6.31)$$

где

$$\begin{aligned} R(\eta, v, r, t) &= (1+t^\beta r) \cdot (a\alpha v + \theta'_\eta) + a\beta r \cdot (a\sigma\eta - t^\beta v), \\ P(\eta, v, r, t) &= a\beta \frac{t^\beta r \cdot \theta}{(1+t^\beta r)} + (a\sigma\eta - t^\beta v) \cdot (a\alpha v + \theta'_\eta), \\ Q(\eta, v, r, t) &= (a\sigma\eta - t^\beta v)^2 - t^\beta \cdot \theta. \end{aligned}$$

Точка  $(\eta_s, v_s, r_s)$  пространства переменных  $\Omega(\eta, v, r)$  в которой выражения  $R, P, Q$  одновременно обращаются в нуль, является особой точкой для системы уравнений. Благодаря наличию особой точки появляется возможность удовлетворить всем граничным условиям по динамическим переменным (6.28), (6.29) при выборе соответствующей интегральной кривой.

Для обнаружения характера интегральной кривой необходимо установить тип особой точки системы уравнений (6.31). Исследовать тип особой точки в общем случае затруднительно, поэтому понизим точность асимптотических уравнений (6.31), ограничиваясь слагаемыми  $O(1)$  в символической записи системы уравнений. В этом приближении первых два уравнения системы (6.30) упрощаются

$$\begin{aligned} \beta r - \sigma\eta \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \eta} &= 0, \\ \alpha v - \sigma\eta \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{a} \theta'_\eta + \frac{t^\beta \theta}{a} \frac{\partial r}{\partial \eta} &= 0. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Интегрируя первое уравнение системы (6.32) с учетом граничных условий (6.28), (6.29), найдем

$$r = \eta^{\beta/\sigma} \frac{1}{a\sigma} \int_1^\eta \xi^{-(1+\beta/\sigma)} \frac{\partial v}{\partial \xi} d\xi.$$

Тогда второе уравнение системы (6.32) записывается в виде

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \left[ a^2 \sigma \alpha \eta v + a \sigma \eta \theta'_\eta + \frac{\beta}{\sigma} \eta^{\beta/\sigma} \theta t^\beta \int_1^\eta \xi^{-(1+\beta/\sigma)} \frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi, t) d\xi \right] \left[ a^2 \sigma^2 \eta^2 - t^\beta \theta \right]^{-1}.$$

Для выяснения типа особой точки рассмотрим последнее уравнение вблизи особой точки, то есть при  $\eta \rightarrow \eta_s$ ,  $v \rightarrow v_s$ . Для этого введем новые переменные  $\tau = \eta - \eta_s$ ,  $u = v - v_s$  и линеаризуем последнее уравнение по переменным  $\tau, u$ :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\left[ a^2 \sigma \alpha \eta_s + \frac{\beta}{\sigma} \frac{t^\beta \theta_s}{\eta_s} \right] u + B \tau}{\left[ 2a^2 \sigma^2 \eta_s - t^\beta (\theta'_\eta)_s \right] \tau}, \quad (6.33)$$

где постоянная  $B$  вычисляется по формуле

$$B = a^2 \sigma \alpha v_s + a \sigma \left[ (\eta \theta'_\eta)'_\eta \right]_s + \frac{\beta}{\sigma} t^\beta \eta_s^{\beta/\sigma} \left[ \frac{\beta}{\sigma} \frac{\theta_s}{\eta_s} + (\theta'_\eta)_s \right] \int_1^{\eta_s} \xi^{-(1+\beta/\sigma)} \frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi, t) d\xi,$$

а индекс « $S$ » означает, что соответствующая величина определяется при  $\eta = \eta_s$ , то есть в особой точке. Переменная  $t$  в этих соотношениях выступает лишь как параметр.

Уравнение (6.33) эквивалентно линейной автономной динамической системе вида

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\xi} &= \left[ a^2 \sigma \alpha \eta_s + \frac{\beta}{\sigma} \frac{t^\beta \theta_s}{\eta_s} \right] u + B \tau, \\ \frac{d\tau}{d\xi} &= 0 \cdot u + \left[ 2a^2 \sigma^2 \eta_s - t^\beta (\theta'_\eta)_s \right] \tau. \end{aligned}$$

Поведение динамической системы вблизи точки равновесия  $u = \tau = 0$  определяется ее собственными числами

$$\lambda_1 = a^2 \sigma \alpha \eta_s + \frac{\beta}{\sigma} \frac{t^\beta \theta_s}{\eta_s}; \quad \lambda_2 = 2a^2 \sigma^2 \eta_s - t^\beta (\theta'_\eta)_s.$$

Производная  $\theta'_\eta < 0$  во всей области определения  $0 < \eta < 1$ , поэтому  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  и точка равновесия динамической системы есть узел.

Система уравнений (6.31) также может быть переписана в виде автономной динамической системы

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial \xi} = R(\eta, v, r, t) \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} = P(\eta, v, r, t) \\ \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = Q(\eta, v, r, t), \end{cases} \quad (6.34)$$

где  $\xi$  - переменная вдоль интегральной кривой.

Положение точек равновесия динамической системы определяется системой алгебраических уравнений  $R = 0, P = 0, Q = 0$ . Ее особенностью является то, что при выполнении условия  $Q = 0$  первые два уравнения эквивалентны друг другу:

$$\left. \frac{1+t^\beta r}{\sqrt{t^\beta \theta}} P(\eta, v, r, t) \right|_{Q=0} = R(\eta, v, r, t).$$

Следовательно, эти алгебраические уравнения определяют не одну, а целую линию особых точек в пространстве переменных  $\Omega$ .

Проведенное качественное исследование позволяет предложить метод последовательных приближений для численной реализации системы уравнений (6.30) с граничными условиями (6.26), (6.28), (6.29). На начальном этапе расчетов движением газа пренебрегается и функция  $\theta(\eta, t) = \theta(\eta)$  определяется как автомодельное решение задачи для температуры. Затем из системы (6.31) и граничных условий по динамическим переменным (6.28), (6.29) определяются функции  $v(\eta, t)$  и  $r(\eta, t)$ . Далее по известным  $v(\eta, t)$  и  $r(\eta, t)$  из последнего уравнения системы (6.30) определяется уточненная функция  $\theta(\eta, t)$  и процесс повторяется до достижения необходимой точности.

Последнее уравнение системы (6.30) интегрировалось методом Рунге-Кутты по схеме четвертого порядка точности по направлению от границы прогретой зоны  $\eta = 1$ . Тогда выполнение граничного условия  $\theta|_{\eta=0} = 1$  позволяет определить величину  $a(t)$ .

Для численного интегрирования первых двух уравнений системы (6.30) удобнее перейти к динамической системе (6.32). Предельный переход  $\eta \rightarrow \eta_s$  соответствует переходу  $\xi \rightarrow -\infty$ . Поэтому для построения численного решения во всей области определения  $0 < \eta < 1$  необходимо рассмотреть две задачи Коши для динамической системы, соответствующие двум наборам начальных условий

$$\text{при } \eta = 1: v = 0, r = 0$$

$$\text{и при } \eta = 0: v = 0, r = r_0.$$

Так как постоянная  $r_0$  заранее неизвестна, то вторая задача Коши определяет, вообще говоря, однопараметрическое семейство интегральных кривых, образующих некоторую поверхность  $\Omega_1$  в пространстве переменных  $\Omega$ . Причем поверхность  $\Omega_1$  ограничена линией особых точек, существование которой показано выше. Значение неизвестной постоянной  $r_0$  определяется из условия сшивки решений обеих задач Коши в особой точке при  $\xi \rightarrow -\infty$ .

Для численного интегрирования указанных задач Коши применялся метод ломаных Эйлера. Шаг по независимой переменной  $\xi$  задавался переменным по формуле  $\Delta\xi_i = (1 + \delta)\Delta\xi_{i-1}$ , где  $\delta$  - малое число. В процессе расчетов оно выбиралось в пределах от  $10^{-4}$  до  $4 \cdot 10^{-4}$ . Введение неравномерной сетки по  $\xi$  обусловлено двумя причинами. С одной стороны, на фронте тепловой волны велики градиенты всех искомых функций, что вынуждает использовать мелкий шаг по переменной  $\xi$ . С другой стороны, при приближении к особой точке  $\xi \rightarrow -\infty$  «движение» по интегральной кривой «замедляется» и шаг по  $\xi$  необходимо увеличивать.

Таким образом, при реализации метода последовательных приближений возникает необходимость перехода от неравномерной сетки по  $\eta$  к равномерной и обратно. Для этого использовалась линейная интерполяция.

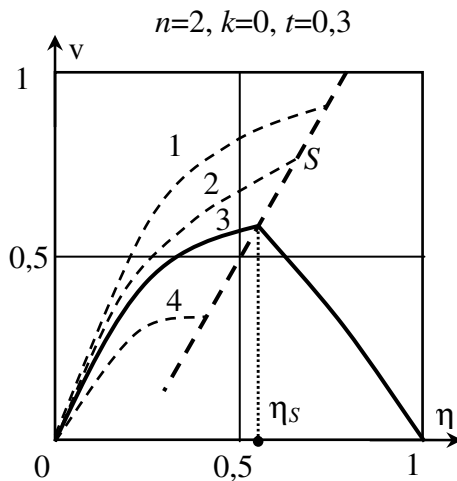


Рис. 6.11.

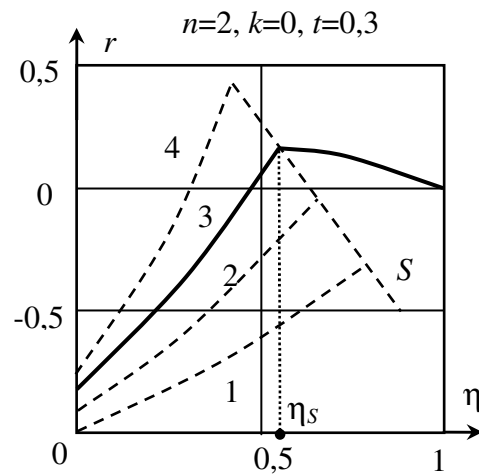


Рис. 6.12.

На рис. 6.11, 6.12 в качестве примера сплошными линиями приведены построенные указанным способом проекции интегральной кривой на плоскости  $\{v, \eta\}$  и  $\{r, \eta\}$  для  $n = 2$ ,  $k = 0$  и  $t = 0,3$ . Штриховыми линиями обозначены проекции нескольких интегральных кривых при  $r(0, t) \neq r_0$ . Причем линии на этих двух рисунках, помеченные одинаковыми цифрами, соответствуют одной интегральной кривой. Штриховая линия, помеченная буквой  $S$ ,

является линией особых точек. Как видно, интегральная кривая в особой точке испытывает слабый разрыв.

Такой характер интегральных кривых сохраняется лишь конечное время. При  $t > t^*(k, n) > 0$  интегральная кривая вблизи особой точки «опрокидывается» и в пространстве переменных  $\Omega_t(\eta, v, r, t) = \Omega \times R_+$  образуется складка. Пример такой в проекциях вблизи особой точки представлен на рис. 6.13, 6.14 (обозначения совпадают с обозначениями на рис. 6.11, 6.12).

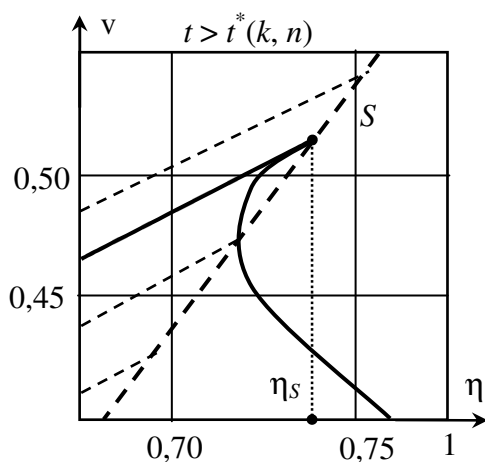


Рис. 6.13.

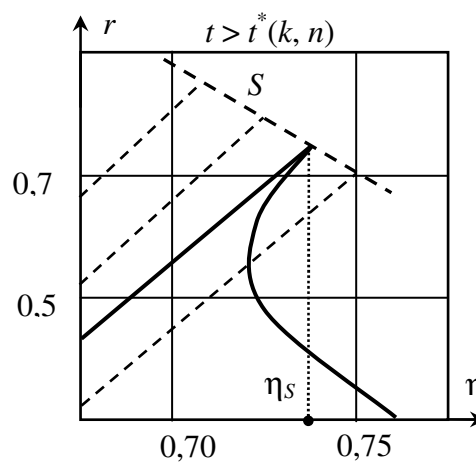


Рис. 6.14.

Исходя из физических соображений, необходимо рассматривать только однозначные решения краевой задачи. Поэтому при  $t > t^*(r, n)$  решение должно содержать сильный разрыв по динамическим переменным. Оно, вообще говоря, скачком переходит с одной интегральной кривой на другую.

Для расчета положения скачка и его величины можно воспользоваться известными соотношениями Гюгонио (адиабата Гюгонио), считая при этом, что температура непрерывна на скачке. Здесь получим соотношения на скачке непосредственно из динамических уравнений для газа.

Пусть скачок наблюдается при  $\eta = \eta_w(t)$ . Тогда значения параметров газа до скачка:

$$v|_{\eta_w+0} = v_+, \quad r|_{\eta_w+0} = r_+ \text{ однозначно связаны с их значениями за скачком: } v|_{\eta_w-0} = v_-, \quad r|_{\eta_w-0} = r_-.$$

Интегрируя первые два уравнения из системы (6.30) в пределах от  $\eta_w - \delta$  до  $\eta_w + \delta$ ,  $\delta > 0$  и затем переходя к пределу  $\delta \rightarrow 0$ , получим

$$a\sigma\eta_w[r] - [v] - t^\beta[vr] = 0,$$

$$a\sigma\eta_w[v] - \frac{t^\beta}{2}[v^2] - \theta_w[\ln(1+t^\beta r)] = 0$$

где  $\theta_w = \theta|_{\eta=\eta_w}$ , а квадратные скобки означают величину скачка для заключенной в них

$$\text{функции. Так, например, } [ \ln(1+t^\beta r) ] = \ln(1+t^\beta r_+) - \ln(1+t^\beta r_-) = \ln\left(\frac{1+t^\beta \cdot (r_- + [r])}{1+t^\beta r_-}\right).$$

Естественно полагать, что непосредственно после возникновения скачок динамических переменных мал:  $[v] \ll 1, [r] \ll 1$ . Тогда, учитывая в разложении логарифма лишь квадратичные по  $[v]$  и  $[r]$  слагаемые, получим искомые соотношения на скачке:

$$[v] = \frac{2}{t^\beta} \chi \cdot (\chi^2 - t^\beta \theta_w) \cdot (\chi^2 + t^\beta \theta_w)^{-1},$$

$$[r] = [v] \cdot (1+t^\beta r_+) \cdot (\chi^2 - t^\beta [v])$$

где  $\chi = a\sigma\eta_w - t^\beta v_+$ .

Из последнего уравнения системы (6.30), аналогично получается выражение, определяющее скачок производной функции  $\theta'(\eta, t)$  при  $\eta = \eta_w$ :

$$n(\theta^{n-2})_w \left[ \frac{1}{1+t^\beta r} \theta'_\eta \right] - a \cdot (\gamma-1) \cdot t^\beta [v] = 0,$$

которое используется при проведении численных расчетов.

Задавая положение скачка  $\eta_w(t)$ , будем определять  $v_+$  и  $r_+$  по известной ветви интегральной кривой, а  $v_-$  и  $r_-$  тогда найдутся из соотношений на скачке. Так как  $\eta_w(t)$  заранее неизвестна, то все возможные значения  $r_-, v_-, \eta_w$  образуют линию  $W$  в пространстве переменных  $\Omega$ . Точка пересечения этой линии с поверхностью  $\Omega_1$  определяет положение скачка. На рис. 6.15, 6.16 приведен качественный вид рассматриваемых кривых вблизи особой точки. Штриховая линия, помеченная на обоих рисунках буквой  $W$ , является линией скачков, то есть она рассчитана по соотношениям на скачке.

Результаты численных расчетов показали, что с вычислительной точностью скачок осуществляется на ту интегральную кривую, которая является непрерывным решением краевой задачи. Соответственно, на рис. 6.15, 6.16 указаны скачки динамических переменных  $v, r$  осуществляющиеся между точками  $A, A'$ .

Расчеты, проведенные в широком интервале изменения показателей  $1 \leq n \leq 5$ ,  $0 \leq k \leq 3$  (то есть был включен и случай линейной теплопроводности), полностью подтверждают разобранный случай. Таким образом, можно считать установленным возможный режим возникновения изотермического разрыва при интенсивном тепловом воздействии на идеальный нелинейно теплопроводный газ. Сильный разрыв по динамическим переменным (скачок) образуется в результате эволюции слабого разрыва, который существует лишь огра-



ниченное время. Дальнейшая эволюция изотермического разрыва и превращение его в ударную волну связана с выходом разрыва на границу тепловой волны. Провести анализ такого процесса возможно только численными методами. Очевидно, что интенсивность возникающей ударной волны в значительной степени определяется процессом ее зарождения.

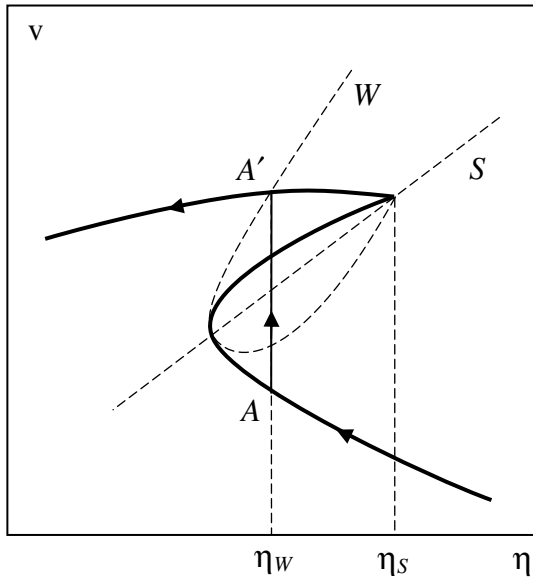


Рис. 6.15

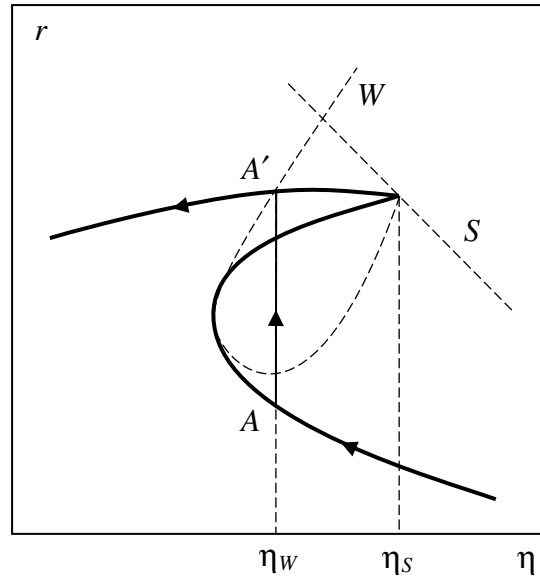


Рис. 6.16

### Рекомендуемая литература

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1 и 2. М.: Наука, 1970.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 тт. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с
3. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. Ч. 1 и 2. М.: Наука, 1991.
4. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит, 2008. 686 с.