МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций

Для студентов всех специальностей

Москва
2009

ФН-12 МГТУ ФН-12 МГТУ ФН-12

Лекция 6

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямая в пространстве. Общие уравнения прямой. Параметрические уравнения прямой; векторное уравнение прямой; канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Взаимное расположение прямой и плоскости, угол между прямой и плоскостью. Взаимное расположение двух прямых в пространстве, угол между прямыми в пространстве. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Расстояние между двумя прямыми.

6.1. Уравнения прямой в пространстве

Общие уравнения прямой в пространстве. Прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей. Если плоскости π_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, π_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$ не параллельны, то пересекаются по прямой. Точка $M(x; y; z)$ принадлежит этой прямой тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению каждой из плоскостей, т.е. являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{6.1}$$

которую называют ***общими уравнениями прямой***.

Векторное уравнение прямой. Описание прямой в пространстве при помощи общих уравнений — не единственный способ. Прямую L в пространстве можно также однозначно задать любой ее точкой M_0 и параллельным ей *ненулевым вектором* $\boldsymbol{s}$.

Любой ненулевой вектор, параллельный прямой, называют ***направляющим вектором прямой***.

Если точка M принадлежит прямой L, то это эквивалентно тому, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ *коллинеарен вектору* $\boldsymbol{s}$ (рис. 6.1). Так как $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0}$, то вектор $\boldsymbol{s}$ является базисом в *пространстве* V_1 коллинеарных ему векторов. Поэтому для некоторого числа t выполняется равенство $\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{s}$. Так как $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$, где $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}_0$ — *радиус-векторы* точек M и M_0 соответственно, то условие $M \in L$ можно записать в виде уравнения

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{s}, \tag{6.2}$$

которое называют ***векторным уравнением прямой*** в пространстве.

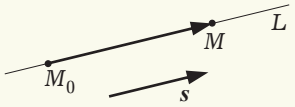

Рис. 6.1

Параметрические уравнения прямой в пространстве. Предположим, что известны *координаты* $\{l; m; n\}$ направляющего *вектора* $\boldsymbol{s}$ прямой L и *точки* $M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$ в *прямоугольной системе координат*. Обозначим через $(x; y; z)$ координаты произвольной точки M.

Критерием принадлежности точки M прямой L является условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ и $\boldsymbol{s}$ (см. рис. 6.1), что равносильно пропорциональности их

координат (см. теорему 2.6). Обозначив через t коэффициент пропорциональности, получим равенства $x - x_0 = tl$, $y - y_0 = tm$, $z - z_0 = tn$. Но тогда

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \tag{6.3}$$

и (6.3) называют ***параметрическими уравнениями прямой*** в пространстве. Шесть коэффициентов в системе уравнений (6.3) имеют наглядный геометрический смысл: они представляют собой координаты одной точки на прямой, соответствующей $t = 0$, и координаты направляющего вектора прямой, который соединяет точки, соответствующие значениям параметра $t = 0$ и $t = 1$.

Итак, если задана система трех уравнений вида (6.3), в которой хотя бы один из коэффициентов l, m, n отличен от нуля, то эта система определяет в пространстве прямую, причем тройка коэффициентов x_0, y_0, z_0 задает на прямой точку, а тройка коэффициентов l, m, n представляет собой координаты направляющего вектора прямой.

Канонические уравнения прямой в пространстве. Как и в случае прямой на плоскости, из параметрических уравнений (6.3) можно исключить параметр t и записать результат в виде

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{6.4}$$

Уравнения (6.4) называют ***каноническими уравнениями прямой*** в пространстве.

Канонические уравнения представляют собой, по существу, другую форму записи условия коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\boldsymbol{s}$, состоящую в пропорциональности их координат (см. следствие 2.1).

В знаменателе канонических уравнений допускается нулевое значение. Чтобы понять смысл нулевых значений параметров l, m, n, обратим внимание на параметрические уравнения прямой (6.3), в которых нет проблемы нулевых знаменателей. Например, при $l = 0$ из (6.3) следует, что $x = x_0$. Мы видим, что если в канонических уравнениях один из знаменателей (или два, но не все три) равен нулю, то соответствующий числитель тоже равен нулю.

Уравнения прямой, проходящей через две точки. Каждая прямая в пространстве однозначно задается любыми двумя своими различными точками. Если известны координаты этих точек $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то в качестве направляющего вектора прямой подходит ненулевой вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. Зная его координаты и координаты точки M_1 на прямой, можно записать канонические уравнения прямой (6.4). В результате получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad —$$

уравнения прямой, проходящей через две точки.

Пример 6.1. Точки $M_1(1; 2; 3)$ и $M_2(3; 2; 1)$ определяют проходящую через них прямую $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{2-2} = \frac{z-3}{1-3}$. Нуль в знаменателе второй дроби означает, что для координат всех точек прямой выполнено равенство $y = 2$. Поэтому прямая расположена в плоскости $y - 2 = 0$, параллельной координатной плоскости xOz и пересекающей ось ординат в точке с ординатой 2.

Изменение формы уравнений прямой. Переход от канонических уравнений прямой к параметрическим и обратно достаточно очевиден и сводится к введению или исключению параметра t. Одна форма уравнений непосредственно записывается по другой, так как в них используются одни и те же параметры, задающие координаты точки на прямой и координаты направляющего вектора.

Пример 6.2. Найдем координаты точки B, симметричной точке $A(2;3;-1)$ относительно прямой L: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

В вычислениях будем опираться на следующее геометрическое построение точки B: а) через точку A проводим плоскость π, перпендикулярную прямой L; б) находим точку M пересечения прямой L и плоскости π; в) отрезок AM удлиняем до отрезка AB так, чтобы точка M оказалась в середине отрезка AB (рис. 6.2).

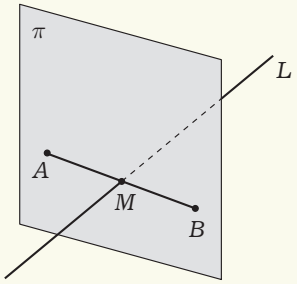

Рис. 6.2

Так как плоскость π перпендикулярна прямой L, то в качестве *нормального вектора* $\boldsymbol{n}$ плоскости можно выбрать направляющий вектор прямой L: $\boldsymbol{n}=\{1;-1;2\}$. По известным координатам нормального вектора плоскости π и принадлежащей ей точки A записываем уравнение плоскости π в виде (5.2): $1(x-2)+(-1)(y-3)+2(z+1)=0$.

Чтобы найти координаты точки M пересечения прямой и плоскости по их уравнениям, запишем параметрические уравнения прямой L: $x=1+t$, $y=-2-t$, $z=1+2t$. Подставив эти выражения для координат точки на прямой в уравнение плоскости, для параметра t получим уравнение $(1+t-2)-(-2-t-3)+2(1+2t+1)=0$, решение которого дает значение параметра для точки M. Найдя это значение $t=-4/3$ и подставив его в параметрические уравнения прямой, получим координаты точки пересечения $x=1-4/3=-1/3$, $y=-2+4/3=-2/3$, $z=1-8/3=-5/3$. Поскольку эта точка должна делить отрезок AB пополам, ее координаты, согласно (4.13), равны полусумме соответствующих координат точек A и B. Следовательно, обозначив через $(x_B;y_B;z_B)$ координаты точки B, получим равенства $\dfrac{2+x_B}{2}=-1/3$, $\dfrac{3+y_B}{2}=-2/3$, $\dfrac{-1+z_B}{2}=-5/3$. Отсюда $x_B=-8/3$, $y_B=-13/3$, $z_B=-7/3$. #

Достаточно просто выполняется переход от канонических уравнений к общим. Нетрудно увидеть, что на самом деле канонические уравнения представляют собой особую форму записи общих уравнений. Действительно, двойное равенство (6.4) равносильно *системе двух линейных уравнений*

$$\frac{x-x_0}{l}-\frac{y-y_0}{m}=0,\quad \frac{x-x_0}{l}-\frac{z-z_0}{n}=0, \tag{6.5}$$

которые представляют собой частный вид общих уравнений прямой в пространстве.

Самым сложным является переход от общих уравнений к каноническим или параметрическим.

Так как плоскости π_1 и π_2, соответствующие отдельным уравнениям из общих уравнений (6.1) прямой, не параллельны, то хотя бы один из *определителей второго порядка* $\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}$, представляющих собой координаты *векторного произведения* нормальных векторов этих плоскостей, не равен нулю. Предполагая, что первый из этих определителей является ненулевым: $\Delta=\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\neq 0$, изложим три способа перехода от общих уравнений к каноническим или параметрическим.

Первый способ состоит в том, что в системе (6.1) для z назначают два различных значения и по *формулам Крамера* находят два различных решения системы двух уравнений с двумя неизвестными x и y. Эти два решения системы (6.1) дают координаты двух разных точек M_1

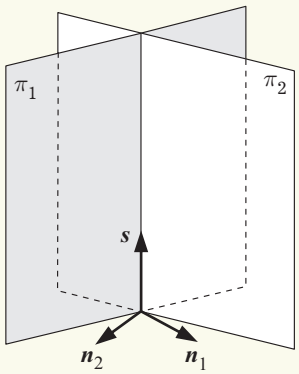

Рис. 6.3

и M_2 на прямой. А две известные точки прямой позволяют найти уравнение прямой, проходящей через две точки, которое фактически совпадает с каноническими уравнениями прямой.

Отметим, что в качестве направляющего вектора $\boldsymbol{s}$ прямой, заданной общими уравнениями (6.1), можно выбрать $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$ — векторное произведение двух нормальных векторов плоскостей (рис. 6.3). Действительно, это векторное произведение является вектором, который ортогонален каждому нормальному вектору, а потому он параллелен как одной, так и другой плоскости, т.е. параллелен их линии пересечения. Нахождение одной точки на прямой и ее направляющего вектора можно рассматривать как второй способ перехода от общих уравнений прямой к ее каноническим уравнениям.

Пример 6.3. Найдем канонические уравнения прямой, совпадающей с линией пересечения плоскостей π_1: $x - y + z - 2 = 0$, π_2: $x + y - z = 0$.

Чтобы найти координаты некоторой точки на прямой, подставляем в уравнения плоскостей $z = 0$ и решаем соответствующую систему двух линейных уравнений относительно x и y

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Значения $x = 1$ и $y = -1$ единственного решения системы получаются сложением и вычитанием уравнений системы. Итак, точка с координатами $(1; -1; 0)$ расположена на прямой.

В качестве направляющего вектора прямой берем векторное произведение $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$ нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1 = \{1; -1; 1\}$ и $\boldsymbol{n}_2 = \{1; 1; -1\}$ плоскостей π_1 и π_2. По формуле (3.2) для вычисления векторного произведения в координатах находим

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},$$

т.е. направляющим вектором прямой будет $\boldsymbol{s} = \{0; 2; 2\}$. Найденный вектор $\boldsymbol{s}$ для простоты заменим коллинеарным ему вектором $\{0; 1; 1\}$.

Проведенные вычисления позволяют написать канонические уравнения искомой прямой

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}. \quad \#$$

Третий способ перехода от общих уравнений прямой к ее каноническим или параметрическим уравнениям состоит в следующем. Решаем систему (6.1) по *правилу Крамера* относительно неизвестных x и y, рассматривая неизвестное z как параметр:

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} C_1 z + D_1 & B_1 \\ C_2 z + D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{B_1}{\Delta}(C_2 z + D_2) - \frac{B_2}{\Delta}(C_1 z + D_1) = \alpha_1 z + \beta_1,$$

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 z + D_1 \\ A_2 & C_2 z + D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{A_2}{\Delta}(C_1 z + D_1) - \frac{A_1}{\Delta}(C_2 z + D_2) = \alpha_2 z + \beta_2.$$

Обозначив z через t и добавив уравнение $z = t$, получим параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = \alpha_1 t + \beta_1, \\ y = \alpha_2 t + \beta_2, \\ z = t. \end{cases}$$

6.2. Взаимное расположение прямой и плоскости

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве допускает три случая. Прямая и плоскость могут пересекаться в одной точке. Они могут быть параллельны. Наконец, прямая может лежать в плоскости. Выяснение конкретной ситуации для прямой и плоскости зависит от способа их описания.

Предположим, что плоскость π задана общим уравнением π: $Ax+By+Cz+D=0$, а прямая L — каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$. Уравнения прямой дают координаты точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ на прямой и координаты направляющего вектора $\boldsymbol{s}=\{l;m;n\}$ этой прямой, а уравнение плоскости — координаты ее нормального вектора $\boldsymbol{n}=\{A;B;C\}$.

Если прямая L и плоскость π пересекаются, то направляющий вектор $\boldsymbol{s}$ прямой не параллелен плоскости π. Значит, нормальный вектор $\boldsymbol{n}$ плоскости не ортогонален вектору $\boldsymbol{s}$, т.е. их скалярное произведение не равно нулю. Через коэффициенты уравнений прямой и плоскости это условие записывается в виде неравенства $Al+Bm+Cn\neq 0$.

Если прямая и плоскость параллельны или прямая лежит в плоскости, то выполняется условие $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$, которое в координатах сводится к равенству $Al+Bm+Cn=0$. Чтобы разделить случаи „параллельны“ и „прямая принадлежит плоскости“, нужно проверить, принадлежит ли точка прямой данной плоскости.

Таким образом, все три случая взаимного расположения прямой и плоскости разделяются путем проверки соответствующих условий:

$$
\begin{aligned}
&L \text{ принадлежит } \pi \quad &\Leftrightarrow \quad &\begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \\ Al+Bm+Cn=0; \end{cases} \\
&L \text{ параллельна } \pi \quad &\Leftrightarrow \quad &\begin{cases} Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0, \\ Al+Bm+Cn=0; \end{cases} \\
&L \text{ пересекается с } \pi \quad &\Leftrightarrow \quad &Al+Bm+Cn\neq 0.
\end{aligned}
$$

Если прямая L задана своими общими уравнениями:

$$
L\colon \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}
$$

то проанализировать взаимное расположение прямой и плоскости π можно следующим образом. Из общих уравнений прямой и общего уравнения плоскости составим *систему трех линейных уравнений* с тремя неизвестными

$$
\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases} \tag{6.6}
$$

Если эта система не имеет решений, то прямая параллельна плоскости. Если она имеет единственное решение, то прямая и плоскость пересекаются в единственной точке. Последнее равносильно тому, что *определитель системы* (6.6)

$$
\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{vmatrix}
$$

отличен от нуля. Наконец, если система (6.6) имеет бесконечно много решений, то прямая принадлежит плоскости.

Угол между прямой и плоскостью. Угол φ между прямой L: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскостью π: $Ax+By+Cz+D=0$ находится в пределах от 0° (в случае параллельности) до

90° (в случае перпендикулярности прямой и плоскости). Синус этого угла равен $|\cos\psi|$, где ψ — угол между направляющим вектором прямой $\boldsymbol{s}$ и нормальным вектором $\boldsymbol{n}$ плоскости (рис. 6.4). Вычислив косинус угла между двумя векторами через их координаты (см. (2.16)), получим

$$\sin\varphi = |\cos\psi| = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Отсюда

$$\varphi = \arcsin\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \tag{6.7}$$

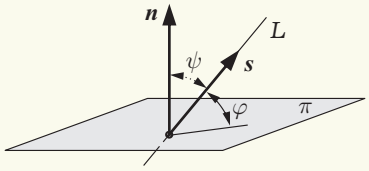

Рис. 6.4

Условие перпендикулярности прямой и плоскости эквивалентно тому, что нормальный вектор плоскости и направляющий вектор прямой коллинеарны. Через координаты векторов это условие записывается в виде двойного равенства

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \tag{6.8}$$

6.3. Взаимное расположение прямых

Для двух прямых в пространстве возможны четыре случая:
– прямые совпадают;
– прямые параллельны (но не совпадают);
– прямые пересекаются;
– прямые скрещиваются, т.е. не имеют общих точек и непараллельны.

Рассмотрим два способа описания прямых: *каноническими уравнениями* и *общими уравнениями*. Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями:

$$L_1:\ \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1},\quad L_2:\ \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}. \tag{6.9}$$

Для каждой прямой из ее канонических уравнений сразу определяем точку на ней $M_1(x_1;y_1;z_1) \in \in L_1$, $M_2(x_2;y_2;z_2) \in L_2$ и координаты направляющих векторов $\boldsymbol{s}_1 = \{l_1;m_1;n_1\}$ для L_1, $\boldsymbol{s}_2 = = \{l_2;m_2;n_2\}$ для L_2.

Если прямые совпадают или параллельны, то их направляющие векторы $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$ коллинеарны, что равносильно равенству отношений координат этих векторов:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{6.10}$$

Если прямые совпадают, то направляющим векторам коллинеарен и вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\frac{x_2-x_1}{l_1} = \frac{y_2-y_1}{m_1} = \frac{z_2-z_1}{n_1}. \tag{6.11}$$

Это двойное равенство также означает, что точка M_2 принадлежит прямой L_1. Следовательно, условием совпадения прямых является выполнение равенств (6.10) и (6.11) одновременно.

Если прямые пересекаются или скрещиваются, то их направляющие векторы неколлинеарны, т.е. условие (6.10) нарушается. Пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и, следовательно, *векторы* $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ являются *компланарными*. Условие компланарности этих векторов можно записать через *смешанное произведение* как равенство нулю *определителя третьего порядка*, составленного из их координат (см. **3.2**):

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{6.12}$$

Условие (6.12) выполняется в трех случаях из четырех, поскольку при $\Delta \neq 0$ прямые не принадлежат одной плоскости и потому скрещиваются.

Сведем все условия воедино:

L_1 и L_2 совпадают	$\Leftrightarrow$	выполнены условия (6.10) и (6.11);
L_1 и L_2 параллельны, но $L_1 \neq L_2$	$\Leftrightarrow$	выполнено (6.10), нарушено (6.11);
L_1 и L_2 пересекаются	$\Leftrightarrow$	выполнено (6.12), нарушено (6.10);
L_1 и L_2 скрещиваются	$\Leftrightarrow$	нарушено (6.12).

Если две прямые заданы общими уравнениями

$$L_1\colon \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad L_2\colon \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0, \end{cases}$$

то мы можем рассмотреть систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0. \end{cases} \tag{6.13}$$

Взаимное расположение прямых характеризуется количеством решений у системы (6.13). Если прямые совпадают, то система имеет бесконечно много решений. Если прямые пересекаются, то эта система имеет единственное решение. В случае параллельных или скрещивающихся прямых решений нет. Последние два случая можно разделить, если найти направляющие векторы прямых. Для этого достаточно вычислить два *векторных произведения* $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$ и $\boldsymbol{n}_3 \times \boldsymbol{n}_4$, где $\boldsymbol{n}_i = \{A_i; B_i; C_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Если полученные векторы коллинеарны, то данные прямые параллельны. Иначе они скрещивающиеся.

Пример 6.4. Исследуем взаимное расположение прямых

$$L_1\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}, \qquad L_2\colon \begin{cases} x - y - z + 1 = 0, \\ x + y + 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Направляющий вектор $\boldsymbol{s}_1$ прямой L_1 находим по каноническим уравнениям этой прямой: $\boldsymbol{s}_1 = \{1; 3; -2\}$. Направляющий вектор $\boldsymbol{s}_2$ прямой L_2 вычисляем с помощью векторного произведения нормальных векторов плоскостей, пересечением которых она является:

$$\boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$$

Поскольку $\boldsymbol{s}_1 = -\boldsymbol{s}_2$, то прямые параллельны или совпадают. Выясним, какая из этих ситуаций реализуется для данных прямых. Для этого подставим координаты точки $M_0(1; 2; -1) \in L_1$ в

общие уравнения прямой L_2. Для первого из них получаем $1 = 0$. Следовательно, точка M_0 не принадлежит прямой L_2 и рассматриваемые прямые параллельны.

Угол между прямыми. Угол между двумя прямыми можно найти, используя *направляющие векторы* прямых. Острый угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами (рис. 6.5) или является дополнительным к нему, если угол между направляющими векторами тупой. Таким образом, если для прямых L_1 и L_2 известны их направляющие векторы $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$, то острый угол φ между этими прямыми определяется через скалярное произведение:

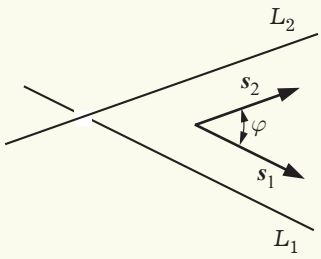

Рис. 6.5

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1|\,|\boldsymbol{s}_2|}.$$

Например, пусть $\boldsymbol{s}_i = \{l_i; m_i; n_i\}$, $i = 1, 2$. Используя формулы (2.9) и (2.14) для вычисления *длины вектора* и скалярного произведения в координатах, получаем

$$\cos\varphi = \frac{|l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

6.4. Расстояние до прямой

Расстояние от точки до прямой. Расстояние от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямой L, *заданной каноническими уравнениями* L: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$, может быть вычислено при помощи *векторного произведения*. Действительно, канонические уравнения прямой дают нам точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на прямой и *направляющий вектор* $\boldsymbol{s} = \{l; m; n\}$ этой прямой. Построим параллелограмм на векторах $\boldsymbol{s}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$. Тогда расстояние от точки M_1 до прямой L будет равно высоте h параллелограмма (рис. 6.6). Значит, нужное расстояние может быть вычислено по формуле

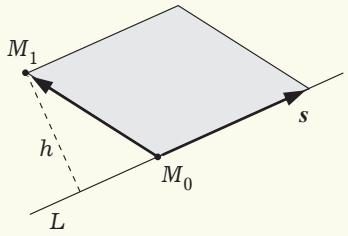

Рис. 6.6

$$\rho(M_1, L) = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|},$$

где числитель представляет собой площадь этого параллелограмма. Используя формулы вычисления *длины вектора* и векторного произведения векторов через их координаты, получаем

$$\rho(M_1, L) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (6.14)$$

Расстояние между прямыми. Если прямые пересекаются, то очевидно, что расстояние между ними равно нулю. Случай совпадающих прямых также малосодержателен. Поэтому о расстоянии между прямыми имеет смысл говорить, только если они параллельны или скрещиваются. Два указанных случая с точки зрения вычислений заметно расходятся.

Чтобы найти расстояние между параллельными прямыми, достаточно вычислить расстояние от произвольной точки, например, второй прямой до первой прямой, т.е. можно воспользоваться формулой (6.14). Таким образом, если две параллельные прямые заданы каноническими уравнениями

$$L_1\colon \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, \quad L_2\colon \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

то расстояние между ними вычисляется по формуле

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}.$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми можно находить, используя *смешанное произведение*. Пусть, как и выше, прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями. Так как они скрещиваются, их направляющие векторы $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$ и вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, соединяющий точки на прямых, некомпланарны. Поэтому на них можно построить параллелепипед (рис. 6.7). Тогда расстояние между прямыми равно высоте h этого параллелепипеда. В свою очередь, высоту параллелепипеда можно вычислить как отношение объема параллелепипеда к площади его основания. Объем параллелепипеда равен модулю смешанного произведения трех указанных векторов, а площадь параллелограмма в основании параллелепипеда равна модулю векторного произведения направляющих векторов прямых. В результате получаем формулу для расстояния $\rho(L_1, L_2)$ между прямыми:

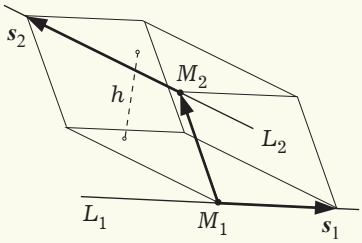

Рис. 6.7

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|\boldsymbol{s}_1 \boldsymbol{s}_2 \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2|}.$$

Записывая смешанное и векторное произведения в координатах, окончательно получаем

$$\rho(L_1, L_2) = \left| \frac{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}} \right|.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 6. Прямая в пространстве 51
6.1. Уравнения прямой в пространстве 51
6.2. Взаимное расположение прямой и плоскости 55
6.3. Взаимное расположение прямых 56
6.4. Расстояние до прямой 58